- **Μιγαδικές Συναρτήσεις**
- Οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν ως πεδίο ορισμού ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου και πεδίο τιμών μιγαδικούς (εν γένει) αριθμούς
- Μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι (εν γένει) τεσσάρων διαστάσεων
- Μπορούμε όμως να σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της, ή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της
- Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, και της παραγωγισιμότητας έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και διαφορές με αυτές που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις
- Μια εκτενής παρουσίαση είναι εκτός σκοπού
  - Θα αντιμετωπίσουμε τις (όποιες) μιγαδικές συναρτήσεις όταν τις συναντήσουμε
- Θα μας απασχολήσουν περισσότερο **συναρτήσεις του χρόνου** $\boldsymbol{t}$ οι οποίες (μερικές φορές) θα παίρνουν **μιγαδικές τιμές**
- Ας δούμε μια τέτοια απλή και ΠΟΛΥ σημαντική συνάρτηση **του χρόνου** $\boldsymbol{t}$

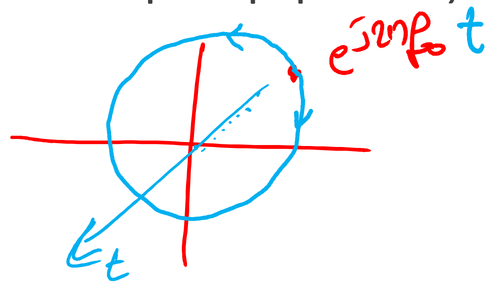
$e^{j2\pi f_0} = \cos(2\pi f_0) + j\sin(2\pi f_0) \leftarrow$ αριθμός

- Τη συνάρτηση

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t) \leftarrow$$

- **Η συνάρτηση $\boldsymbol{x(t) = e^{j2\pi f_0 t}}$**

- Η συνάρτηση αυτή είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία παίρνει μιγαδικές τιμές!



- Άρα για τη σχεδίασή της χρειαζόμαστε έναν άξονα t

- Επίσης, θέλουμε ένα μιγαδικό «χώρο» για να βάζουμε τις τιμές της, π.χ. $x(0), x(1), \ldots$

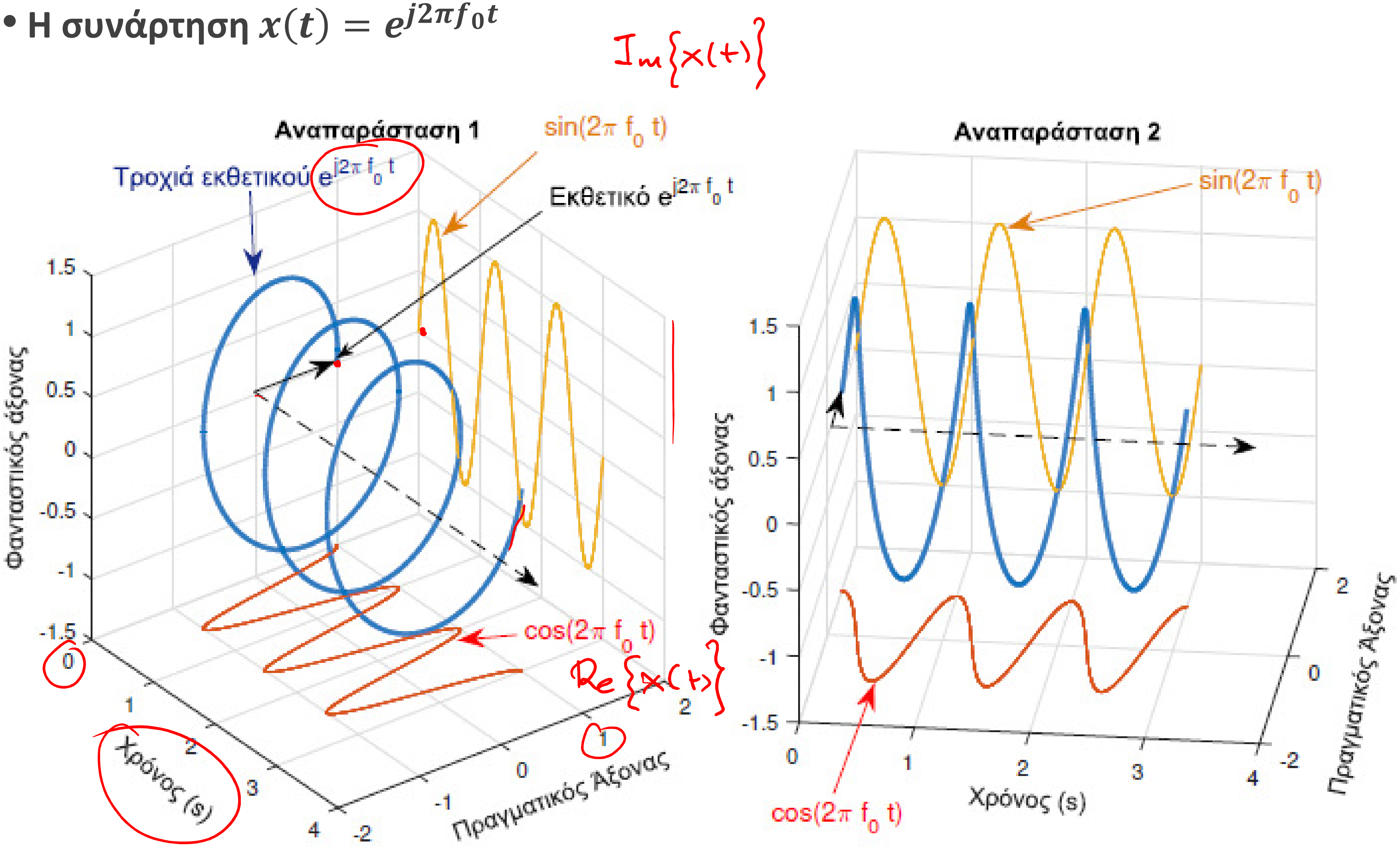
- Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η συνάρτηση θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα σταθερού μοναδιαίου μήκους…
  - …αφού $\left|e^{j\theta(t)}\right| = |\cos\theta(t) + j\sin\theta(t)| = \sqrt{\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)} = 1$…

το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του χρόνου σε σπειροειδή τροχιά

- Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή με συχνότητα f_0 Hz

- Ας δούμε πως μοιάζει μια τέτοια συνάρτηση…

- **Η συνάρτηση** $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$



- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**
- Θα παρατηρήσατε ότι η προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο (χρόνος, πραγματικός άξονας) αποτελεί ένα συνημίτονο!
- Αντίθετα, η προβολή στο επίπεδο (χρόνος, φανταστικός άξονας) «σχηματίζει» ένα ημίτονο!
- Αυτό είναι συνεπές με τη σχέση του Euler:

$z + z^* = 2\mathrm{Re}\{z\}$

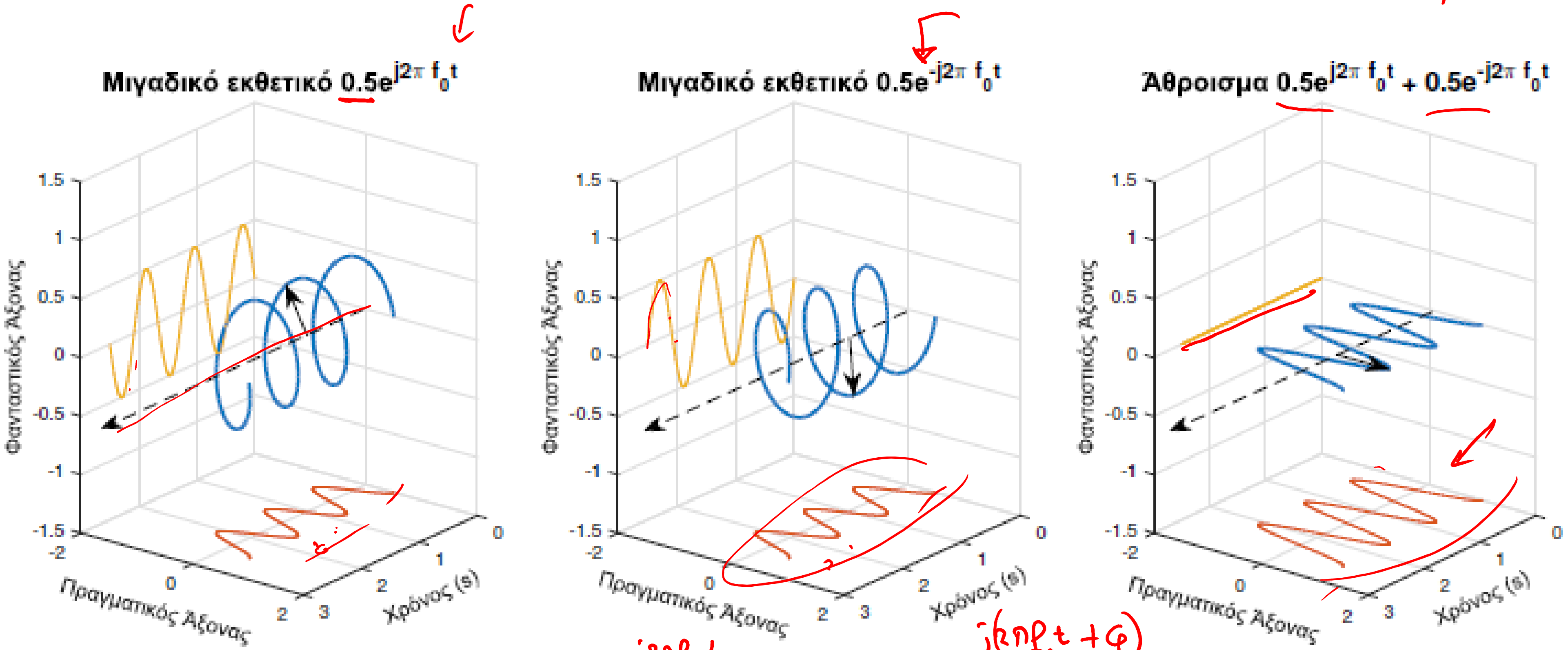
$$\Re\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

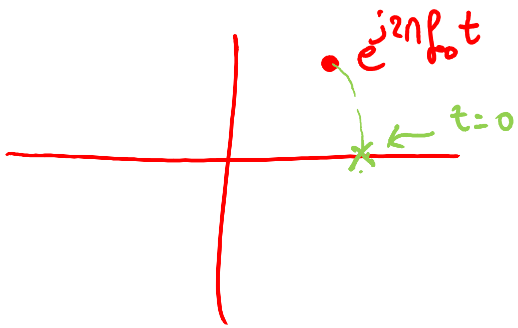
$$\Im\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}}{2j}$$

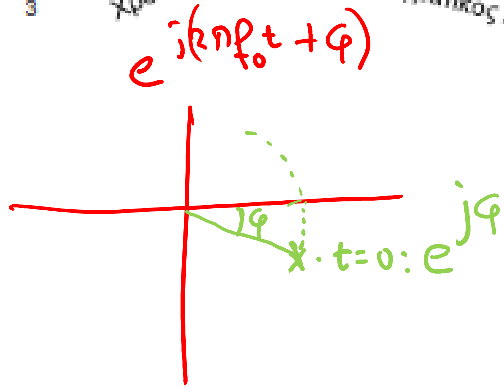
- Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπετε ότι το άθροισμα δυο συζυγών εκθετικών συναρτήσεων δίνει μια πραγματική συνάρτηση!
- Ας το δούμε αυτό οπτικά…

- **Η συνάρτηση** $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

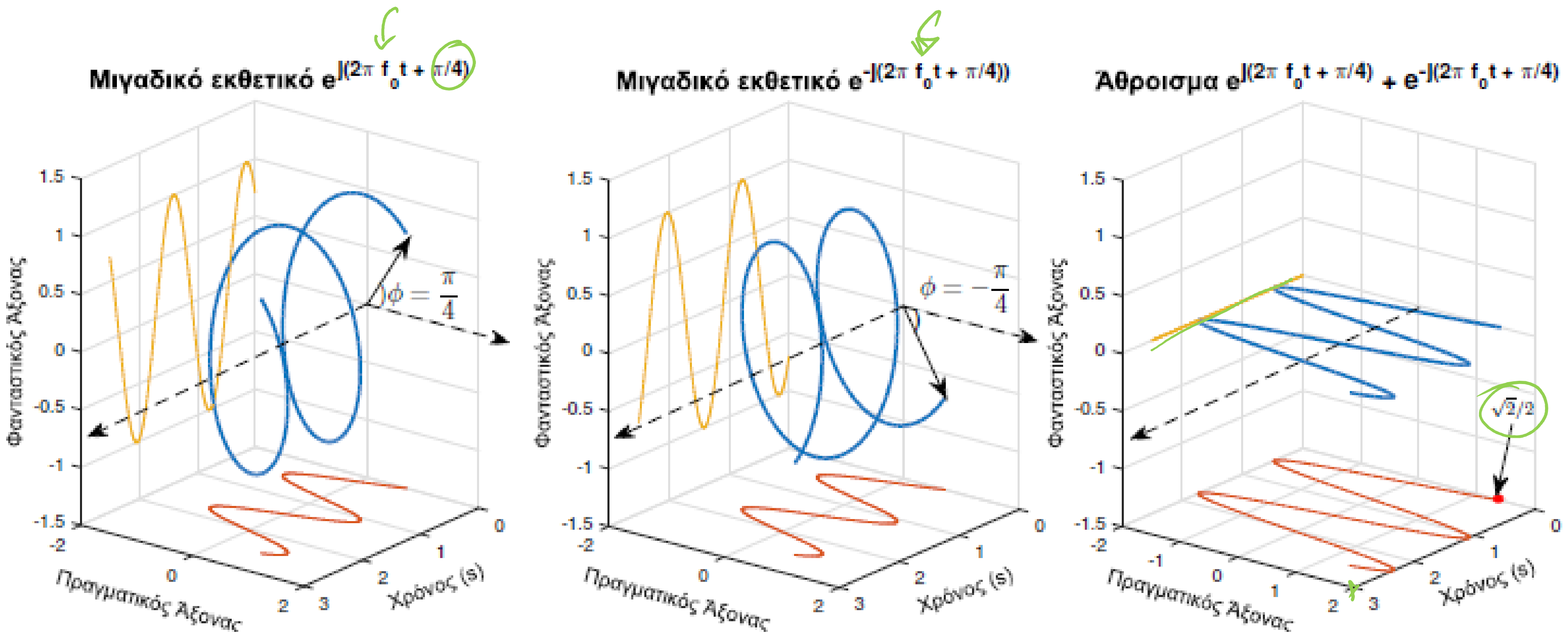
$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}\{z\}$







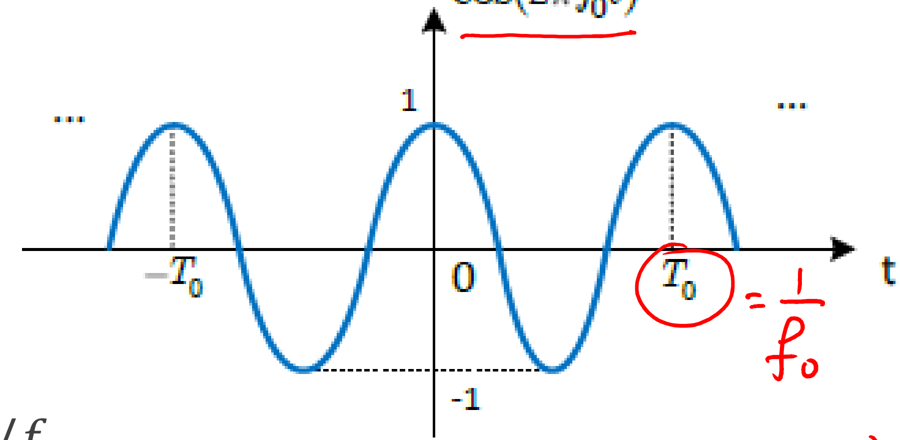
- **Η συνάρτηση** $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$



- Στην έννοιες που θα συζητήσουμε στο μάθημα, παίζουν θεμελιώδη ρόλο οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις

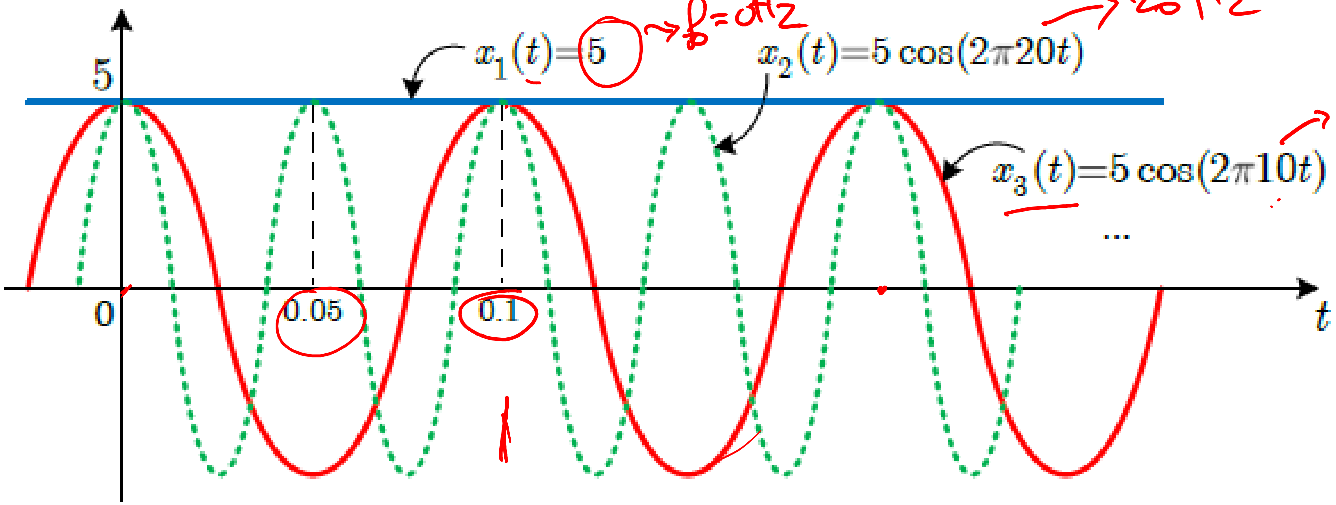
φάση

- Γενικότερα, μια ημιτονοειδής συνάρτηση ορίζεται ως $x(t) = A\cos(\boxed{2\pi f_0 t + \varphi})$
- A: **πλάτος ημιτονοειδούς**
- f_0: **συχνότητα ημιτονοειδούς**
- φ: **φάση μετατόπισης ημιτονοειδούς**



- Κάθε απλό ημιτονοειδές είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου, με **περίοδο** $T_0 = 1/f_0$

cos(π40t) = cos(2π20t)
↑ f_0



- **Μετατόπιση Φάσης**

- Η φάση μετατόπισης είναι μια τιμή που καθορίζει πόσο έχει μετατοπιστεί το ημιτονοειδές από τη θέση $t = 0$

- Αν $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)|_{\varphi=0} = A\cos(2\pi f_0 t)$ το ημιτονοειδές χωρίς μετατόπιση, τότε

$t \to t - t_0$

$$x_0(t - t_0) = A\cos\big(2\pi f_0 (t - t_0)\big) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

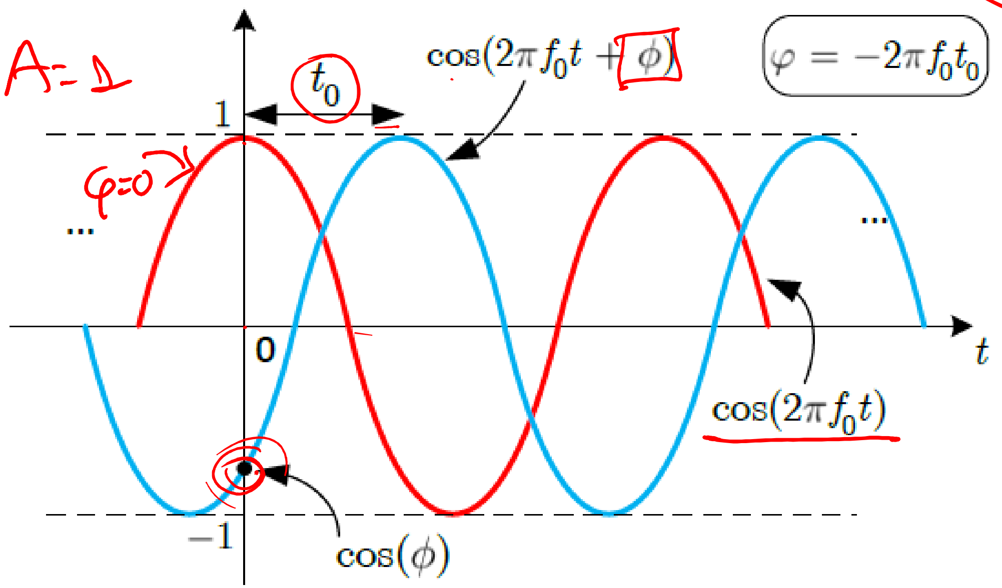
- Μια μετατόπιση κατά t_0 δεξιά ισούται με φάση μετατόπισης

$$\boxed{\varphi = -2\pi f_0 t_0} = -\frac{2\pi \boxed{t_0}}{T_0}$$

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

- Σχηματικά:

$A = 1$



- **Άθροισμα Ημιτόνων**

- Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως μπορούν να απλοποιηθούν οι πράξεις μεταξύ ημιτόνων όταν περνάμε μέσα από το μιγαδικό χώρο

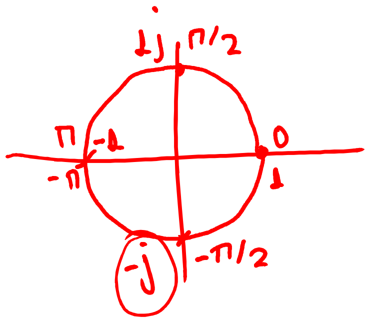
$x_1(t) = 5\cos(2\pi f_0 t) + 2\cos(2\pi f_0 t) =$
$= 7\cos(2\pi f_0 t)$

- Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

- Από τις σχέσεις του Euler, μπορούμε να γράψουμε:

Euler: $Ae^{j2\pi f_0 t} = \boxed{A\cos(2\pi f_0 t)} + jA\sin(2\pi f_0 t)$



$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) \\
&= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + B\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t}\} + \Re\{Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\} \\
&= \Re\{Ae^{j2\pi f_0 t} + Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\} \\
&= \Re\{(A + Be^{-j\pi/2})e^{j2\pi f_0 t}\}
\end{aligned}
$$

$e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\pi/2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

- Όμως: $A + Be^{-\frac{j\pi}{2}} = A - jB = \sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}$, $\boxed{\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)}$

$z = x + jy$

- **Άθροισμα Ημιτόνων**

- Άρα

$$x(t) = \Re\left\{\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2+B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2+B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \boxed{\Re}\left\{\sqrt{A^2+B^2}e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}\right\}$$

$\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\pi f_0 t+\varphi) +$

$j\sqrt{A^2+B^2}\sin(2\pi f_0 t+\varphi)$

- Από την τελευταία σχέση εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$x(t) = \sqrt{A^2+B^2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

$\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$

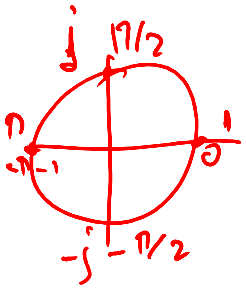
- Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται και για N ημίτονα

- Ο μιγαδικός $\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)$ ονομάζεται **φάσορας (phasor)**

- **Παράδειγμα:**

$f_0 = 50\,Hz$

○ Λύστε την εξίσωση $\boxed{A\cos(2\pi f_0 t + \phi)} = \cos(2\pi 50t + \pi) + \cos\left(2\pi 50t - \frac{\pi}{3}\right)$



$Re\{e^{j(2\pi 50t+\pi)}\} + Re\{e^{j(2\pi 50t - \frac{\pi}{3})}\} =$

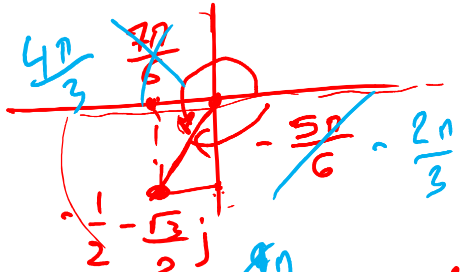
$= Re\{e^{j\pi} e^{j2\pi 50t}\} + Re\{e^{-j\frac{\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 50t}\} = Re\{(e^{j\pi} + e^{-j\pi/3})\, e^{j2\pi 50t}\} =$

$= Re\{(-1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j) \cdot e^{j2\pi 50t}\} = Re\{\underbrace{(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j)} e^{j2\pi 50t}\} =$ λάθος

$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \tan^{-1}\sqrt{3} = -\frac{5\pi}{6}$

$\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$



$= Re\{e^{-j\cancel{\frac{5\pi}{6}}\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{j2\pi 50t}\} = Re\{e^{j(2\pi 50t - \cancel{\frac{5\pi}{6}}\frac{2\pi}{3})}\}$

$= \cos(2\pi 50t - \cancel{\frac{5\pi}{6}}\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ f_0 = 50 \\ \varphi = -\cancel{\frac{5\pi}{6}}\frac{2\pi}{3} \end{cases}$ δηλ. $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ ✓

$z = x + jy$

Matlab:

atan2(y, x)

$\text{atan2d}(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = -120 = -\frac{2\pi}{3}$ ✓

- **Παράδειγμα:**
  - Λύστε την εξίσωση $\Re\{\underbrace{(1+j)}_{\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}}e^{j\theta}\} = -1$ $\Rightarrow R\{\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}\cdot e^{j\theta}\} = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow R\{\sqrt{2}\; e^{j(\theta+\pi/4)}\} = -1 \Rightarrow \sqrt{2}\; R\{e^{j(\theta+\pi/4)}\} = -1 \Rightarrow R\{e^{j(\theta+\pi/4)}\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \quad k\in Z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2k\pi - \pi \end{cases}$$

- **Περιοδικότητα**
- Είδαμε νωρίτερα ότι ένα απλό ημίτονο είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Άραγε το άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό?
- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα:
- Έστω $x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$, $f_1 \neq f_2$
- Έστω ότι είναι περιοδικό. Τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάποιο $T_0 > 0$
- Άρα

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t + T_0) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t + T_0) + \phi_2)$$

$2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T_0 + \varphi_1$ $2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T_0 + \varphi_2$

- Πρέπει

$$2\pi f_1 T_0 = 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$2\pi f_2 T_0 = 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z}$$

- Οπότε

$$\boxed{\frac{f_1}{f_2}} = \boxed{\frac{k}{l}} = \lambda\acute{o}\gamma o\varsigma\ \alpha\kappa\varepsilon\rho\alpha\iota\omega\nu$$

$\frac{5}{2} = 2.5$ ✓

- **Παράδειγμα:**
  - Ελέγξτε αν τα παρακάτω αθροίσματα είναι περιοδικά

α) $$x(t) = 2\cos\left(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2\pi \underbrace{250}_{f_2} t - \frac{\pi}{4}\right)$$

β) $$x(t) = \cos\left(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(400t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$2\pi f_2 \cdot t = 400t \Rightarrow f_2 = \frac{200}{\pi}$

α) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{250}$ ✓ $\frac{10}{25} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow 10 f_2 = 25 f_1$

β): $\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{200}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$ ✗

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ