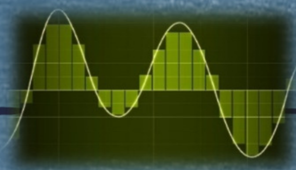
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η

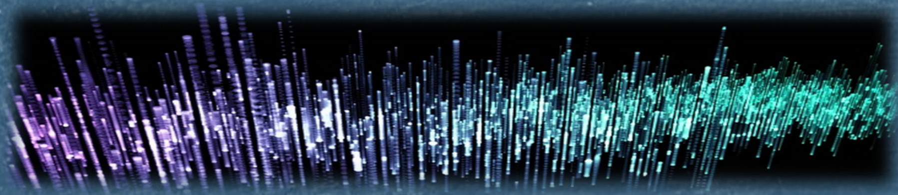
- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

Τι περιέχει το HY215?



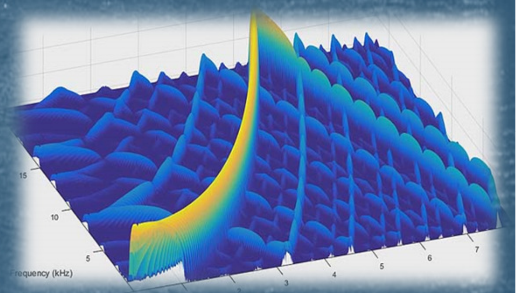
1ο Κομμάτι

- Μιγαδικοί αριθμοί
- Σήματα - Συστήματα
- Διαφορικές Εξισώσεις ως Συστήματα
- Σειρές Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier

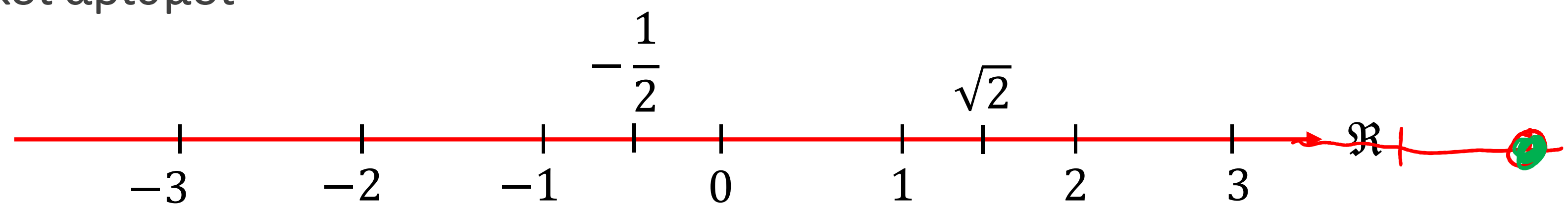


2ο Κομμάτι

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες
- Τυχαία Σήματα
- Δειγματοληψία



- Πραγματικοί αριθμοί



- Λύσεις εξισώσεων:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \in \Re$$

- Κάποιες εξισώσεις δεν έχουν λύση στο $\Re$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \dots ?$$

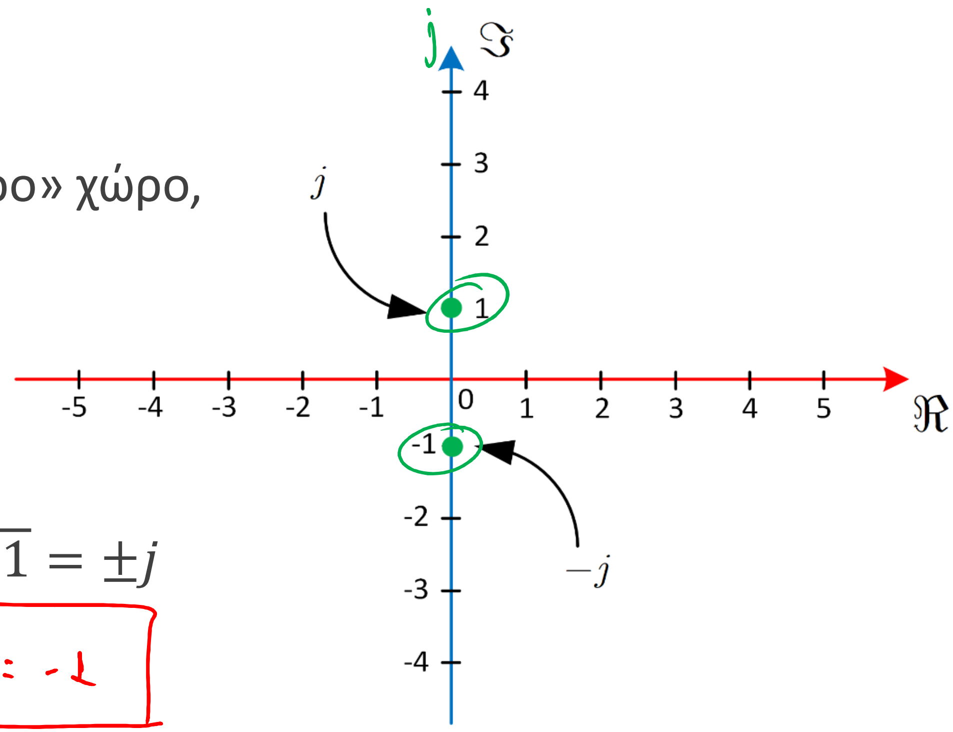
- Μπορούν να έχουν λύση σε ένα «ευρύτερο» χώρο, που περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα

- Ο χώρος αυτός λέγεται χώρος των ***μιγαδικών αριθμών* - $\mathbb{C}$**omplex

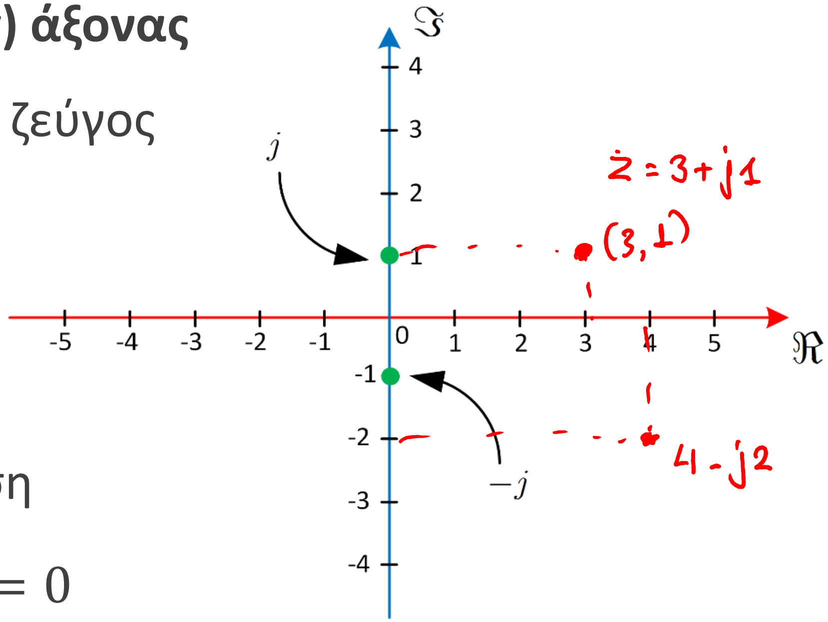
- Λύση:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$

με $\sqrt{-1} = j$ τη **φανταστική μονάδα** $\boxed{j^2 = -1}$



- Οι άξονες που συντελούν στη δημιουργία του μιγαδικού επιπέδου ονομάζονται **πραγματικός (real) και φανταστικός (imaginary) άξονας**



- Κάθε σημείο αυτού του επιπέδου αποτελεί ένα ζεύγος αριθμών (x, y)

- Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό γράφεται ως $z = x + jy$ και ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number)**

- Ας δούμε μια εύκολη εφαρμογή: έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης

- Όλα τα παραπάνω στο χώρο των πραγματικών αριθμών!

- Αν λύσουμε την εξίσωση στο χώρο των μιγαδικών αριθμών τότε το πράγμα αλλάζει! Ας δούμε πως:

  - Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

  - Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

$\sqrt{j^2 \cdot \Delta} = \sqrt{j^2} \cdot \sqrt{\Delta}$
$= j\sqrt{\Delta}$

  - Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές $\boxed{(\textbf{μιγαδικές})}$ ρίζες

$j^2 = -1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Οπότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Παράδειγμα:
  - Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x + 5$

$x^2 - 2x + 5 = 0$

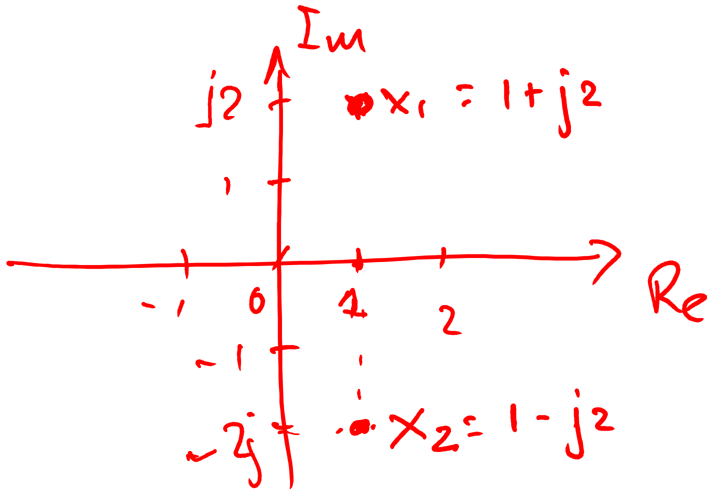
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$\alpha = 1$
$\beta = -2$
$\gamma = 5$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(-2) \pm j\sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm j4}{2} = \begin{cases} 1 + j2 = x_1 \\ 1 - j2 = x_2 \end{cases}$$

$5 + 0j$



(x, y)

συζυγής συμμετρία

$z_1 = x + jy$

$z_1^* = x - jy$

$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$

- Η μορφή $z = x + jy$ ενός μιγαδικού αριθμού ονομάζεται

καρτεσιανή

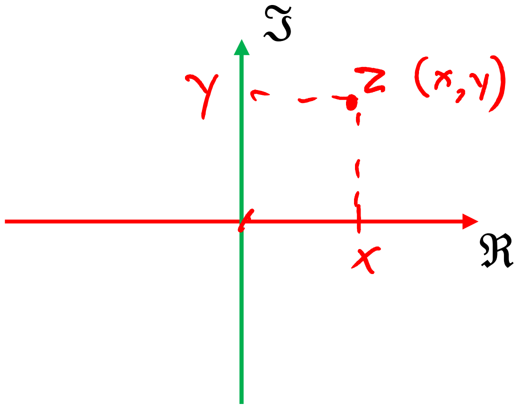
- Ορολογία:

  - x: τετμημένη : *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού

$$x = \Re\{z\}$$

  - y: τεταγμένη : *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού

$$y = \Im\{z\}$$



- Άρα

$$z = x + jy = \Re\{z\} + j\Im\{z\}$$

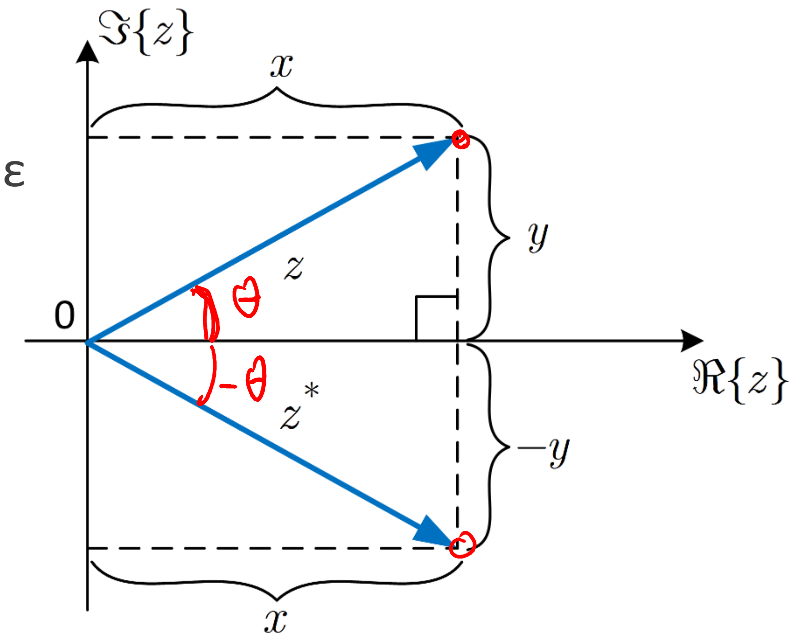
- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **διάνυσμα** που ξεκινά από το $(0,0)$ και καταλήγει στις συντεταγμένες (x, y)

$z_1 = 3 + j2$ | $z_2 = 3 - j4$

$z_1^* = 3 - j2$ | $z_2^* = 3 + j4$

- **Συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$

$$z^* = x - jy = \Re\{z\} - j\Im\{z\}$$



Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = x + jy$
	$z_2 = u + jv$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ $(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$ $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$
Ισότητα	$\boxed{z_1 = z_2}$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$
$z \in \Re$	$z = z^*$
$z \in \Im$	$z = -z^*$

$z_1 = 3 + 2j$
$z_2 = 4 + 6j$
$\Rightarrow z_1 + z_2 = (3+4) + j(2+6) = 7 + j8$

$(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 + jx_1y_2 + jy_1x_2 - y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$

$(x + jy) + (x - jy) = 2x$

- Ένα πολύ χρήσιμο μαθηματικό θεώρημα λέει ότι:

- Ένα πολυώνυμο βαθμού N έχει γενικά N ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές). Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι όποιες μιγαδικές ρίζες υπάρχουν θα «έρχονται» πάντα σε συζυγή ζεύγη!

  - Το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα

$x^N - 1 = 0 \Rightarrow$

$x^N = 1$

- Π.χ.

$$(z+j)(z-j) = z^2+1$$

$$\big(z+(2+j)\big)\big(z+(2-j)\big) = z^2+4z+5$$

$$\Big(z+\big(\underbrace{-1+j\sqrt{2}}_{z_1}\big)\Big)\Big(z+\big(\underbrace{-1-j\sqrt{2}}_{z_1^*}\big)\Big) = z^2+2z+3$$

$$(z+j)(z+1) = z^2+(1+j)z+j$$

- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
  - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

|z|

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
  - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \alpha\pi\rho o\sigma\delta\iota\acute{o}\rho\iota\sigma\tau o, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

- Αντί της καρτεσιανής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή, την **πολική**
- Η πολική μορφή χρησιμοποιεί την έννοια του μέτρου και της φάσης που είδαμε
- Από απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$z = x + jy = \rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|\cdot e^{j\varphi}$$

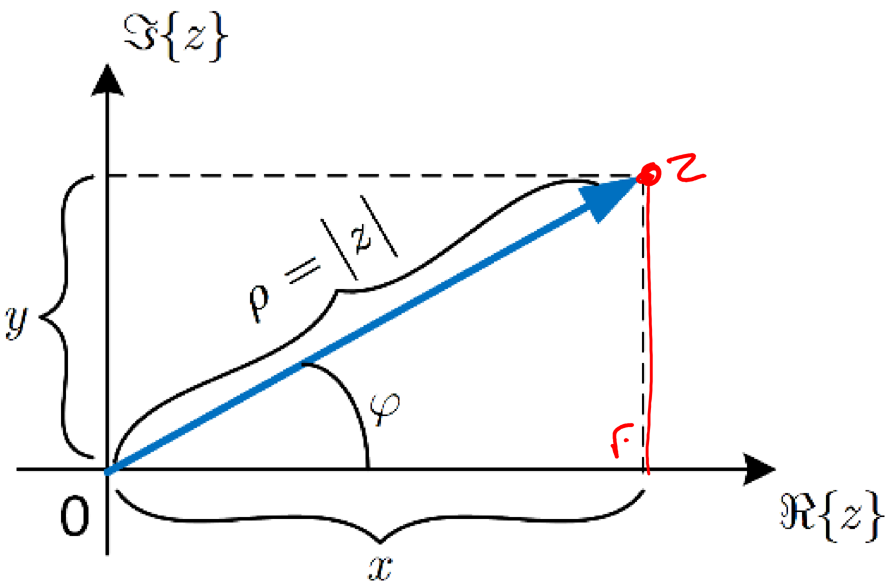
- Η παραπάνω πολική μορφή μπορεί να απλοποιηθεί μέσω **των σχέσεων του Euler**
- Σχέση του Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

- Άμεσες συνέπειες της παραπάνω σχέσης:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$



- Μεγάλης σπουδαιότητας σχέσεις!

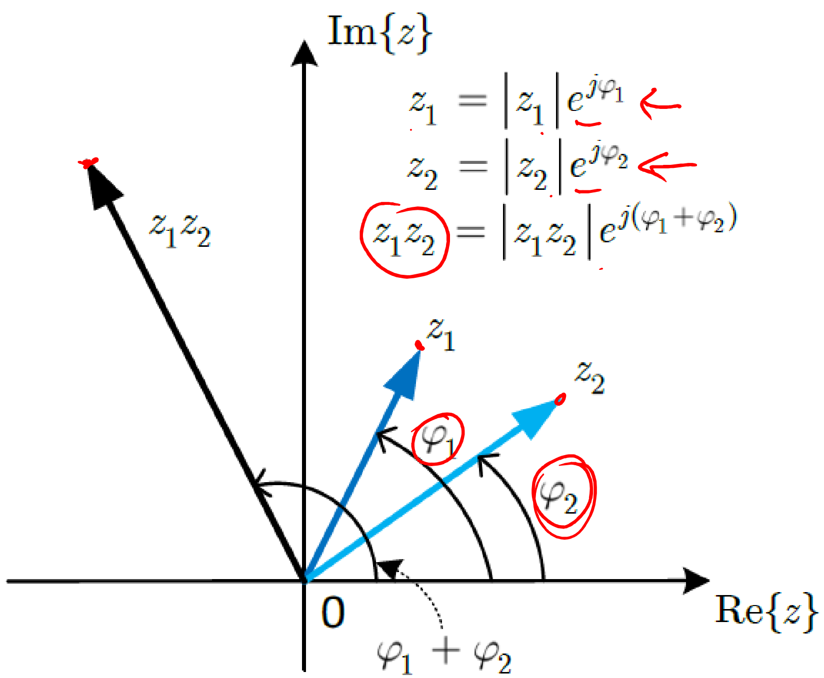
- Η πολική μορφή γράφεται ως:

$$z = x + jy = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

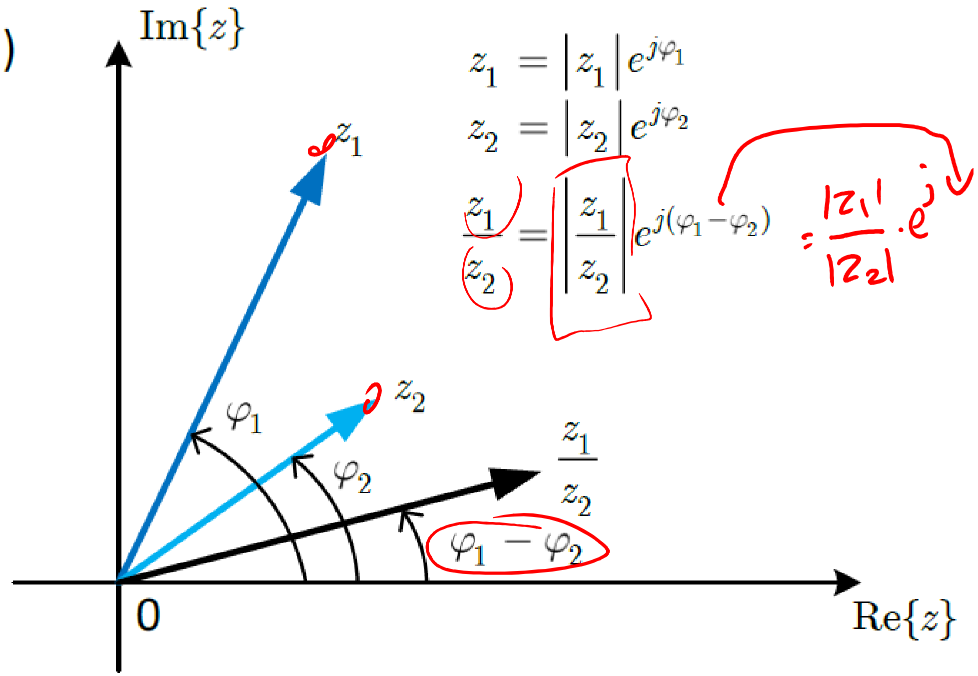
με $|z|, \varphi$ όπως τα περιγράψαμε νωρίτερα

- Η πολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με τις πράξεις του **γινομένου** και της **διαίρεσης** μεταξύ μιγαδικών αριθμών

- Αντίθετα, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ βολική για τις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**



(β)

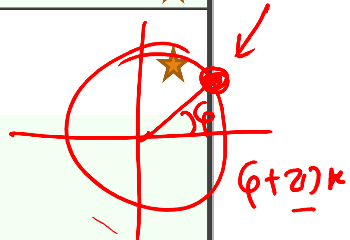


Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}, \rho_1 > 0$ $z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2}, \rho_2 > 0$
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \lvert z_1\rvert^2$
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$ $(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1+\phi_2)}$ $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1-\phi_2)}$
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\lvert\rho_1\rvert = \lvert\rho_2\rvert$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\tan^{-1}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$(x+jy)^* = x - jy$



- Κάποιες πολικές μορφές εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη
- Ας τις δούμε

$e^{j\pi} = -1 \Rightarrow \cos(\pi) + j\sin(\pi) = -1$

$\sqrt{1^2+0^2} = 1$ $\tan^{-1}\left(\frac{0}{x}\right) = 0$

Συνήθεις πολικές μορφές

Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$1 \cdot e^{j0} = 1$ $\quad 1+0j$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$

$e^{j\pi k}$ $\quad (e^{j\pi})^k = (-1)^k$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$

- **Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**
- Για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ χρονοβόρα
- Με πολική μορφή:

$$z^n = \left(|z|e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

- Η μορφή αυτή ονομάζεται **σχέση του De Moivre**
- Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$\boxed{z^N - a = 0,} \qquad a = |a|e^{j\theta} \in \mathbb{C}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

- Ας δούμε πως

$$z^N = a \iff |z|^N e^{jN\varphi} = |a|e^{j(\theta+2\pi k)} \iff z := \begin{cases} |z| = |a|^{\frac{1}{N}} \\ \varphi = \dfrac{\theta+2\pi k}{N}, k = 0,1,\dots,N-1 \end{cases}$$

$z = |z| \cdot e^{j\varphi}$

$z_1 = z_2 \leftarrow$

$\rho_1 = \rho_2$

$\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$

- Παράδειγμα:

  - Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 - 8 = 0$

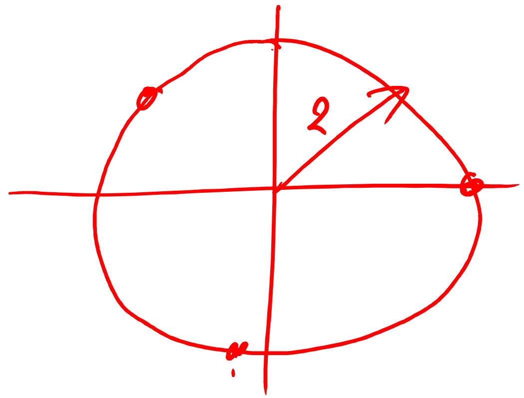
$$z^3 = 8 \Rightarrow (\rho \cdot e^{j\theta})^3 = 8 \cdot \underset{1}{e^{j2k\pi}} \Rightarrow \rho^3 e^{j3\theta} = 8 \cdot e^{j2k\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = 2 \\ 3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}\cdot 0} = 2$$

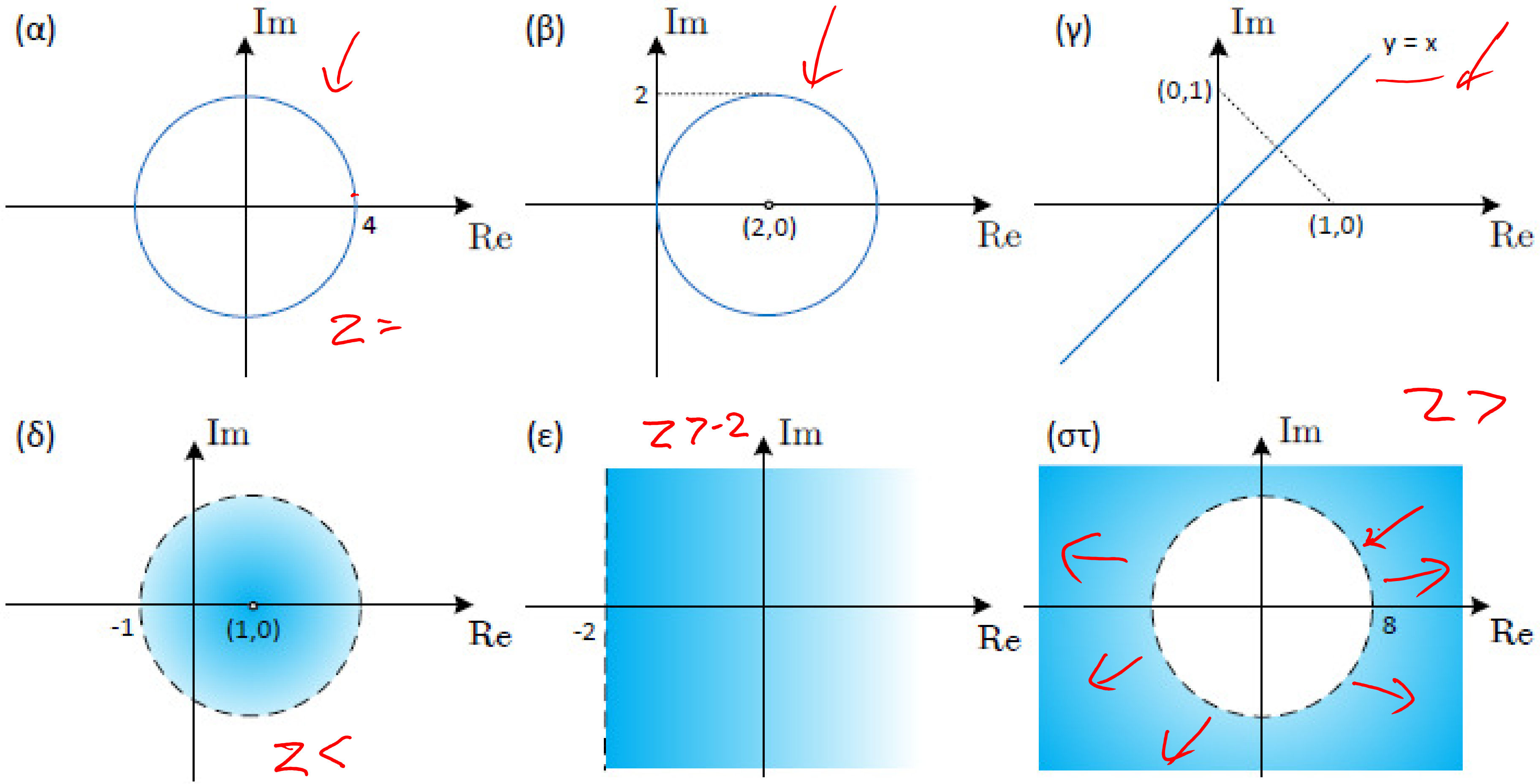
$$z_2 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_3 = 2 \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}\cdot 2}$$



- **Γεωμετρικοί Τόποι**

- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν μια συγκεκριμένη (γεωμετρική, πολλές φορές) ιδιότητα ονομάζεται **γεωμετρικός τόπος**



- Παράδειγμα:

  - Βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

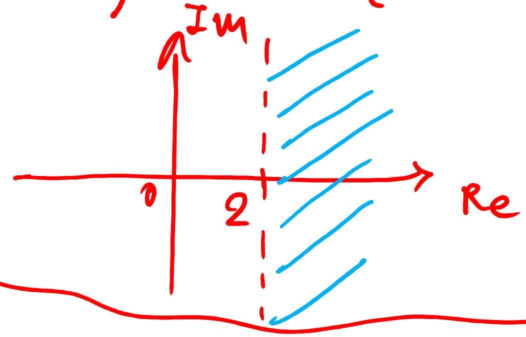
a) $\Re\{z\} > 2$

b) $|z-(4-j7)| = 2$

c) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3}$

$z = x + jy$

a) $R\{z\} > 2 \Rightarrow R\{x+jy\} > 2 \Rightarrow x > 2$

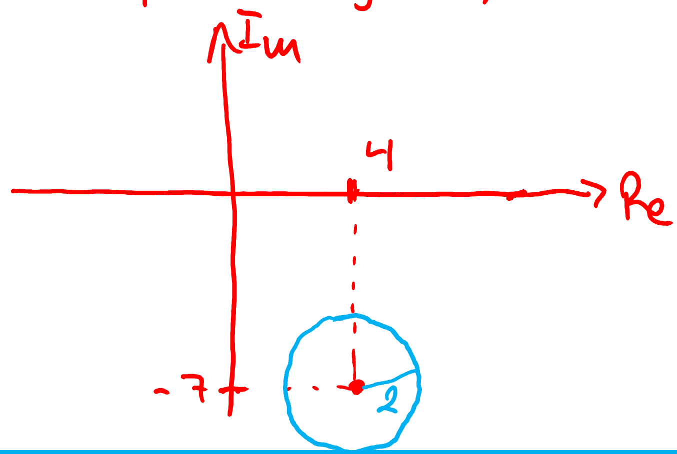


b) $|z-(4-j7)| = 2 \Rightarrow |x+jy-4+j7| = 2 \Rightarrow |(x-4)+j(7+y)|^2 = 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+7)^2 = 4 = 2^2 = r^2$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow |z|^2 = x^2+y^2$

$z = (x-4)+j(y+7) \Rightarrow |z| = \sqrt{(x-4)^2+(y+7)^2}$



- Παράδειγμα:

c) $\arg(z+1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg(x+jy+1) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \arg((x+1)+jy) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$z = x+jy$

$\arg\{z\} = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{y}{x+1} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{y}{x+1} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{3}(x+1) \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}}$