

# HY215 – Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 23<sup>Η</sup>

- Συστήματα Διακριτού Χρόνου και ιδιότητες



- Τα σήματα φέρουν χρήσιμη πληροφορία που μπορεί να εξαχθεί μέσω των **συστημάτων**
- Ένα σύστημα δεν είναι τίποτε άλλο από μια οποιαδήποτε διαδικασία παράγει μια **έξοδο** όταν διεγερθεί από μια **είσοδο**
  - Το σύστημα διεγείρεται από ένα **σήμα εισόδου** και παράγει ως απόκριση ένα **σήμα εξόδου**
  - Το σύστημα μπορεί να υλοποιείται σε υλικό, λογισμικό, ή να υπάρχει στη φύση
- Η πιο γενική απεικόνιση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη



- Το σήμα εισόδου συμβολίζεται με  $x[n]$
- Το σήμα εξόδου συμβολίζεται με  $y[n]$

- Το σύστημα πραγματοποιεί μια λειτουργία επάνω στο σήμα εισόδου με σκοπό να εξάγει κάποια πληροφορία από αυτό
- Μια διαφορετική αναπαράσταση ενός συστήματος είναι η ακόλουθη

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

με  $T\{\cdot\}$  να αναπαριστά έναν τελεστή (πράξη) που εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος  $x[n]$  ώστε να παραχθεί η έξοδος  $y[n]$

- Πιο συγκεκριμένα, ένα σύστημα αναπαριστά μια **σχέση εισόδου-εξόδου**
- Παραδείγματα συστημάτων:

$$y[n] = 2x[n]$$

$$y[n] = 3x^2[n - 1]$$

$$y[n] = y[n - 1] + x[n]$$

- Γενικότερα, ένα σύστημα αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια **εξίσωση διαφορών**

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n - l]$$

- Τα συστήματα διακρίνονται σε 5 (για τους σκοπούς μας) κατηγορίες:

1. Δυναμικά ή Στατικά
2. Γραμμικά ή μη γραμμικά
3. Χρονικά μεταβλητά ή αμετάβλητα
4. Αιτιατά ή μη αιτιατά
5. Ευσταθή και ασταθή

Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε ότι ένα σύστημα με είσοδο  $x[n]$  θα δίνει έξοδο  $y[n]$

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

## • Δυναμικά ή Στατικά

- Αλλιώς, ονομάζονται συστήματα **με μνήμη ή χωρίς μνήμη**
- **Δυναμικά** ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $n_0$
- **Στατικά** ονομάζονται αυτά που δεν έχουν αυτήν την απαίτηση, δηλ. για τον υπολογισμό της εξόδου τη στιγμή  $n_0$  απαιτείται η είσοδος την ίδια χρονική στιγμή και μόνο

E.B.A

- Παραδείγματα:

$$\begin{array}{ll}
 y[n] = x[n] + x[n-2] & \text{Δυναμ.} \\
 y[n] = x[n+1] - 2x[n-1] & \text{Δυναμ.} \\
 y[n] = \log |x[n]| & \text{Στατικό} \\
 y[n] = x^2[n] & \text{Στατικό}
 \end{array}$$

- Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?

- **Γραμμικά ή μη γραμμικά**

- **Γραμμικό** λέγεται ένα σύστημα ικανοποιεί δυο ιδιότητες:

- Την ιδιότητα της **ομογένειας**

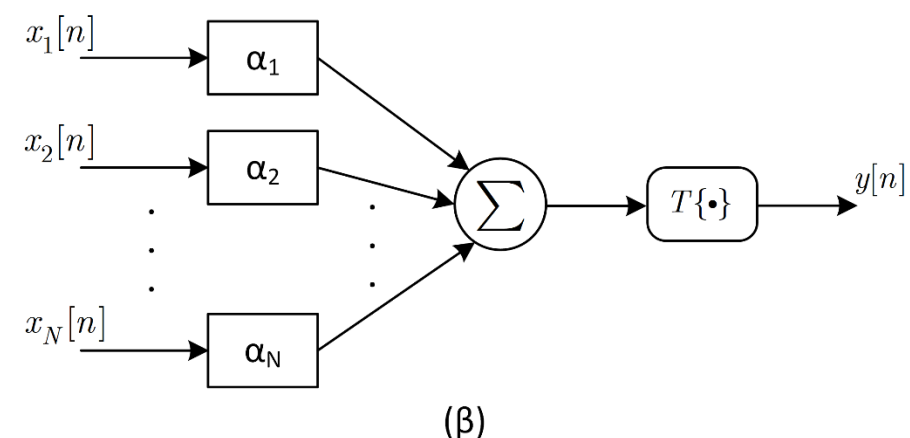
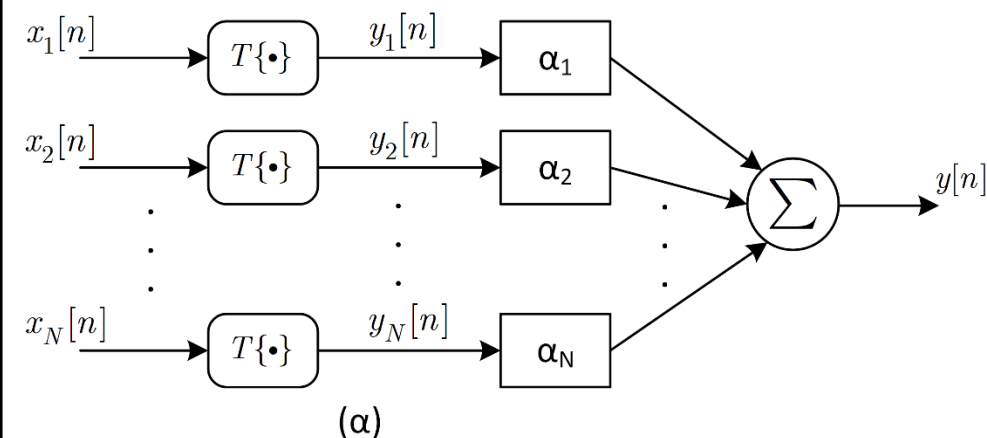
- Την ιδιότητα της **αθροιστικότητας**

## • Γραμμικά ή μη γραμμικά

- **Ομογένεια:** αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα  $cx[n]$  τότε στην έξοδο θα εμφανίζεται το σήμα  $cy[n]$  ,  $c \in \mathbb{C}$ 
  - Π.χ.  $y[n] = 2x[n - 1]$ ,  $y[n] = x[n + 3] - x[n]$ ,  $y[n] = 3x[-n] + 2x[n^2]$
  - Αντιπαράδειγμα:  $y[n] = x^2[n]$ ,  $y[n] = \frac{1}{x[n]}$ ,  $y[n] = \sqrt{|x[n]|}$
- **Αθροιστικότητα:** αν στην είσοδο του συστήματος εμφανίζεται το σήμα  $x_1[n] + x_2[n]$  τότε στην έξοδο εμφανίζεται το σήμα  $y_1[n] + y_2[n]$ , με  $y_1[n]$  και  $y_2[n]$  τις εξόδους του συστήματος για εισόδους  $x_1[n]$  και  $x_2[n]$  αντίστοιχα.
  - Π.χ.  $y[n] = 2x[n - 1] + x[n]$ ,  $y[n] = nx[-n] - 5x[n + 1]$ ,  $y[n] = 3x[-n - 1] + 2[n + 1]$
  - Αντιπαράδειγμα:  $y[n] = x^2[n]$ ,  $y[n] = \frac{1}{x[n]}$ ,  $y[n] = \sqrt{|x[n]|}$

## • Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Για τους οπτικούς τύπους ☺ η γραμμικότητα ισχύει αν οι δυο παρακάτω διατάξεις πραγματοποιούν την ίδια έξοδο



- Με μαθηματικά, αν

$$\begin{aligned}
 T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= \\
 &= T\{ax_1[n]\} + T\{bx_2[n]\} \\
 &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \\
 &= ay_1[n] + by_2[n]
 \end{aligned}$$

με  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$  τις εξόδους του συστήματος για εισόδους  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  αντίστοιχα, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.



## • Γραμμικά ή μη γραμμικά

• Παράδειγμα:

○ Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n]$$

είναι γραμμικό.

Ομογένεια: αν  $x[n] \rightarrow y[n] = 2x[n-1] + x[n]$  ①

$$\begin{aligned} \text{αν } cx[n] \rightarrow \hat{y}[n] &= 2cx[n-1] + cx[n] = c(2x[n-1] + x[n]) \\ &= cy[n] \text{ ②} = \text{①} \quad \checkmark \quad \underline{\text{ομογενές}} \end{aligned}$$

Αδρασητικότητα: αν  $x_1[n] \rightarrow y_1[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n]$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n] = 2x_2[n-1] + x_2[n]$$

$$\begin{aligned} \text{αν } x_1[n] + x_2[n] \rightarrow \hat{y}[n] &= 2(x_1[n-1] + x_2[n-1]) + (x_1[n] + x_2[n]) \\ &= \underbrace{2x_1[n-1] + x_1[n]}_{y_1[n]} + \underbrace{2x_2[n-1] + x_2[n]}_{y_2[n]} \end{aligned}$$

✓ αδρασητικό

- Γραμμικά ή μη γραμμικά

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι γραμμικό.

Όμογενεια : αν  $x[n] \rightarrow y[n] = x^2[n]$

$$cx[n] \rightarrow \hat{y}[n] = (cx[n])^2 = c^2 x^2[n]$$

$$= c^2 y[n] \neq cy[n]$$

X ομογενές

Άρα δεν είναι γραμμικό.

## • Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Η χρονική (α)μεταβλητότητα έχει να κάνει με τη συμπεριφορά του συστήματος όταν η είσοδος καθυστερεί κατά κάποια δείγματα
- Έστω  $x[n]$  η είσοδος σε ένα **χρονικά αμετάβλητο** (ΧΑ) σύστημα, και έστω  $y[n]$  η έξοδος. Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά  $n_0$  δείγματα, δηλ.

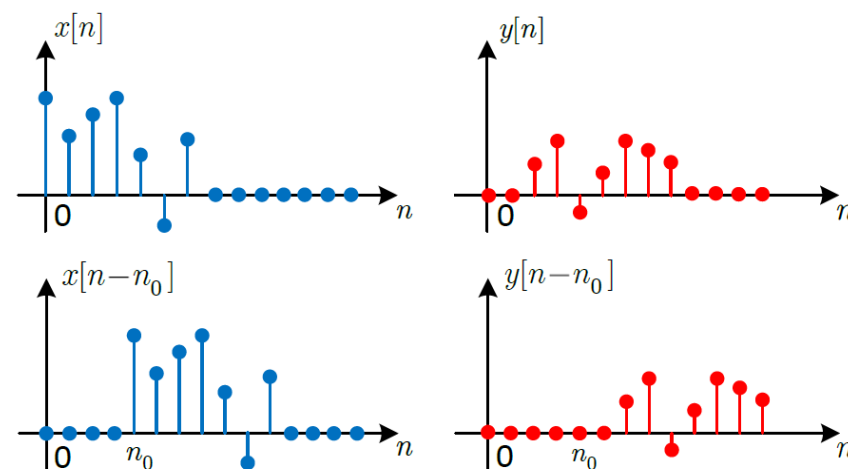
$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

τότε η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = y[n - n_0]$$

Χ.Α.

- Ένα σύστημα που δεν ικανοποιεί τα παραπάνω ονομάζεται **χρονικά μεταβλητό**. Ένα χρονικά μεταβλητό σύστημα αποκρίνεται διαφορετικά σε κάθε καθυστέρηση της εισόδου
- Η διαφορά μπορεί να έγκειται στην καθυστέρηση της εξόδου, στο πλάτος της, ακόμα και στη γραφική παράσταση του σήματος εξόδου!



## • Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = x^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Έστω  $x[n] \rightarrow y[n] = x^2[n]$

$$x[n-n_0] \rightarrow \hat{y}[n] = x^2[n-n_0] \quad \textcircled{1}$$

Η καθυστ. κατά  $n_0$  είσοδος θα είναι:  $y[n-n_0] = x^2[n-n_0] \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \Rightarrow \text{X.A.} \quad \checkmark$$

- Χρονικά μεταβλητά ή χρονικά αμετάβλητα

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y[n] = nx^2[n]$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Έστω  $x[n] \rightarrow y[n] = nx^2[n]$

$$x[n-n_0] \rightarrow \hat{y}[n] = nx^2[n-n_0] \text{ ①}$$

Καθυστέρω την είσοδο κατά  $n_0$  :  $y[n-n_0] = (n-n_0)x^2[n-n_0] \text{ ②}$

$$\text{①} \neq \text{②} \Rightarrow \text{X.M.}$$

## • Αιτιατά και μη αιτιατά

- Αιτιατό λέγεται ένα σύστημα που **δεν** απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογίσει μια τιμή της εξόδου του
- Κάθε φυσικό σύστημα είναι αιτιατό
- Μη αιτιατά συστήματα είναι υλοποιήσιμα όταν η είσοδος βρίσκεται διαθέσιμη ολόκληρη από πριν
  - Καταγεγραμμένη σε κάποιο αποθηκευτικό χώρο

- Παραδείγματα:

$$y[0] = x[0] + x[-2]$$

Ε.Β.Α

$$y[n] = x[n] + x[n-2]$$

αιτιατό

$$y[n] = x^2[n+1] - 2 \sin(x[n-1])$$

μη αιτιατό

$$y[n] = \log|x[n+1]|$$

μη αιτιατό

$$y[n] = \sqrt{x[n-1]}$$

αιτιατό

- Αναγνωρίζετε σε ποια κατηγορία ανήκουν?

## • Ευσταθή και ασταθή

- Ένα σύστημα ονομάζεται **Φραγμένης-Εισόδου-Φραγμένης-Εξόδου (Bounded-Input-Bounded-Output – BIBO)** ευσταθές αν

$$|x[n]| < B_x, \quad B_x \in \mathfrak{R}$$

συνεπάγεται ότι

$$|y[n]| < B_y, \quad B_y \in \mathfrak{R}$$

- Η ευστάθεια ουσιαστικά απαιτεί για απολύτως φραγμένη είσοδο, η έξοδος να είναι επίσης απολύτως φραγμένη
- Κάθε σύστημα που υπάρχει στη φύση είναι ευσταθές
- Αλλά...
  - Ένας πύραυλος που εκτοξεύεται είναι εκ φύσεως ασταθές σύστημα
  - Ένα μαχητικό εν πτήση είναι εκ φύσεως ασταθές σύστημα
  - Ένα πρόγραμμα που παράγει τους αριθμούς Fibonacci μοντελοποιεί ένα ασταθές σύστημα

## • Ευσταθή και ασταθή

- Παράδειγμα:

- Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = \frac{1}{x[n]} \quad \leftarrow \text{ασταθές}$$

$$y[n] = x^2[n-2] \quad \leftarrow \text{ευσταθές}$$

είναι ευσταθή.



- Μια γρήγορη ματιά...

- Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

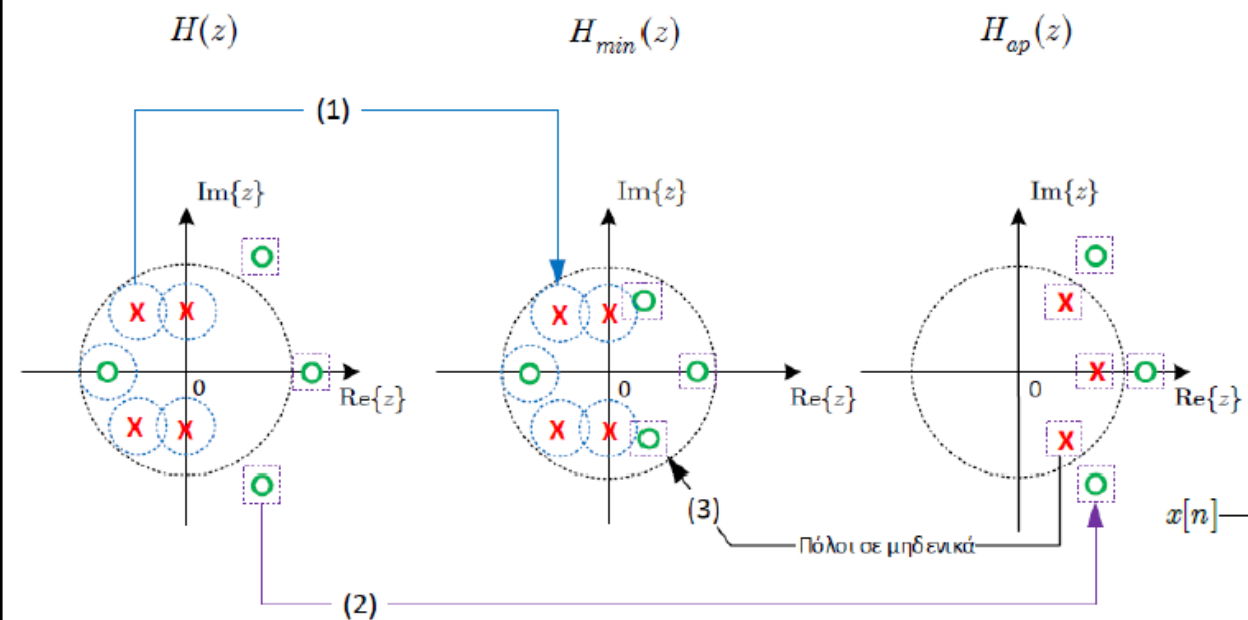
- Μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

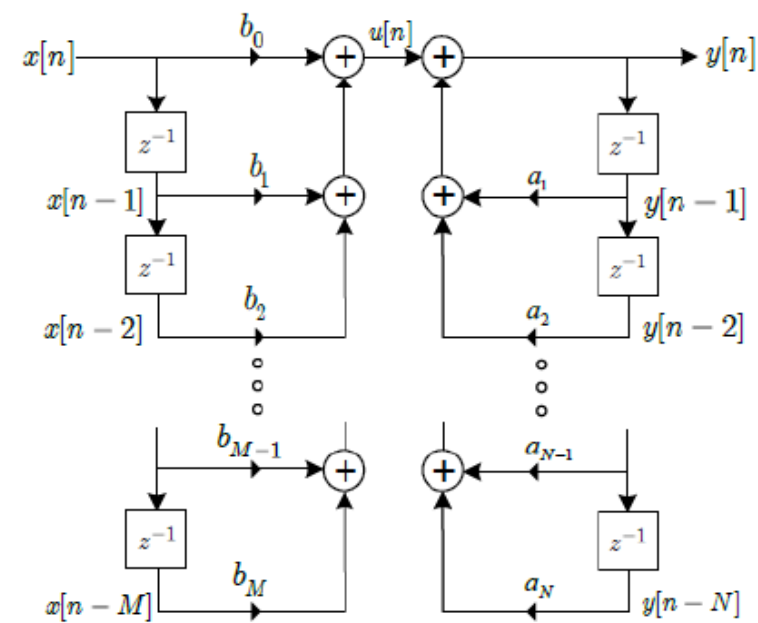
- ΓΧΑ συστήματα

$$\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^N b_l x[n-l]$$

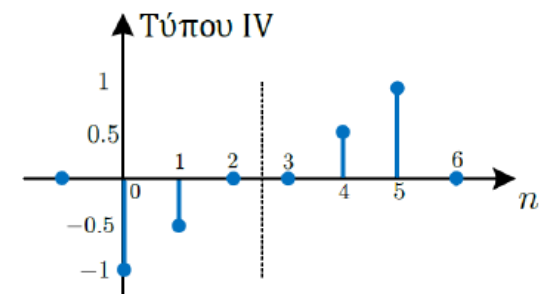
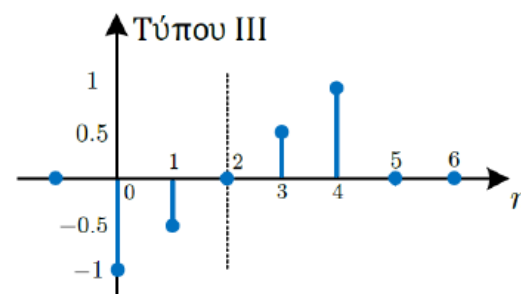
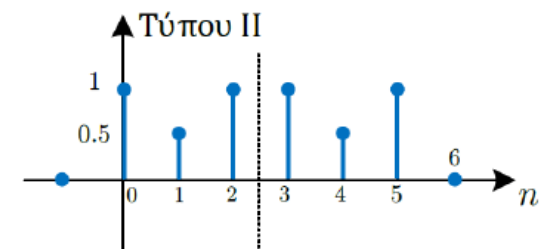
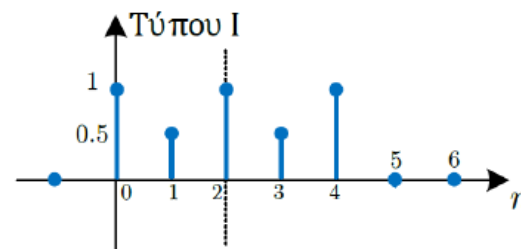
- Μια γρήγορη ματιά...
- Συστήματα ελάχιστης φάσης, αντίστροφα συστήματα, συστήματα all-pass



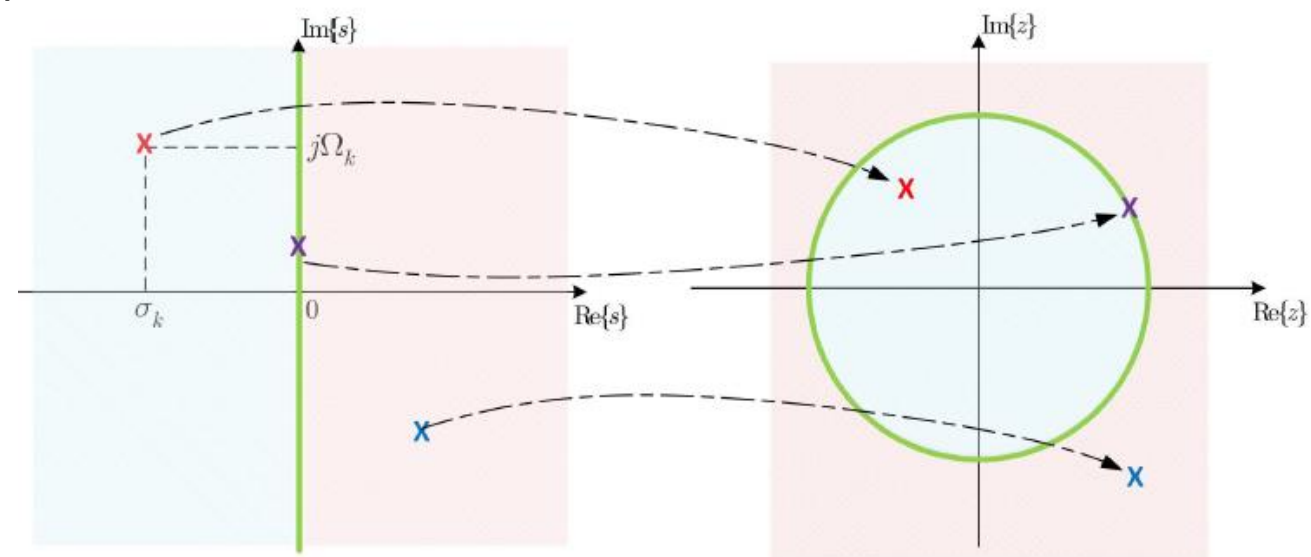
- Δομές συστημάτων



- Μια γρήγορη ματιά...
- Συστήματα γραμμικής φάσης

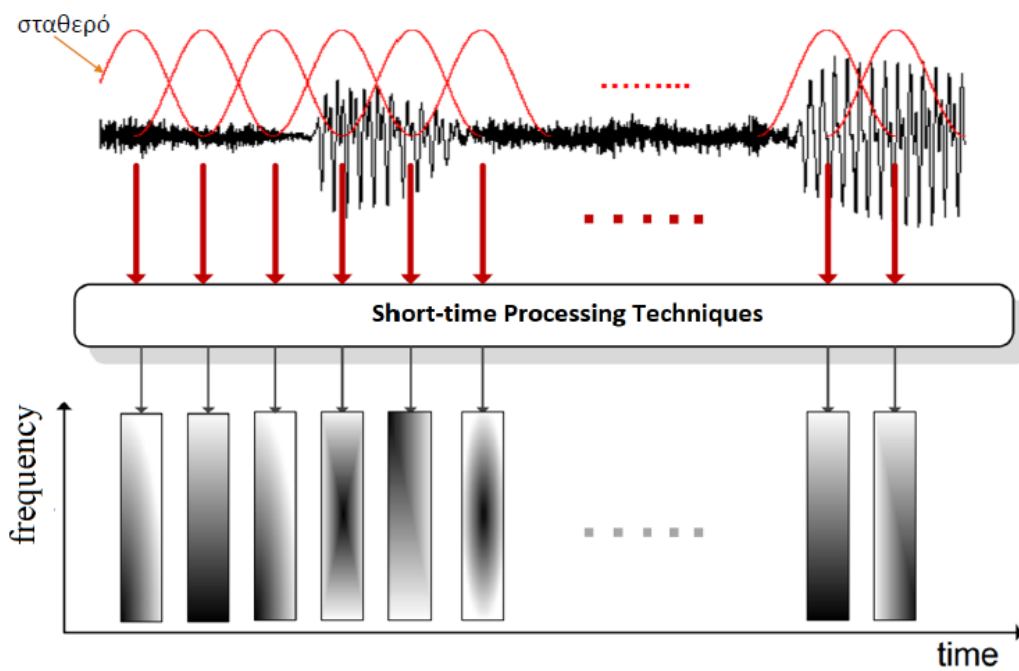
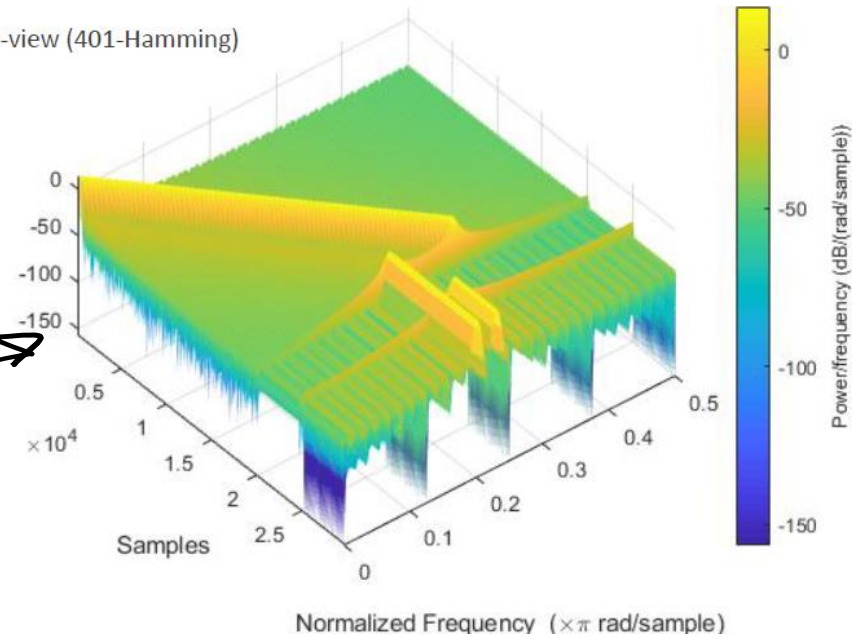


- Σχεδίαση ψηφιακών φίλτρων



- Μια γρήγορη ματιά...
- Φασματική Ανάλυση
- Short Time Fourier Transform

• 3D-view (401-Hamming)



HY370

- ...
- Εργαστηριακές ασκήσεις (πραγματικές mini-εφαρμογές)
- Θεωρητικές ασκήσεις
- Project (πραγματική εφαρμογή)
- Εξετάσεις προόδου
- Τελική εξέταση

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



# E.BA.

---

AM: 4256

AM: 3907