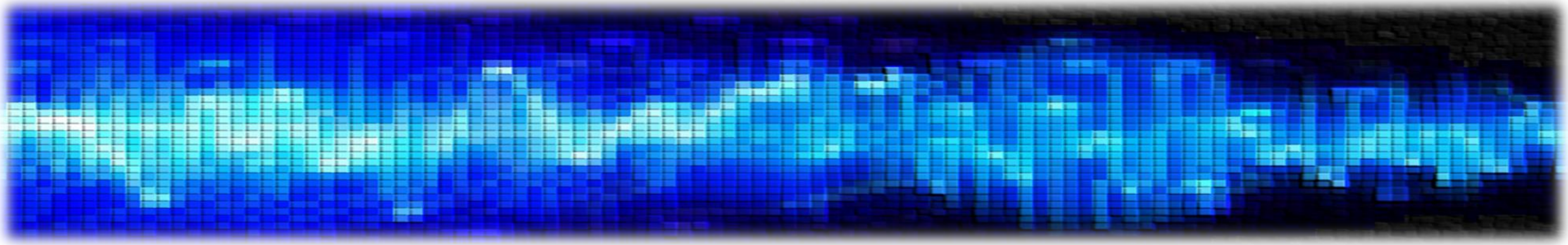
ΗΥ215 – Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 22^{Η}



- Δειγματοληψία
- Βασικά Σήματα Διακριτού Χρόνου και Ιδιότητες

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist***:

Ακριβής και τέλεια ανακατασκευή ενός σήματος συνεχούς χρόνου $x(t)$ από τα δείγματά του – Προϋποθέσεις:

1. Το σήμα συνεχούς χρόνου να έχει μετασχηματισμό Fourier $X(f)$ τέτοιο ώστε:

$$|X(f)| = 0, \qquad |f| > f_{max}$$

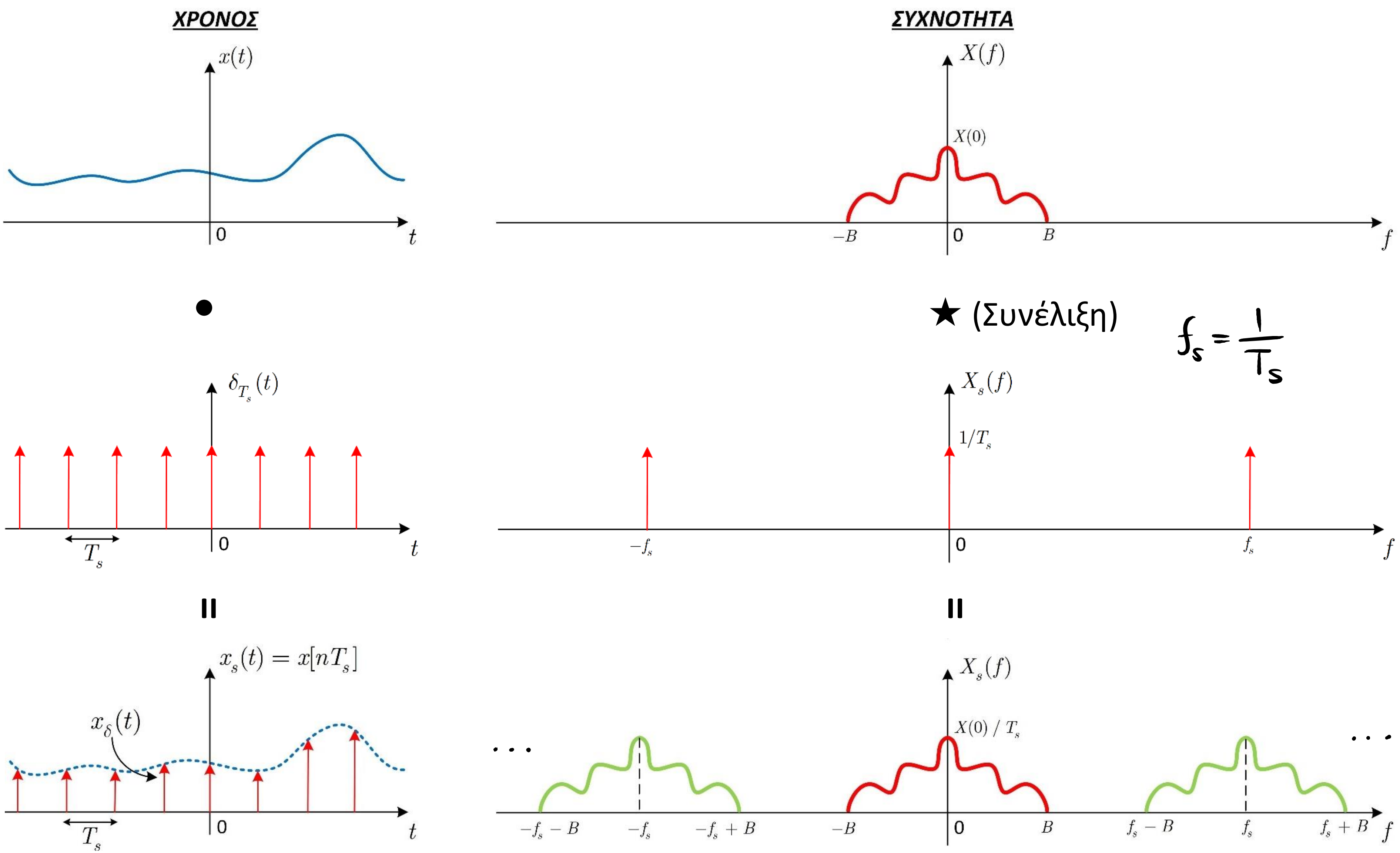
με f_{max} τη μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα του σήματος συνεχούς χρόνου

2. Η συχνότητα δειγματοληψίας f_s πρέπει να είναι (γνήσια) μεγαλύτερη από τη **διπλάσια** μέγιστη μη μηδενικού πλάτους συχνότητα f_{max}

$$f_s > 2f_{max}$$

- Η συχνότητα f_{max} ονομάζεται **συχνότητα Nyqu**ist και η συχνότητα $2f_{max}$ ονομάζεται **ρυθμός Nyquist**

- Η δειγματοληψία του σήματος συνεχούς χρόνου στο χρόνο δημιουργεί «αντίγραφα» του φάσματος $X(f)$ ανά f_s Hz στο πεδίο της συχνότητας


ΧΡΟΝΟΣ
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
x(t)
X(f)
X(0)
−B
B
0
t
f
★ (Συνέλιξη)
f_s = 1/T_s
δ_{T_s}(t)
X_s(f)
1/T_s
T_s
−f_s
f_s
x_s(t) = x[nT_s]
x_δ(t)
X(0) / T_s
−f_s − B
−f_s + B
f_s − B
f_s + B

- ***Θεώρημα Shannon-Nyquist***:

Πώς γίνεται η ανακατασκευή;

1. Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα $X_s(f)$ του δειγματοληπτημένου σήματος $x(nT_s)$ με ένα τετραγωνικό παράθυρο – ή αλλιώς, χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H_{lp}(f) = T_s \mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right)$$

δηλ.

$$X_{rec}(f) = X_s(f) H_{lp}(f) = X(f)$$

ώστε να απομονωθεί το «κεντρικό» φάσμα από τα «αντίγραφά» του

2. Η πράξη αυτή ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος $x(nT_s)$ του δειγματοληπτημένου σήματος με μετατοπισμένες συναρτήσεις $\mathrm{sinc}(.)$ και άθροισμα όλων των τελευταίων

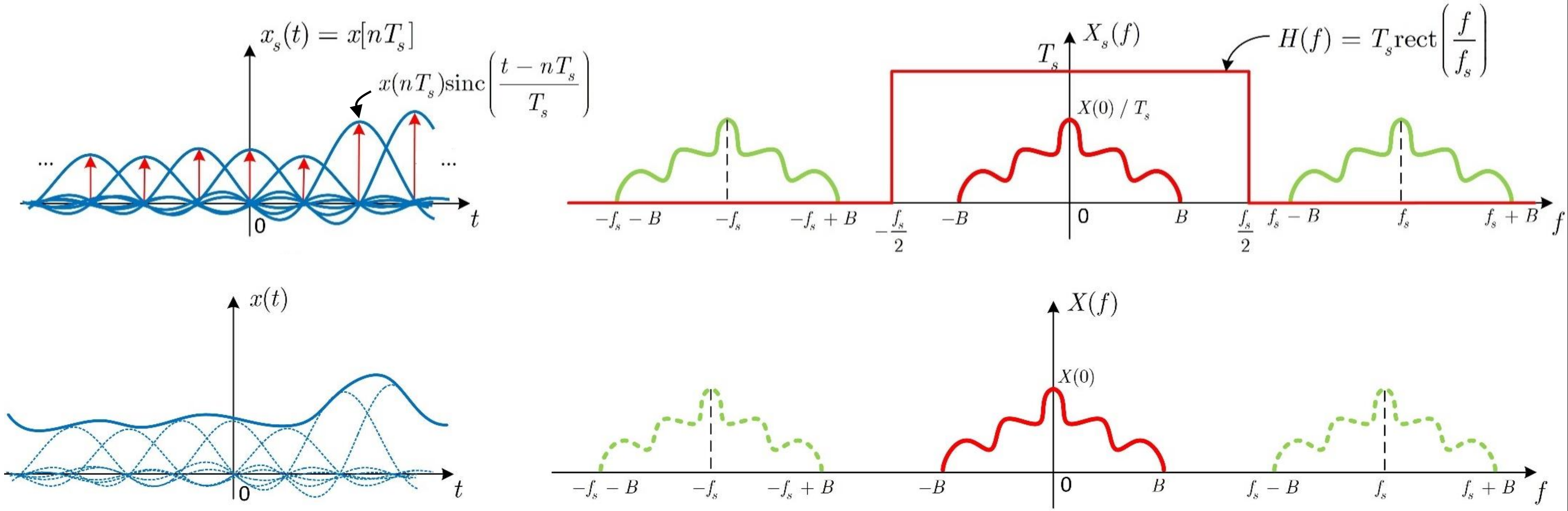
$$\underline{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s) \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right)} = x_s(t) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

- Δηλαδή:

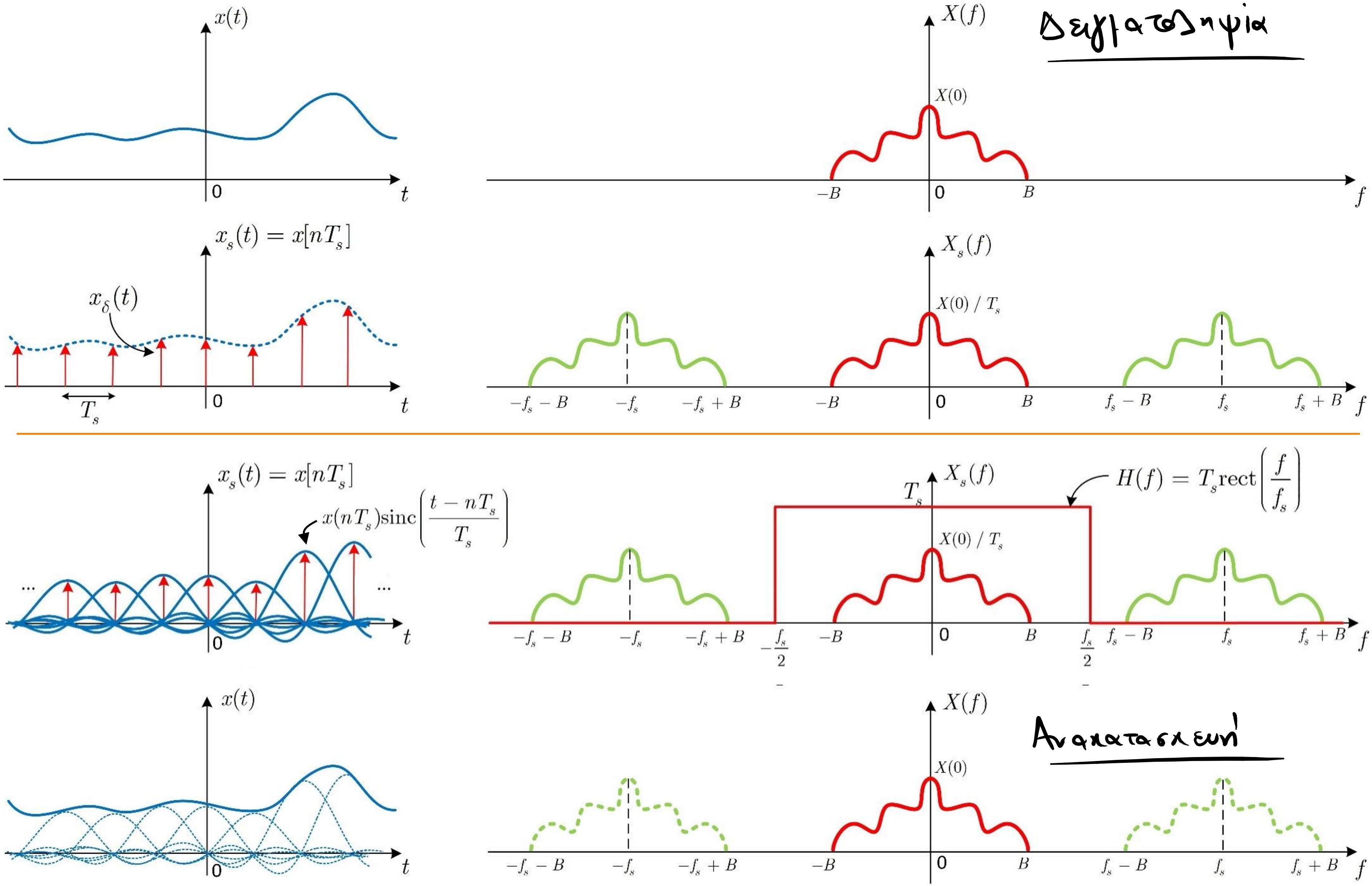
$$x_{rec}(t) = x_s(t) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right] * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right)$$



ΧΡΟΝΟΣ ***ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ***



- **Παράδειγμα**:
  - Έστω το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. Δειγματοληπτήστε το με συχνότητα δειγματοληψίας f_s και βρείτε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$.
    - Τι συμβαίνει αν $f_0 = 100$ Hz και $f_s = 4000$ Hz?
    - Τι συμβαίνει αν $f_0 = 100$ Hz και $f_s = 8000$ Hz?

Θέτουμε $t := nT_s = \frac{n}{f_s}$, οπότε $x_s(t) = x[n] = A\cos(2\pi f_0 n T_s) = A\cos\left(\frac{2\pi f_0 n}{f_s}\right)$

Συμβολίζουμε $\boxed{\frac{2\pi f_0}{f_s} = \omega_0}$ $\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$

Αν $f_0 = 100$ Hz, $f_s = 4$ kHz, $\omega_0 = \frac{2\pi 100}{4000} = \frac{\pi}{20}$ $\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$

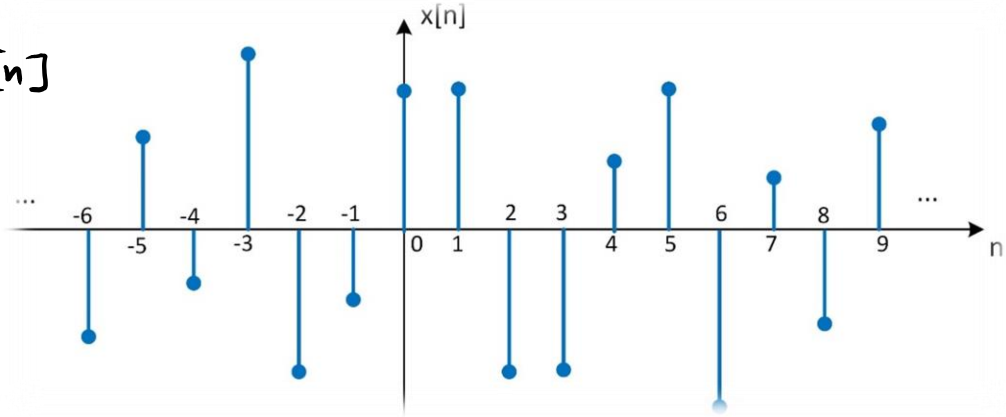
Άρα $x[n] = A\cos\left(\frac{\pi}{20}n\right)$, $-\infty < n < +\infty$, $n \in \mathbb{Z}$.

Αν $f_0 = 100$ Hz, $f_s = 8$ kHz, $\omega_0 = \frac{2\pi 100}{8000} = \frac{\pi}{40}$ $\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$

Άρα $x[n] = A\cos\left(\frac{\pi}{40}n\right)$, $-\infty < n < +\infty$, $n \in \mathbb{Z}$

Δεν προέρχονται **όλα** τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία κάποιων σημάτων συνεχούς χρόνου!

- **Σήμα διακριτού χρόνου**
- Μια ακολουθία τιμών a_n, x_n → $x[n]$
- Ορίζεται μόνο σε ακέραιες χρονικές στιγμές



- Εν γένει, μπορεί να είναι μιγαδικό

$$x[n] = a[n] + jb[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

$$= \mathrm{Re}\{x[n]\} + j\mathrm{Im}\{x[n]\}$$

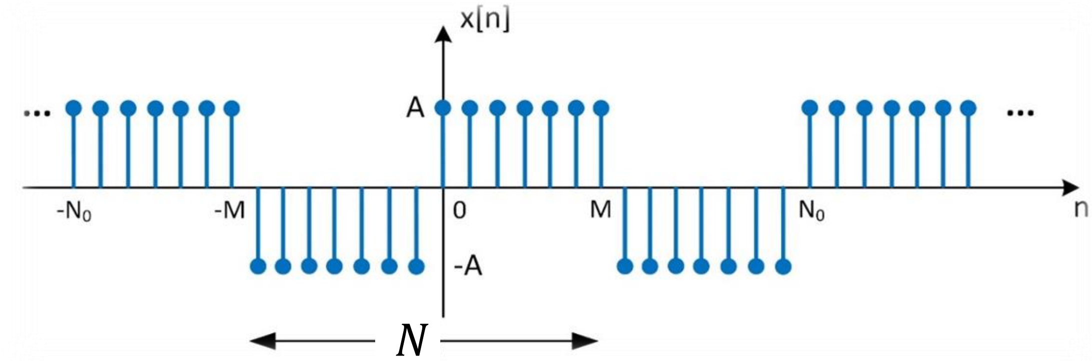
$$= |x[n]|\, e^{j\phi_x[n]}$$

- Αναπαράσταση μέτρου - φάσης

$$|x[n]| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{x[n]\} + \mathrm{Im}^2\{x[n]\}}$$

$$\phi_x[n] = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\{x[n]\}}{\mathrm{Re}\{x[n]\}} \in (-\pi, \pi]$$

- **Περιοδικά σήματα**



- Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν υπάρχει θετικός *ακέραιος* N τέτοιος ώστε

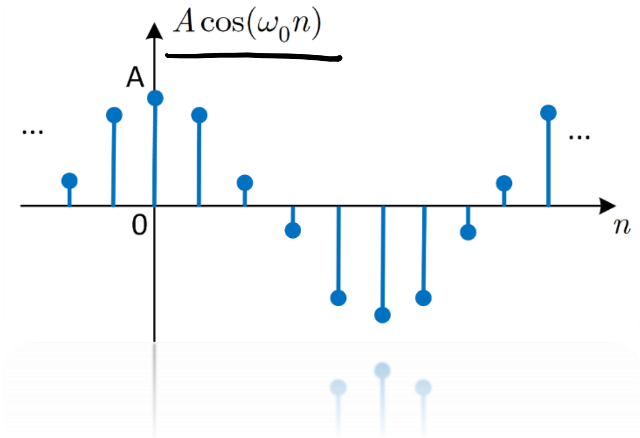
$$x[n] = x[n+N] \qquad \left(x(t) = x(t+T_0) \right)$$

- Ο μικρότερος αριθμός N που ικανοποιεί τη σχέση αυτή ονομάζεται ***περίοδος*** του σήματος.

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι αν $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$, με περιόδους N_1, N_2, τότε η περίοδος του σήματος $y[n]$ είναι

$$N_y = \frac{N_1 N_2}{\text{ΜΚΔ}(N_1, N_2)}$$

- **Ημίτονα**
- Περιοδικότητα στο χρόνο
- Είναι κάθε ημίτονο περιοδικό; (στο συνεχή χρόνο, ήταν!)
- Έστω ότι υπάρχει περίοδος N, τότε θα ικανοποιεί τη σχέση



$$x[n] = x[n+N]$$

- Άρα

$$A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0(n+N))$$
$$A\cos(\omega_0 n) = A\cos(\omega_0 n + \omega_0 N)$$

$\omega_0 N = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$

- Πρέπει να ισχύει

$$\omega_0 N = 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

δηλ.

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{k}{N} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2\pi k}{\omega_0},} \qquad N, k \in \mathbb{Z}$$

Θέλουμε το μικρότερο k που να δίνει ακέραιο N!

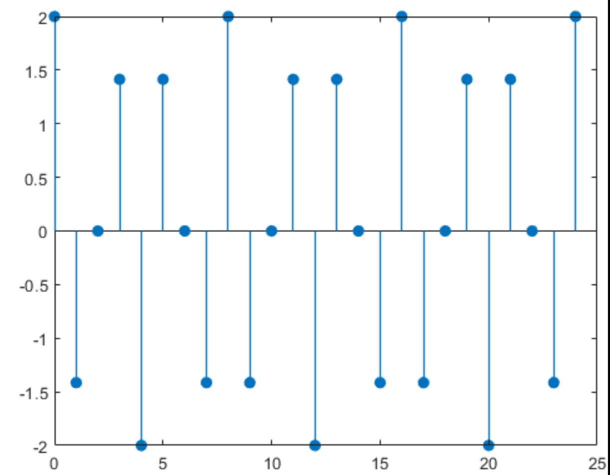
- **Ημίτονα**

- Παραδείγματα:

  ○ $x[n] = 2\cos\left(\overset{\omega_0}{\frac{3\pi}{4}}n\right)$

Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{8\pi k}{3\pi} = \frac{8k}{3}, \; k \in \mathbb{Z}$

Για $k=3$, $N=8$ δείγματα

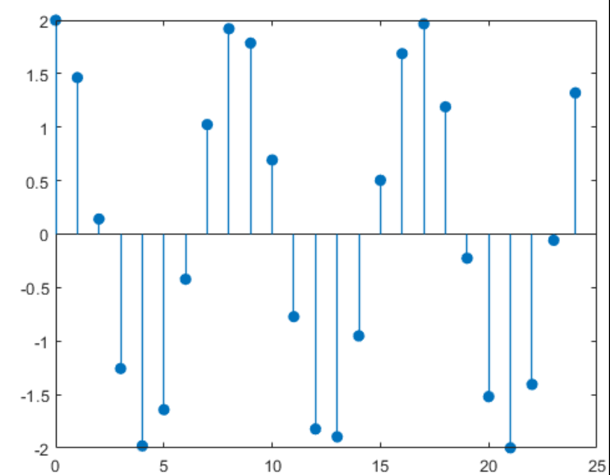


  ○ $x[n] = 2\cos\left(\overset{\omega_0}{\frac{3}{4}}n\right)$

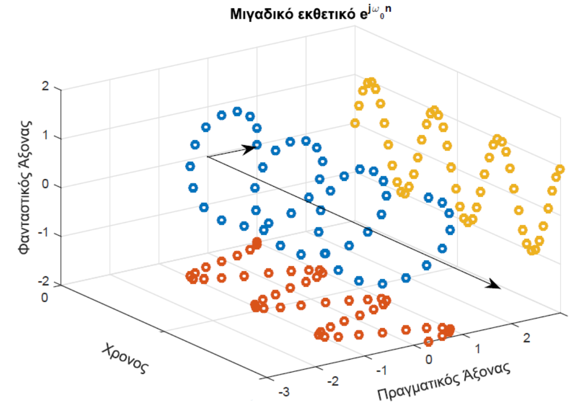
Είναι $N = \frac{2\pi k}{\omega_0} = \frac{2\pi k}{\frac{3}{4}} = \frac{8\pi k}{3}, \; k \in \mathbb{Z}$

Δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z} : N \in \mathbb{Z}$

Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό!



- **Ημίτονα**
- Περιοδικότητα στη συχνότητα
- Υπενθύμιση: Σχέσεις του Euler



$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \mathrm{Im}\{e^{j\theta}\} = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- Στο διακριτό χρόνο

$$e^{j(\omega_0 + r)n} = e^{j\omega_0 n} e^{jrn}$$

$e^{j2\pi k} \cdot e^{j\omega_0 n}$ 1

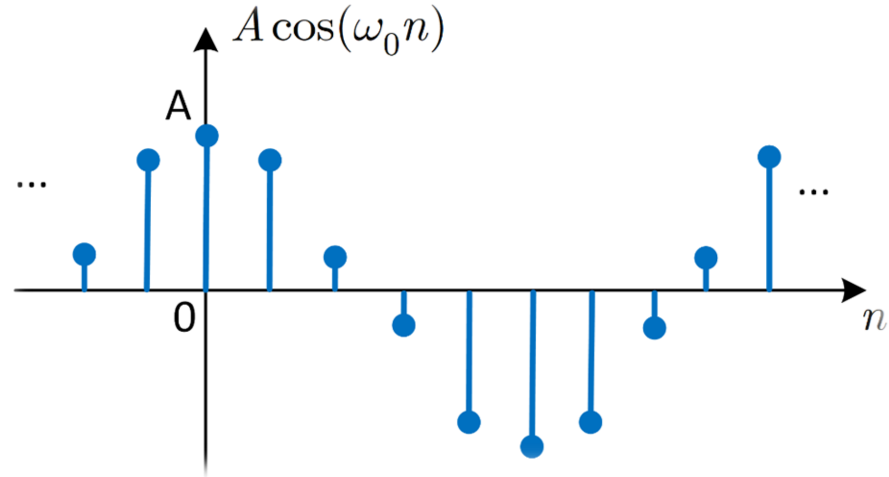
- Αν $r = 2\pi\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{Z}$, τότε

$k \in \mathbb{Z}$

$$e^{j(\omega_0 + r)n} = e^{j\omega_0 n} e^{jrn} = \underline{e^{j2\pi\lambda n} e^{j\omega_0 n}} = e^{j\omega_0 n} \quad (!!!!!!!!!)$$

- Άρα τα μιγαδικά εκθετικά σήματα είναι ΠΑΝΤΑ περιοδικά στο χώρο της συχνότητας με περίοδο (στη συχνότητα) ίση με 2π!!
  - Το ίδιο ισχύει και για τα ημιτονοειδή σήματα (από τη σχέση του Euler)!

- **Ημίτονα**
- Σύνοψη:



ΧΡΟΝΟΣ

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

Περιοδικό?
Εξαρτάται από το ω_0!

Περιοδικό?
Ναι, πάντα! (ανεξάρτητα από τη μορφή στο χρόνο) Η περίοδος είναι ίση με 2π

- **<u>Ημίτονα</u>**

- Αυτή η ιδιότητα της περιοδικότητας στη συχνότητα έχει μερικές ενδιαφέρουσες αντι-διαισθητικές προεκτάσεις

- Θα περίμενε κανείς όσο αυξάνεται η συχνότητα ενός ημιτόνου, τόσο γρηγορότερα αυτό να αλλάζει/ταλαντώνεται
  - Αυτό γνωρίζουμε από το συνεχή χρόνο και από την καθημερινή εμπειρία μας

$$\frac{6\pi - 2\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

- Όμως…

$$x_1[n] = 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\cos(2\pi k - \theta) = \cos(\theta)$$

$$x_2[n] = 4\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) = 4\cos\left(2\pi n - \frac{2\pi n}{3}\right)$$

$$= 4\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3} (!!!)$$

- Οι δυο διαφορετικές συχνότητες παράγουν το ίδιο σήμα!!!
  - Άρα εν τέλει είναι ίδιες!

- **Ημίτονα**

0

$\omega_0 = 0$

$x[n] = A$

$= A \cdot \cos(0n)$

$\omega_0 = \frac{\pi}{3}$

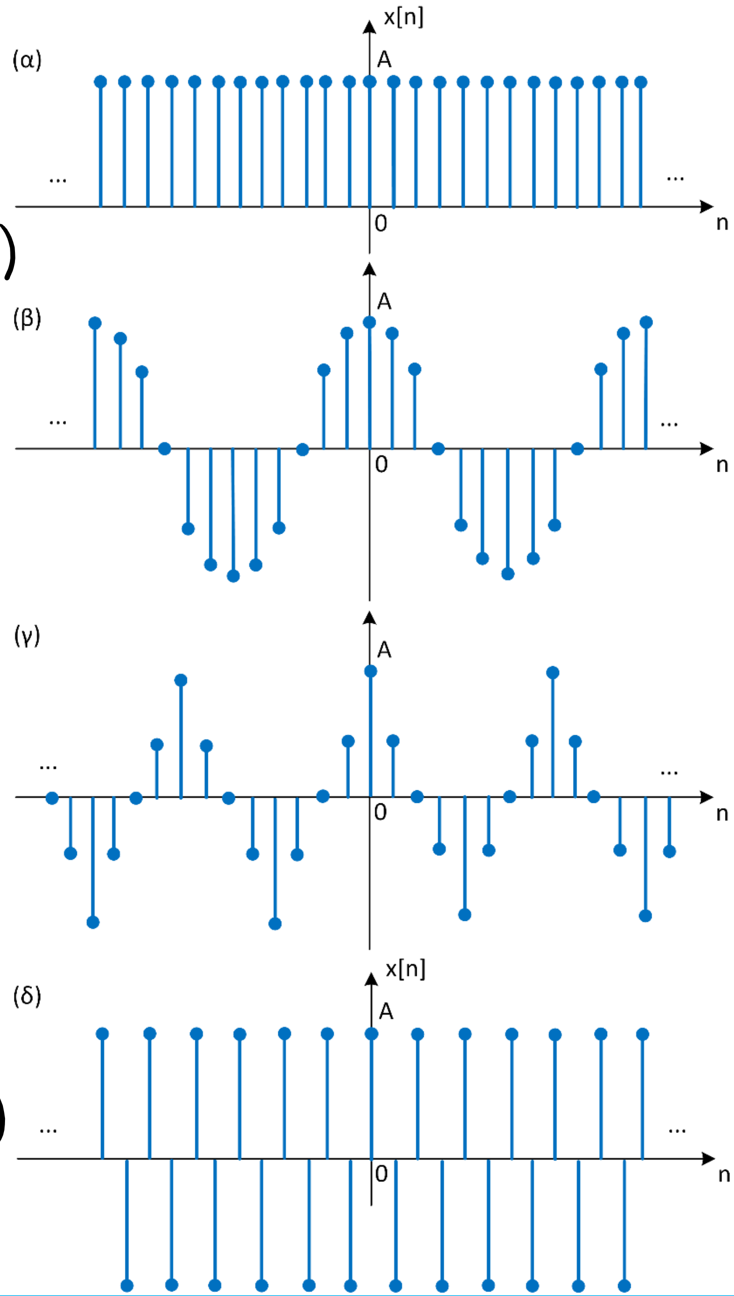
$\omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$\omega_0 = \pi$

$x[n] = A\cos(\pi n)$

$= A(-1)^n$

π



2π

$\omega_0 = 2\pi$

$\omega_0 = \frac{7\pi}{3}$

$\omega_0 = \frac{4\pi}{3}$

π

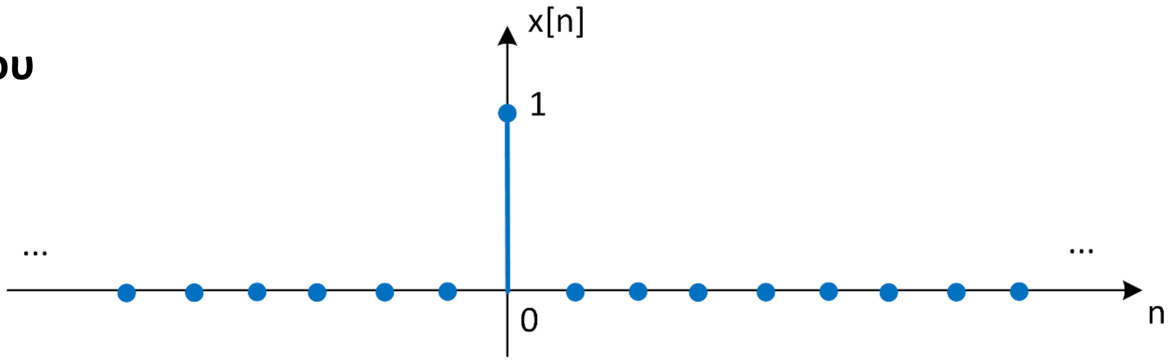
- Στο [0,π], η συχνότητα ταλάντωσης αυξάνεται όσο μεγαλώνει το ω_0
- Στο (π, 2π], η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται όσο μεγαλώνει το ω_0!!
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = 0 \rightarrow$ χαμηλές
- Συχνότητες γύρω από το $\omega = \pi \rightarrow$ υψηλές

Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- Στο συνεχή χρόνο, κυριαρχούσαν μοντέλα σημάτων όπως η βηματική συνάρτηση, η συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα, η εκθετική μιγαδική συνάρτηση, και άλλες.

- Ας δούμε ποια από αυτά υπάρχουν και στο διακριτό χρόνο και αν/πως αλλάζουν σε σχέση με αυτά που ξέρουμε

- **Συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου**



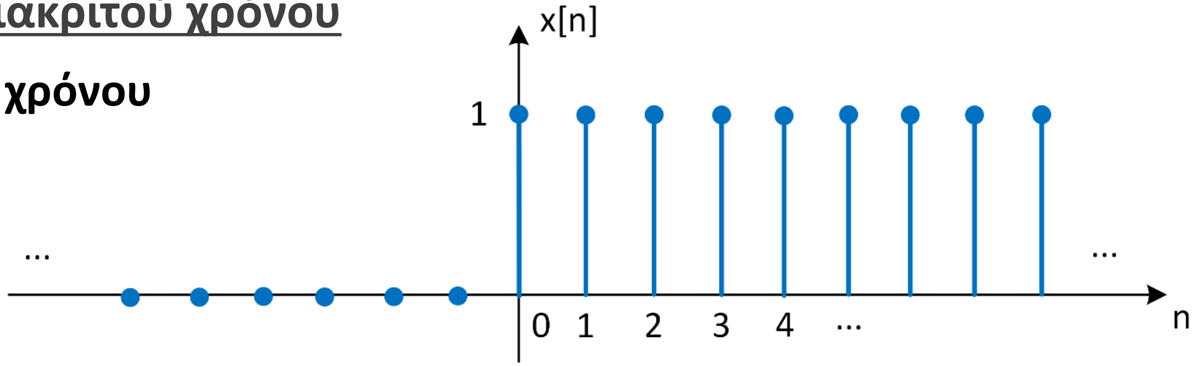
Ορισμός:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

- <u>Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου</u>
- **Βηματική Συνάρτηση διακριτού χρόνου**



Ορισμός:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- Συγκρίνετε με το συνεχή χρόνο:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

- Ιδιότητες:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \qquad u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau$$

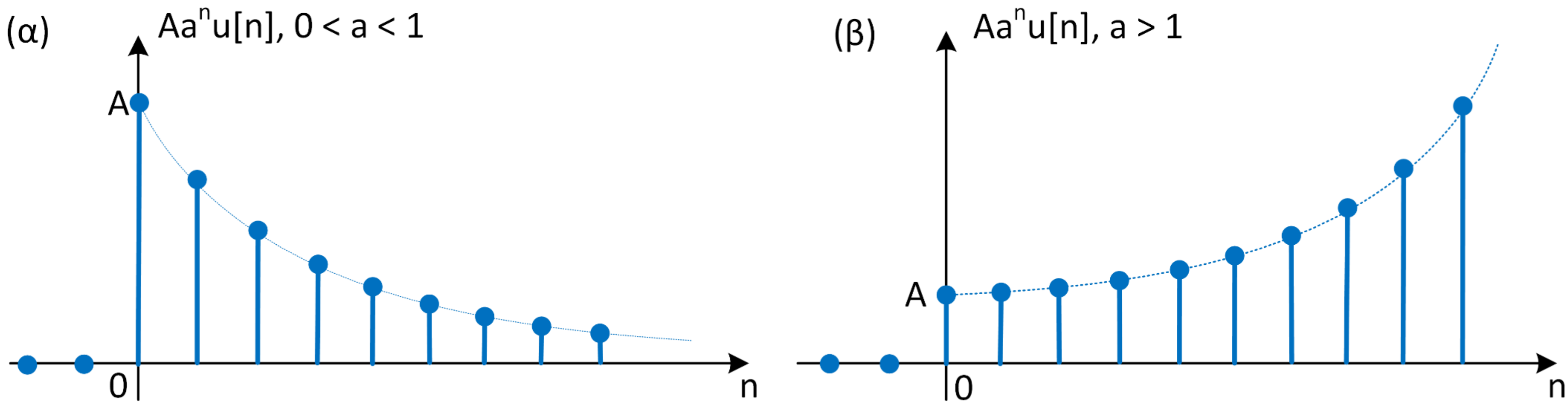
Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων διακριτού χρόνου

- **Εκθετική μιγαδική συνάρτηση διακριτού χρόνου**

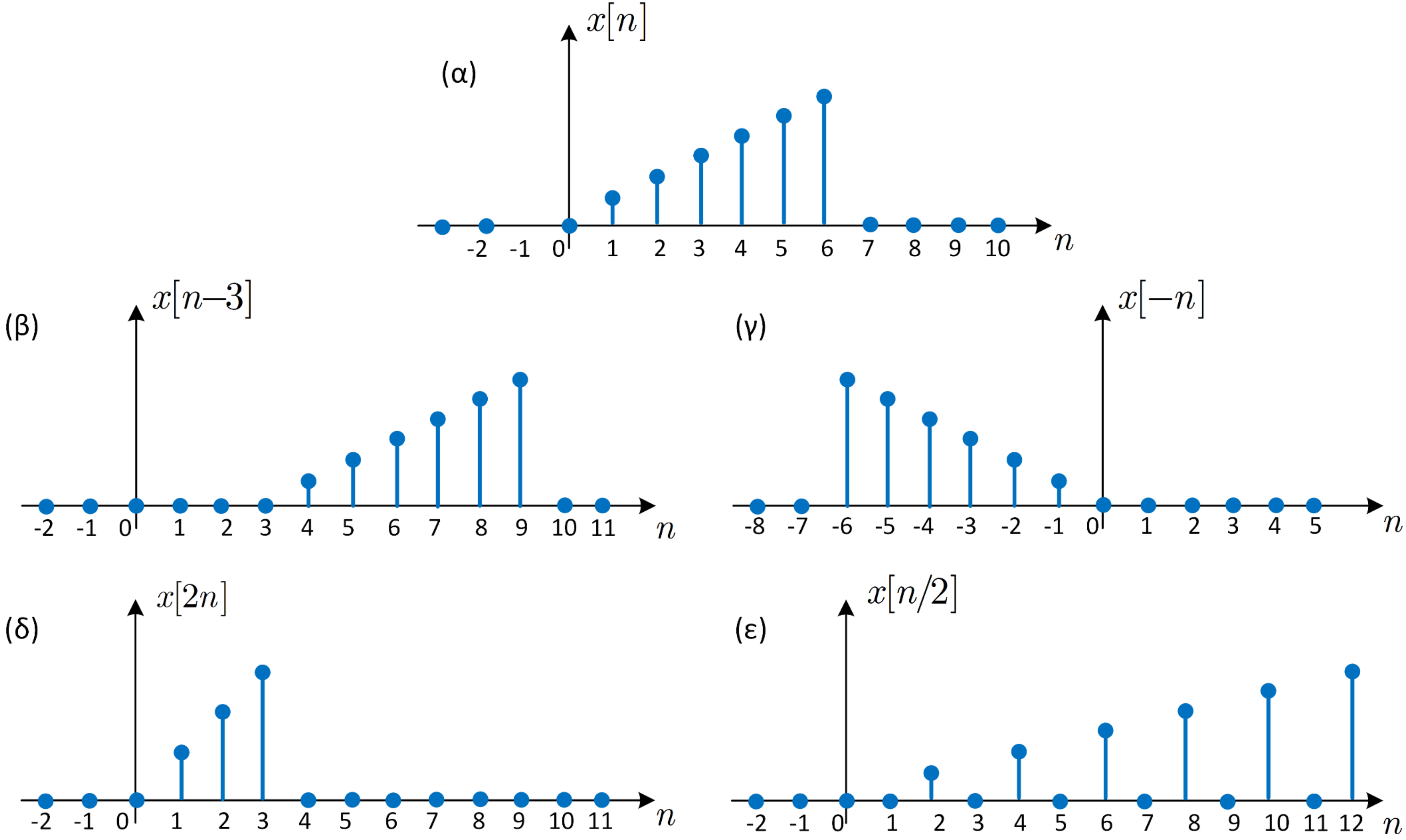
$$x[n] = a^n, \qquad a \in \mathbb{C}$$

- Περισσότερο χρήσιμες είναι οι «εκδόσεις» γινομένου με τη βηματική συνάρτηση

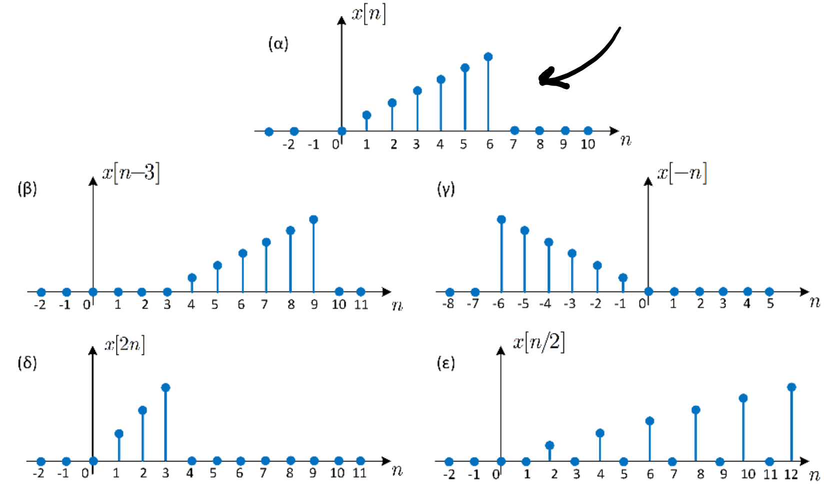
$$x[n] = a^n u[n], \ 0 < |a| < 1 \text{ ή } |a| > 1$$



• Μετασχηματισμοί σημάτων



- **Μετασχηματισμοί σημάτων**



(α) $x[n] = \begin{cases} n, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(β) $x[n-3] = \begin{cases} n-3, & 0 \le n-3 \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$= \begin{cases} n-3, & 3 \le n \le 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(γ) $x[-n] = \begin{cases} -n, & 0 \le -n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -n, & -6 \le n \le 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(δ) $x[2n] = \begin{cases} 2n, & 0 \le 2n \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 2n, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(ε) $x\left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & 0 \le \frac{n}{2} \le 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

- **Ανάλυση σήματος**

- Κάθε σήμα διακριτού χρόνο ν μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Παρατηρήστε ότι κάθε συνάρτηση Δέλτα έχει πλάτος την αντίστοιχη τιμή του σήματος $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n = k$

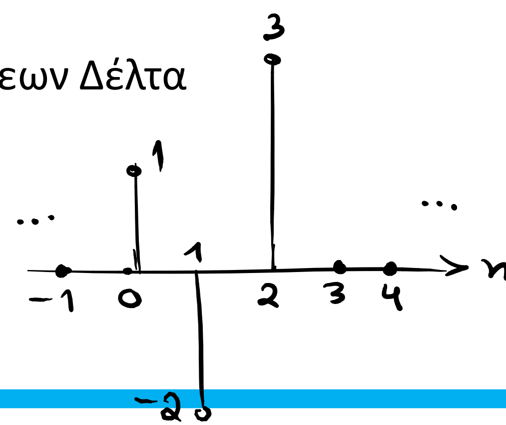
- Σκεφτείτε το ανάλογο του συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

- Παράδειγμα:

  ○ Γράψτε το σήμα $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ με χρήση συναρτήσεων Δέλτα

$$x[n] = 1 \cdot \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2]$$



Ενέργεια και Μέση Ισχύς σήματος

- Χρειαζόμαστε μια μετρική που να απεικονίζει το «μέγεθος» ενός σήματος
- Μια τέτοια είναι η **ενέργεια** ενός σήματος

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad \left(E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right)$$

- Σήματα για τα οποία $0 < E < +\infty$ ονομάζονται **σήματα ενέργειας**
  - **Όλα** τα σήματα στη φύση ή στο εργαστήριο είναι σήματα ενέργειας
- Κάποια ενδιαφέροντα σήματα (από θεωρητικής πλευράς) έχουν άπειρη ενέργεια
- Μια πιο κατάλληλη μετρική είναι η **μέση ισχύς** ενός σήματος

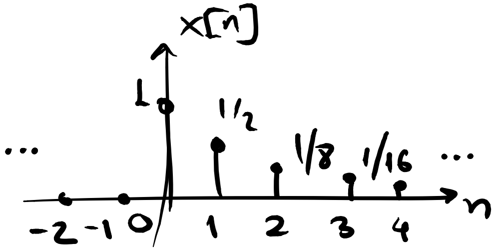
$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \quad \left(P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \right)$$

- Ένα σήμα είναι ενέργειας, ισχύος, ή τίποτε από τα δυο!

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**
- Hints:
- Σήμα με:
  - Πεπερασμένη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$ → **πιθανότατα σήμα ενέργειας**
  - Άπειρη διάρκεια και πεπερασμένο πλάτος που **δε** φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$ → **σήμα ισχύος**
  - **Περιοδικό** σήμα με πεπερασμένο πλάτος → **σήμα ισχύος**

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Παραδείγματα:
  - Υπολογίστε την ενέργεια του σήματος $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$



Είναι

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} u^2[n], \quad u^2[n] = u[n] = 1,\ n \geq 0$$

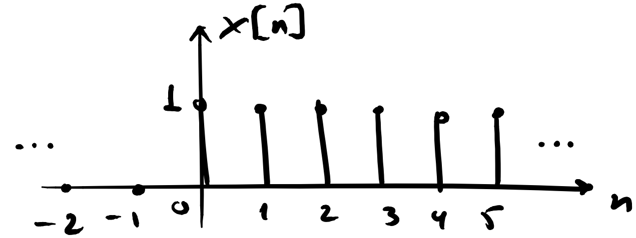
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Άρα $E_x = \frac{4}{3}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad |a|<1$$

- **Ενέργεια και Ισχύς σήματος**

- Παραδείγματα:
  - Υπολογίστε τη μέση ισχύ του σήματος $x[n] = u[n]$



Είναι

$$P_x = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u^2[n], \quad u[n]=1,\ n\geq 0$$

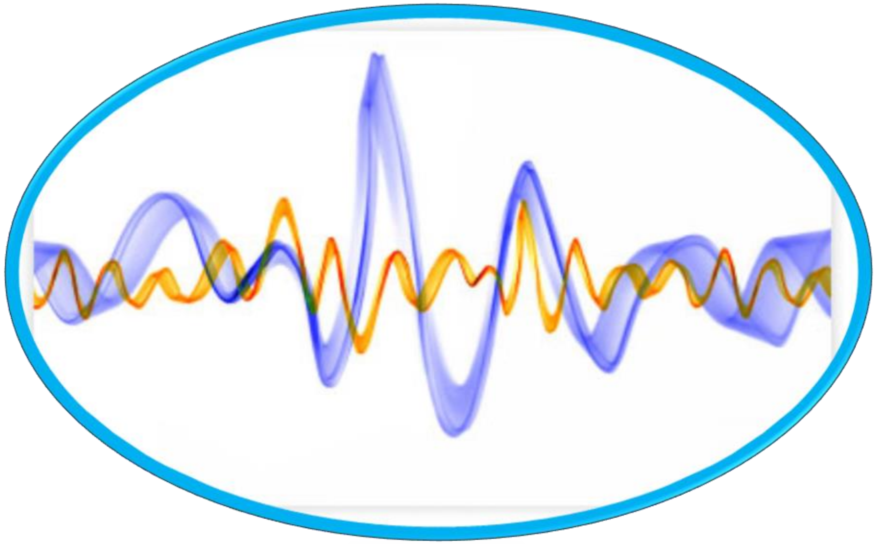
$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \cdot 1 = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} (N-0+1)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{\cancel{N}(1+\frac{1}{N})}{\cancel{N}(2+\frac{1}{N})} = \frac{1}{2}$$

Άρα $P_x = \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} c = (N_2 - N_1 + 1)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 4256

AM: 3574