ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 21Η

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις (review…)**
- **Περιοδική Συσχέτιση**

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ενέργειας**

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt\,, \qquad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων
- Θα λάβουμε ιδιαίτερη βοήθεια σχετικά με τα σήματα ισχύος που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  - Εξίσου σημαντικές είναι όμως και για τα σήματα ενέργειας
- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι φασματικές πυκνότητες σχετίζονται με τους *μετασχηματισμούς Fourier* των σημάτων
- Ας ξεκινήσουμε με τα τελευταία (σήματα ενέργειας)
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την ***κατανομή*** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Είναι

$$F\{\phi_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left(X(f) e^{j2\pi f t} \right) dt$$

$$= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi f t} dt = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2$$

- Άρα ο μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ισούται με $|X(f)|^2$

$$\boxed{\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2}$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος
- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \qquad x(t) \in \Re$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \qquad \forall\, f$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε $\tau = 0$, παίρνουμε

$$\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Parseval

- Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x}$$

- **Βλέπουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας**

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\left.\begin{aligned}\phi_{xy}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f) \\ \phi_{yx}(\tau) &\leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)\end{aligned}\right\} \Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

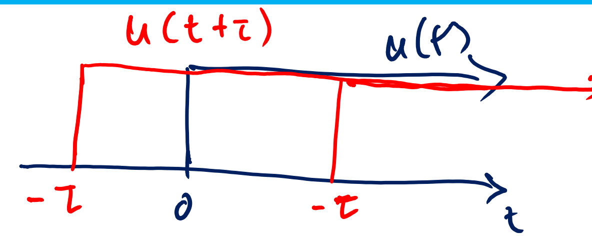
- Παρατηρήστε ότι αφού

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$$

ισχύει ότι

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier



- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση $\phi_{xy}(\tau)$ των σημάτων

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad y(t) = e^{-2at}u(t), \qquad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους, $\Phi_{xy}(f)$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t+\tau)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-2a(t+\tau)} u(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a\tau} \cdot e^{-3at} u(t)\, u(t+\tau)\, dt$$

$u(t) = 1, \quad t > 0$

$u(t+\tau) = 1 \quad t+\tau > 0 \Rightarrow t > -\tau$

$* \ -\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0: \quad \varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at}\, dt$

$* \ -\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0: \quad \varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau} \int_{0}^{+\infty} e^{-3at}\, dt$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$\underline{a>0}$

- Παράδειγμα:

$\underline{\tau<0}$: $\quad \varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau}\int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at}\,dt = e^{-2a\tau}\frac{1}{-3a}\, e^{-3at}\Big|_{-\tau}^{\infty} =$

$$= -\frac{1}{3a}e^{-2a\tau}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-3at} - e^{3a\tau}\right) = \frac{1}{3a}e^{a\tau}\,u(-\tau)$$

$\underline{\tau>0}$: $\quad \varphi_{xy}(\tau) = e^{-2a\tau}\int_{0}^{\infty} e^{-3at}\,dt = e^{-2a\tau}\frac{1}{-3a}\, e^{-3at}\Big|_{0}^{\infty} =$

$$= -\frac{1}{3a}e^{-2a\tau}(-1) = \frac{1}{3a}e^{-2a\tau}\,u(\tau)$$

$\underline{\text{Επομένως:}}$

$$\boxed{\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{a\tau}\,u(-\tau) + e^{-2a\tau}\,u(\tau)\right)}$$

$$\Phi_{xy}(f) = \mathcal{F}\{\varphi_{xy}(\tau)\} = X^*(f)\,Y(f)$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Παράδειγμα:

$$x(t) = \underset{a>0}{e^{-at}} u(t) \xrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$y(t) = \underset{a>0}{e^{-2at}} u(t) \xrightarrow{F} Y(f) = \frac{1}{2a+j2\pi f}$$

$$\boxed{\Phi_{xy}(f) = X^*(f) \cdot Y(f)} = \frac{1}{a-j2\pi f} \cdot \frac{1}{2a+j2\pi f} = \frac{A}{a-j2\pi f} + \frac{B}{2a+j2\pi f}$$

$$A = \left.\frac{1}{2a+j2\pi f}\right|_{j2\pi f = a} = \frac{1}{3a}, \quad B = \left.\frac{1}{a-j2\pi f}\right|_{j2\pi f = -2a} = \frac{1}{3a}$$

$$\boxed{\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a}\left(\frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{2a+j2\pi f}\right)} \xrightarrow{F^{-1}} \varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a}\left(e^{+a\tau}u(-\tau) + e^{-2a\tau}u(\tau)\right)$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα
- Για τα περιοδικά σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων
  - Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση
- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

Parseval ξανά!:

$$\phi_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι

$$\boxed{\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)} = F\{\phi_x(\tau)\}$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές $|X_k|^2$ μπορούν να προκύψουν δειγματοληπτώντας τη φασματική πυκνότητα *ενέργειας* **μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος, δηλ.

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \boxed{\Phi_x(f, T_0)}\Big|_{f=kf_0} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

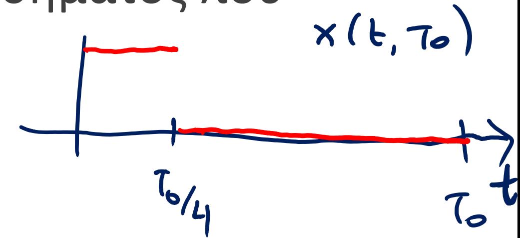
x(t, T0)
μόνο μια
περίοδο

- **Φασματικές Πυκνότητες**

$$\Phi_x(f,T_0) = |X(f,T_0)|^2$$

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως



$$\boxed{x(t,T_0)} = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$$

$$x(t,T_0) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0/8}{T_0/4}\right) \xrightarrow{F} X(f,T_0) = \frac{T_0}{4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}\cdot f\right) e^{-j2\pi f\frac{T_0}{8}}.$$

$$\Phi_x(f,T_0) = \left(\frac{T_0}{4}\right)^2 \left|\mathrm{sinc}\left(\frac{T_0}{4}f\right)\right|^2 = \frac{T_0^2}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T_0}{4}f\right) \qquad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2}\,\Phi_x(f,T_0)\Big|_{f=kf_0} = \frac{1}{\cancel{T_0^2}}\,\frac{\cancel{T_0^2}}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k\cancel{f_0}\cdot\cancel{T_0}}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)$$

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2\cdot\delta(f - kf_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{16}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)\delta(f - kf_0)$$

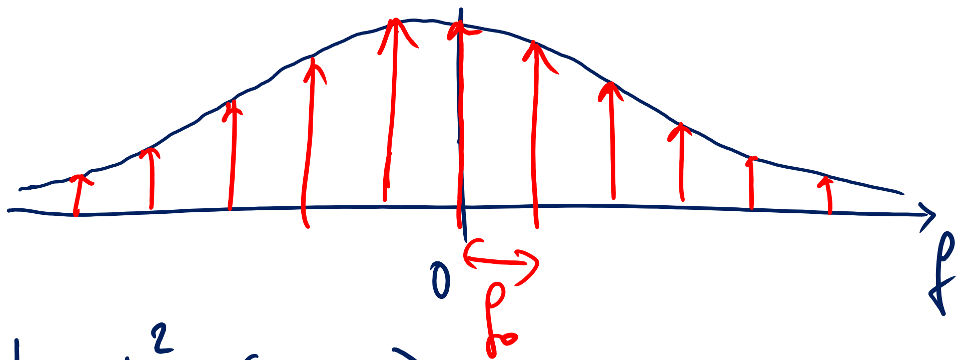
- **Φασματικές Πυκνότητες**

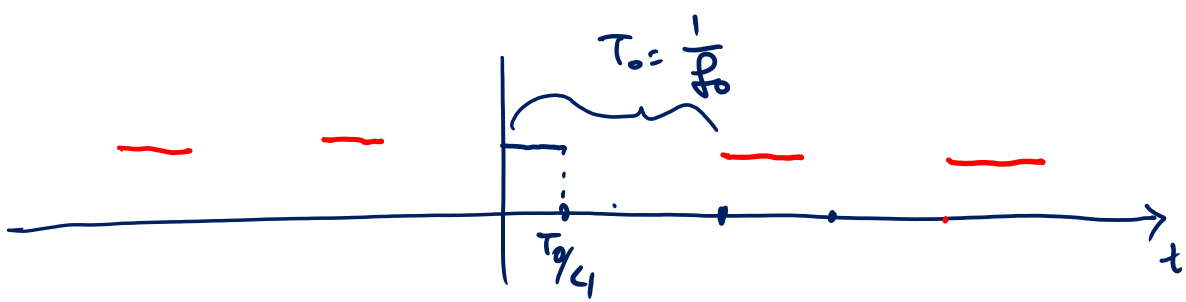
- Παράδειγμα:

$$\Phi_x(f, T_0)$$

$$\downarrow$$

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$





- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα
- Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος αποτελεί το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο περιοδικών σημάτων

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

με

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι φασματικές πυκνότητες μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων
- Για απεριοδικά σήματα ισχύος, κάτι τέτοιο δεν ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για σήματα ισχύος ισχύει η σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2$$

με

$$X(f,T) = F\left\{x(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

δηλ. το μετασχ. Fourier ενός τμήματος του σήματος ισχύος, διάρκειας T

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να μην υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η μελέτη των σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους
  - …και όχι μέσω του μετασχ. Fourier των ίδιων των σημάτων ισχύος

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- **Παράδειγμα:**

○ Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος $x(t) = u(t)$

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2} \quad \forall \tau$$

$$\Phi_x(f) = \mathcal{F}\{\varphi_x(\tau)\} = \frac{1}{2}\delta(f)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h(t)$ και την απόκριση συχνότητας $H(f)$, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t) = h(t) * x(t)$

- Θα συμβολίζουμε με $\phi_x(\tau), \phi_y(\tau)$ τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με $\Phi_x(f), \Phi_y(f)$ τις αντίστοιχες πυκνότητες

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Ξέρουμε ότι

$$\phi_y(\tau) = y(\tau) * y(-\tau)$$

$$= \big(x(\tau) * h(\tau)\big) * \big(x(-\tau) * h(-\tau)\big)$$

$$= \big(x(\tau) * x(-\tau)\big) * \big(h(\tau) * h(-\tau)\big)$$

$$= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\boxed{\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)}$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**
- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για σήματα ενέργειας:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2$$

όπως αναμενόταν

- Για περιοδικά σήματα:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2\, \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2\, \delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2|H(kf_0)|^2\, \delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

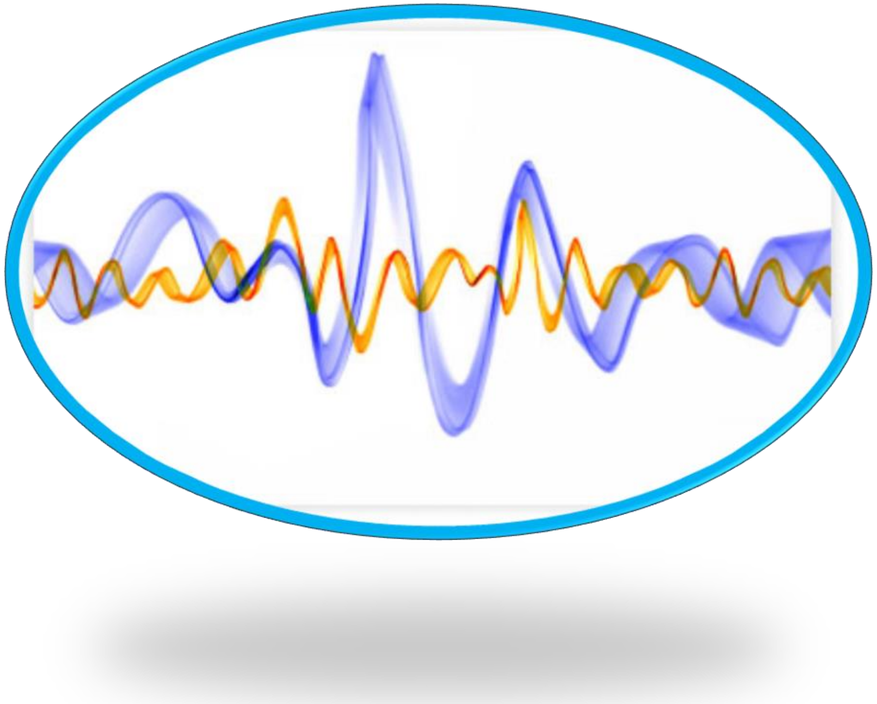
- Για σήματα ισχύος:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

μια και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 4256

AM: 4220