# HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

## ΔΙΑΛΕΞΗ 20Η

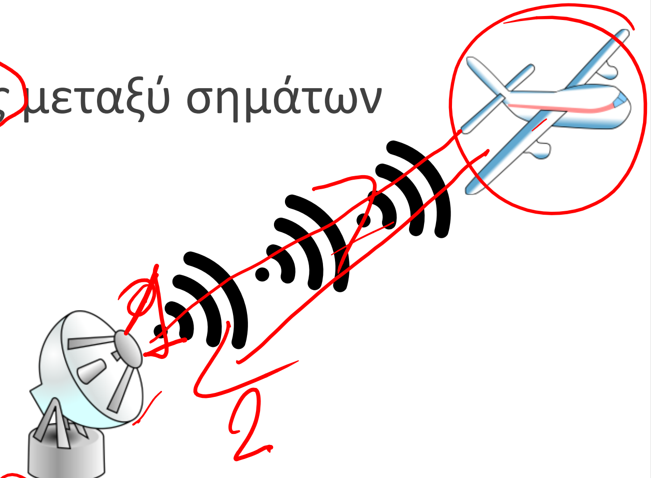
- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες

- **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες**

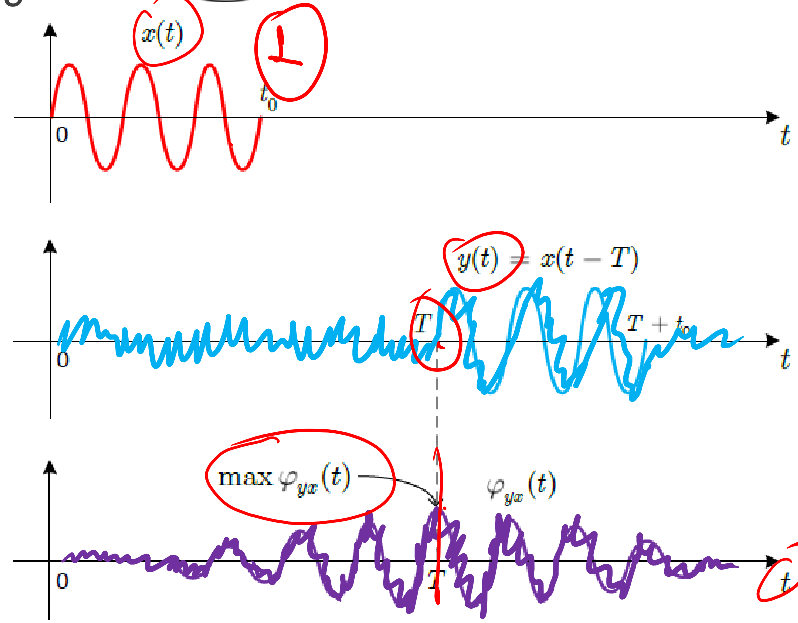
- Ως τώρα μελετήσαμε σήματα και την επίδραση των συστημάτων επάνω τους
  - Μελετήσαμε *μεμονωμένα* σήματα και συστήματα

- Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε και τις *ομοιότητες* μεταξύ σημάτων

- Παράδειγμα εφαρμογής
  - Ανίχνευση απόστασης στόχου

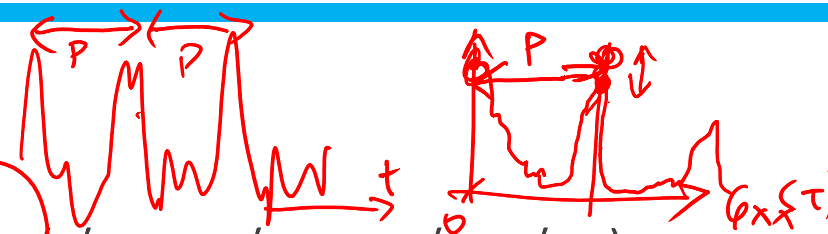



- Έννοια της ***συσχέτισης***
  - Το ανακλώμενο σήμα πρέπει να συσχετιστεί με το εκπεμφθέν για βρεθεί τόσο η παρουσία ενός στόχου όσο και η απόστασή του από τη θέση αναφοράς
  - Βρίσκει την ***ομοιότητα*** των δυο σημάτων στο πεδίο του χρόνου




- Έννοια της ***φασματικής πυκνότητας***
  - Αποτελεί την εικόνα των συσχετίσεων στο χώρο του Fourier
  - Δείχνει την ***κατανομή της ενέργειας ή ισχύος ενός σήματος ή την από κοινού κατανομή δυο σημάτων*** ανά συχνότητα

- **Συσχετίσεις**




- **Αυτοσυσχέτιση και Ετεροσυσχέτιση**

- Η αυτοσυσχέτιση συσχετίζει ένα σήμα (περιοδικό ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *με τον εαυτό του*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα του σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» (καθυστερήσεις) του εαυτού του
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»

- Η ετεροσυσχέτιση συσχετίζει δυο σήματα (περιοδικά ή μη, ενέργειας ή ισχύος) *μεταξύ τους*
  - Συνάρτηση του χρόνου (μετατόπισης) που εκφράζει την ομοιότητα ενός σήματος σε σχέση με μετατοπισμένες «εκδόσεις» ενός άλλου σήματος
  - Η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή εκεί που η ομοιότητα είναι «μέγιστη»

- Είναι βολικό να μελετήσουμε τις συσχετίσεις ανάλογα με το είδος του σήματος

- [x] Περιοδικά σήματα
- [ ] Σήματα ισχύος
- [ ] Σήματα ενέργειας

- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Αυτοσυσχέτιση**

$x(t) = x(t+T_0)$

- Ορισμός:

$$\phi_x(\tau) = \boxed{\frac{1}{T_0}} \int_{T_0} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \boxed{X_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

αρμονικές

$X_k = |X_k| \cdot e^{j\angle X_k}$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

$\varphi_x(\tau) = \varphi_x(\tau + T_0)$

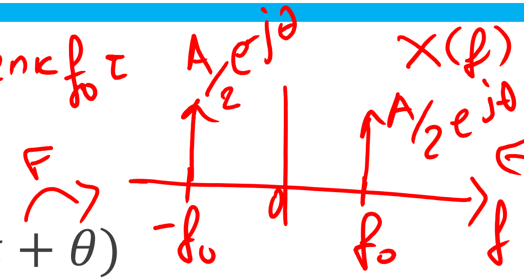
Δεν έχουμε φάση

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- «Τυφλή» ως προς την αρχική φάση του περιοδικού σήματος

- **Συσχετίσεις**
- Παράδειγμα:

○ Βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

$$\varphi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \cdot e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

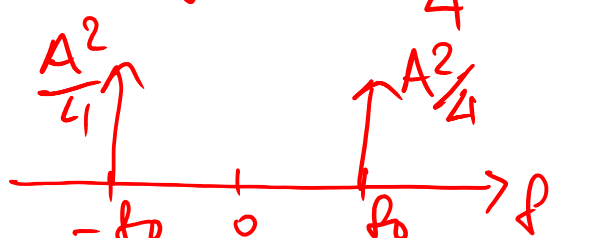



$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \underbrace{\frac{A}{2} e^{j\theta}}_{X_1} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \underbrace{\frac{A}{2} e^{-j\theta}}_{X_1^* = X_{-1}} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

Άρα

$$\varphi_x(\tau) = \left(\frac{A}{2}\right)^2 e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{A}{2}\right)^2 e^{-j2\pi f_0 t} = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0)$$



- **Συσχετίσεις**

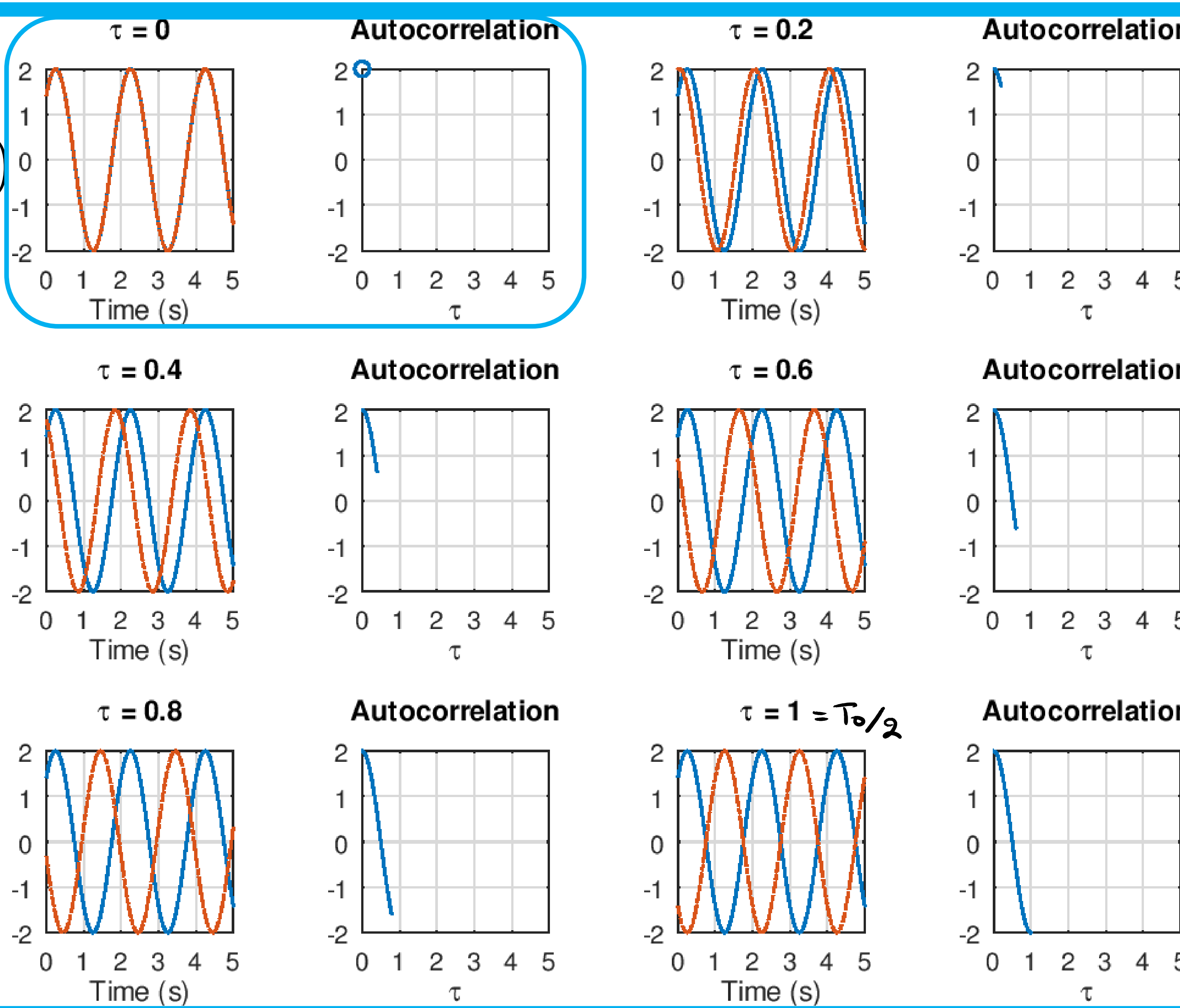
$$x(t) = 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$\downarrow$

$T_0 = 2$ sec

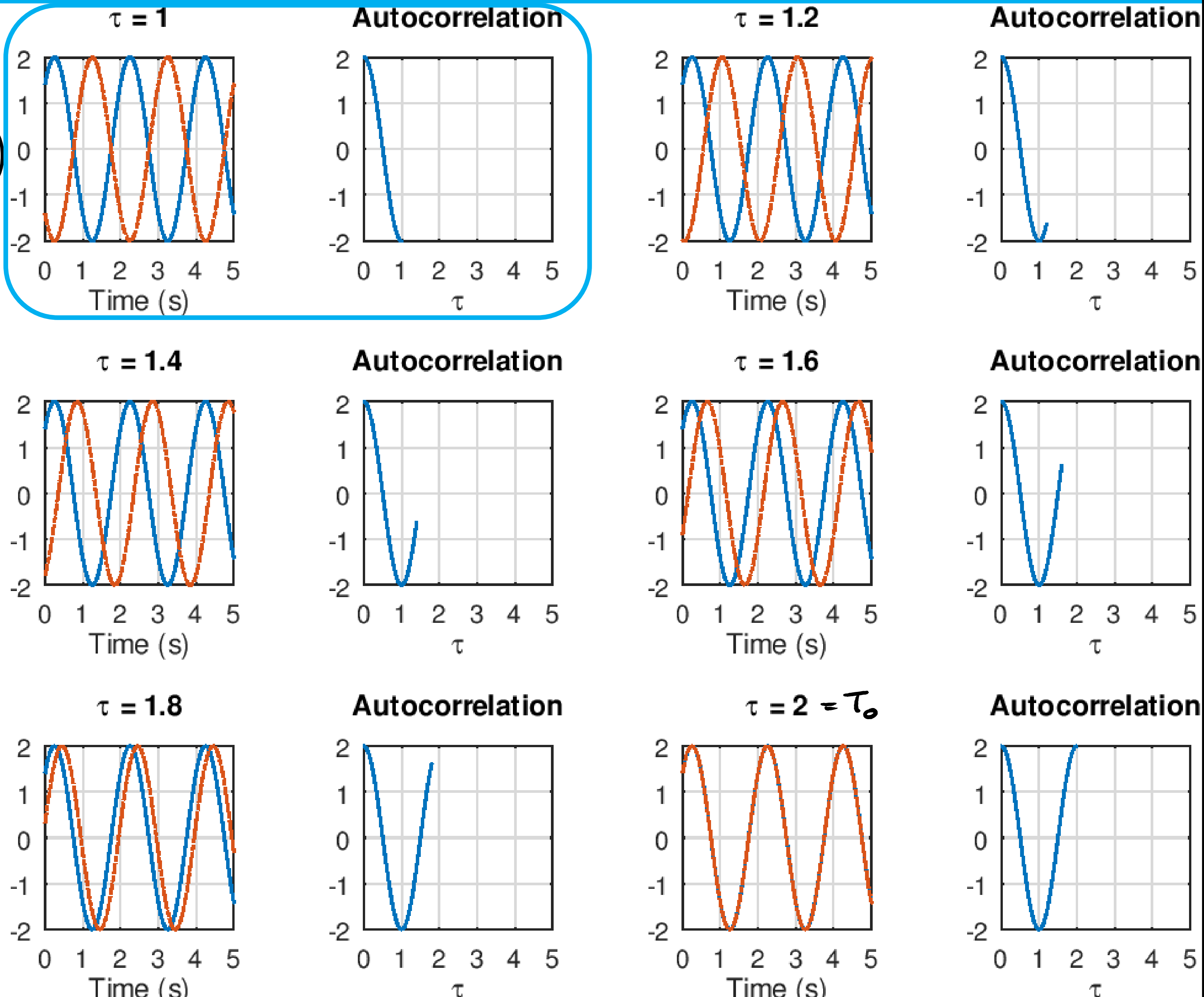
$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}$

$A = 2$



- **Συσχετίσεις**

$x(t)$
$= 2\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$



- **Συσχετίσεις**
- **Περιοδική Ετεροσυσχέτιση**

$x(t) = x(t+T_0)$
$y(t) = y(t+T_0)$

- Ορισμός:

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Γνωρίζουμε το ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier ενός σήματος ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad , \quad y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l e^{j2\pi l f_0 t}$$

- Αντικαθιστώντας και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στις σχέσεις

$$\phi_{xy}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{X_k^* Y_k}_{\Phi^{xy}_k} e^{j2\pi k f_0 \tau} \quad , \quad \phi_{yx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{X_k Y_k^*}_{\Phi^{yx}_k} e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

$\Phi^{xy}_k = (\Phi^{yx}_k)^*$

- Περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο!
- Προφανώς αν $y(t) = x(t)$ παίρνουμε τις σχέσεις της αυτοσυσχέτισης

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ενέργειας**

$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)\,x(t+\tau)\,dt$ Αν $x(t) = x(t+T_0)$

- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad , \qquad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Είναι εμφανές ότι ο ορισμός της συσχέτισης για σήματα ενέργειας μοιάζει πολύ με τον ορισμό της συνέλιξης:

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(\tau - t)dt = x(\tau) * y(\tau)$$

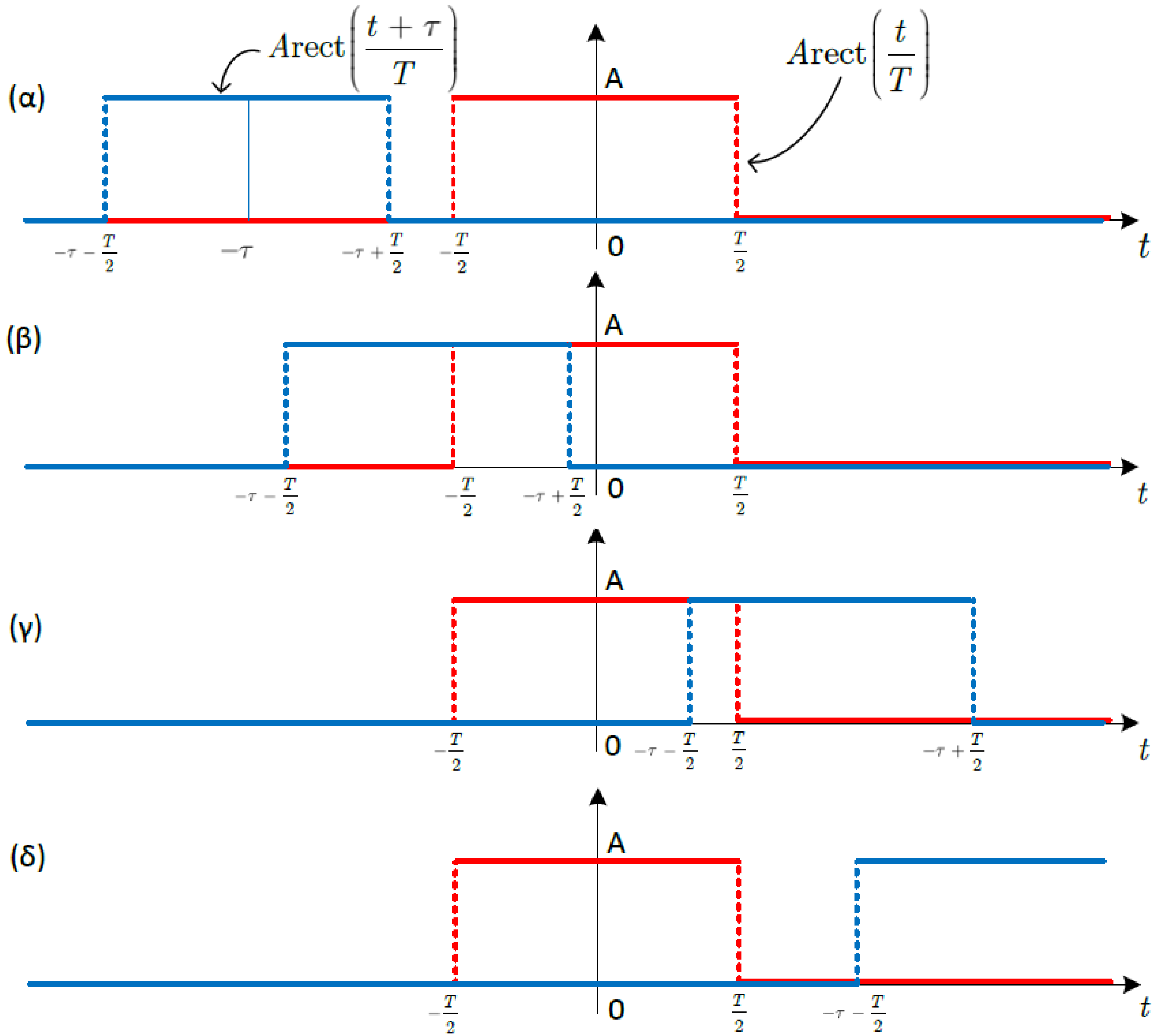
- Μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} \phi_x(\tau) &= x^*(-\tau) * x(\tau) \\ \phi_{xy}(\tau) &= x^*(-\tau) * y(\tau) \\ \phi_{yx}(\tau) &= y^*(-\tau) * x(\tau) \end{aligned}\right\}$$

Η συσχέτιση είναι μια συνέλιξη **χωρίς** τη χρονική αντιστροφή στην προεργασία των πράξεων

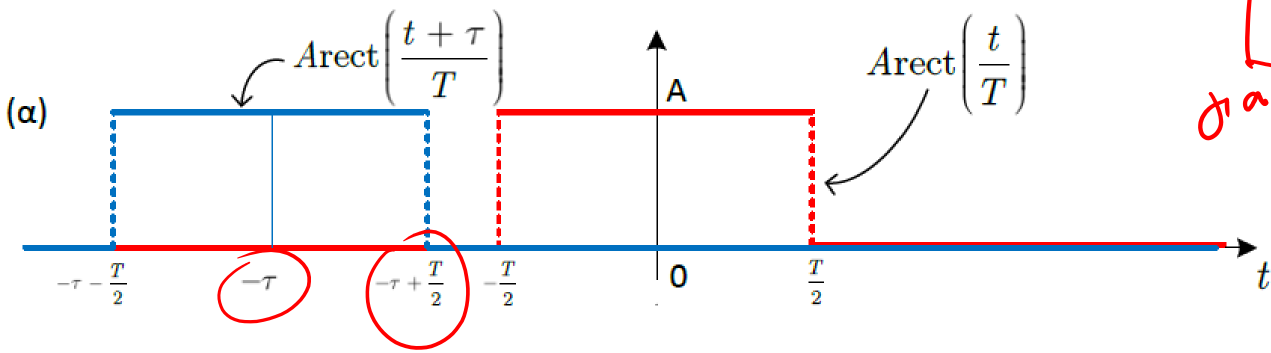
- Προφανώς αν τα σήματα είναι πραγματικά, $x^*(\tau) = x(\tau)$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(α)




$$\boxed{\varphi_x(\tau)=0\ ,\quad \tau>T}\quad ①$$

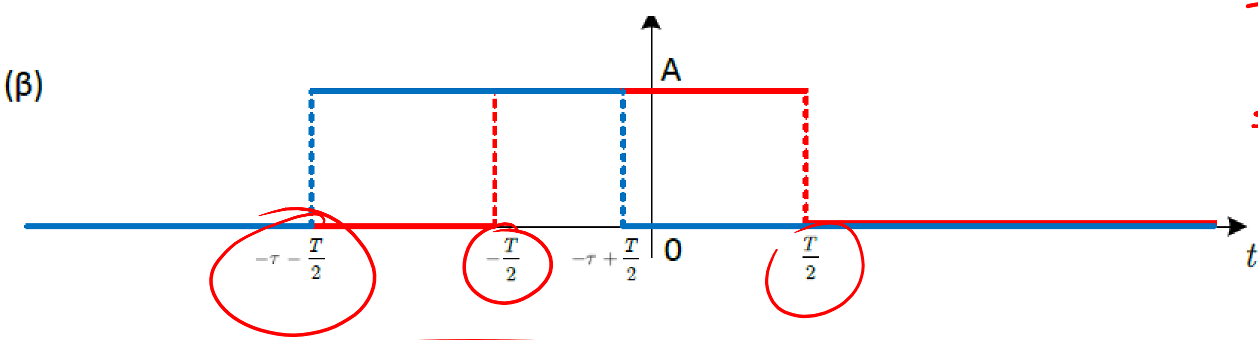
για $-\tau+\frac{T}{2}<-\frac{T}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \tau>T$

$$\varphi_x(\tau)=\int_{-\frac{T}{2}}^{-\tau+\frac{T}{2}} A\cdot A\,dt = A^2\, t\Big|_{-T/2}^{-\tau+T/2} =$$

$$=A^2\left(-\tau+\frac{T}{2}+\frac{T}{2}\right)=A^2(T-\tau)$$

(β)



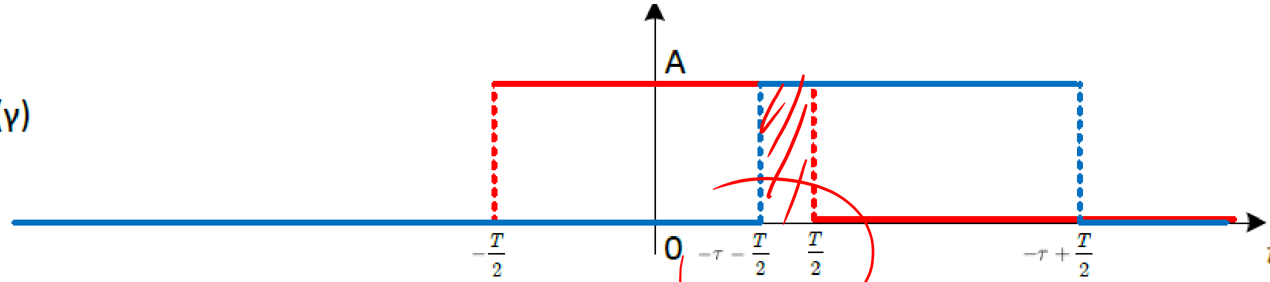

$-\tau+\frac{T}{2}<\frac{T}{2}\Rightarrow \quad \tau<T$

$-\tau+\frac{T}{2}>-\frac{T}{2}\Rightarrow -\tau>0\Rightarrow$
$\Rightarrow \tau>0$

$$\boxed{\varphi_x(\tau)=A^2(T-\tau)\ ,\quad 0<\tau<T}\quad ②$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(γ)




$$G_x(\tau) = \int_{-\tau-\frac{T}{2}}^{T/2} A\cdot A\,dt = A^2 t \Big|_{-\tau-T/2}^{T/2} =$$

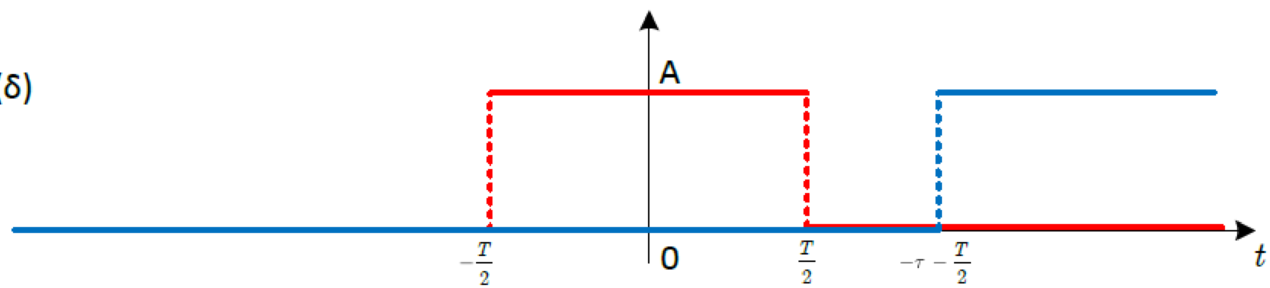
$$= A^2\left(\frac{T}{2}+\tau+\frac{T}{2}\right) = A^2(T+\tau)$$

$-\tau-\frac{T}{2} < \frac{T}{2}$ και $-t+\frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\tau < T$ και $-\tau>0) \Rightarrow (\tau > -T$ κ' $\tau<0)$

3 $\boxed{G_x(\tau) = A^2(T+\tau), \quad -T<\tau<0}$

(δ)




$G_x(\tau) = 0$

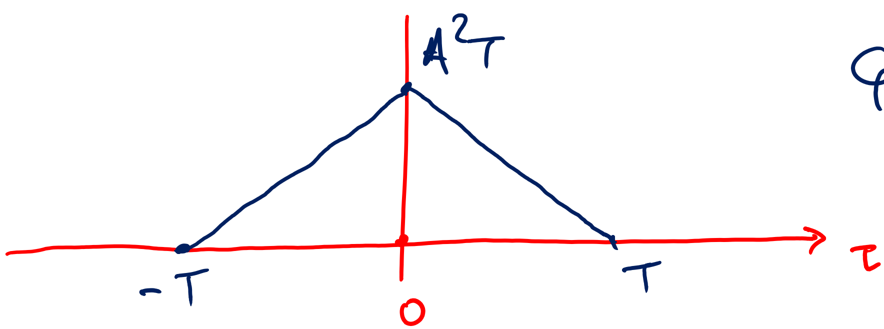
$-\tau-\frac{T}{2} > \frac{T}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\tau > T \Rightarrow \tau < -T$

4 $\boxed{G_x(\tau) = 0, \quad \tau < -T}$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

$$\varphi_x(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -T \text{ και } \tau > T \\ A^2(T-\tau), & 0 < \tau < T \\ A^2(T+\tau), & -T < \tau < 0 \end{cases}$$




$$\varphi_x(\tau) = A^2T \cdot \mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

- **Συσχετίσεις**
- **Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)**
- Αυτοσυσχέτιση:

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Ετεροσυσχέτιση:

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t+\tau)dt$$

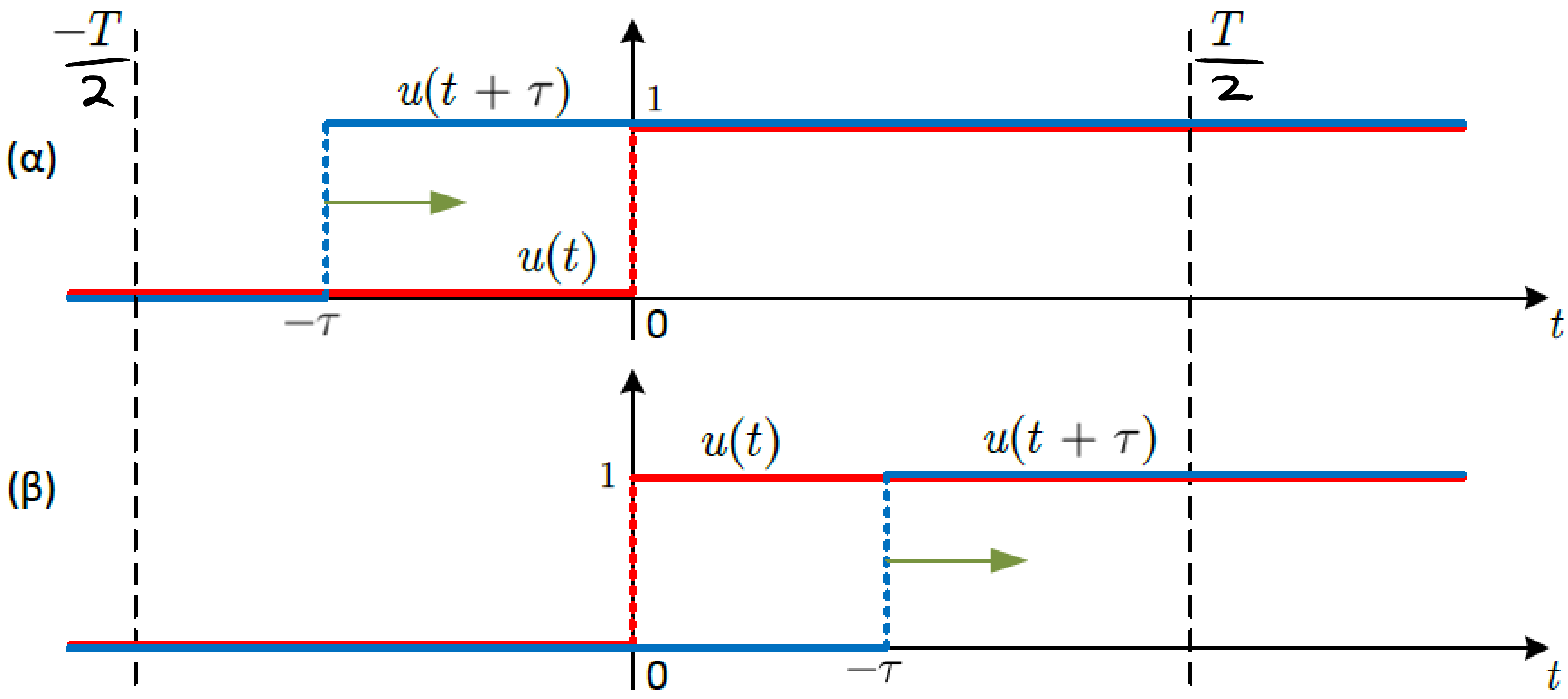
$$\phi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t+\tau)dt$$

- Προφανώς το $T$ εδώ είναι μια οποιαδήποτε διάρκεια
- Ξανά η συζυγία παραλείπεται όταν έχουμε να κάνουμε με πραγματικά σήματα

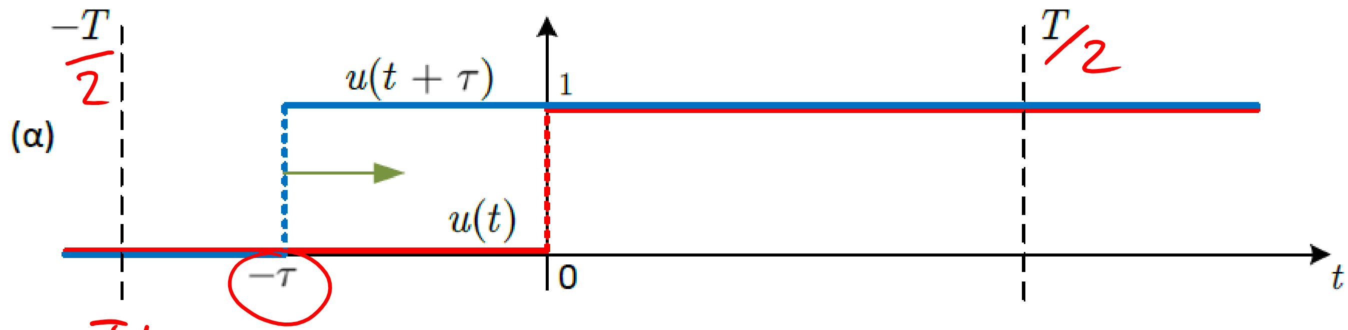
- **Συσχετίσεις**

- **Παράδειγμα:**

  ○ Έστω $x(t) = u(t)$, βρείτε την αυτοσυσχέτιση του σήματος αυτού.



- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**




$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\,dt$$

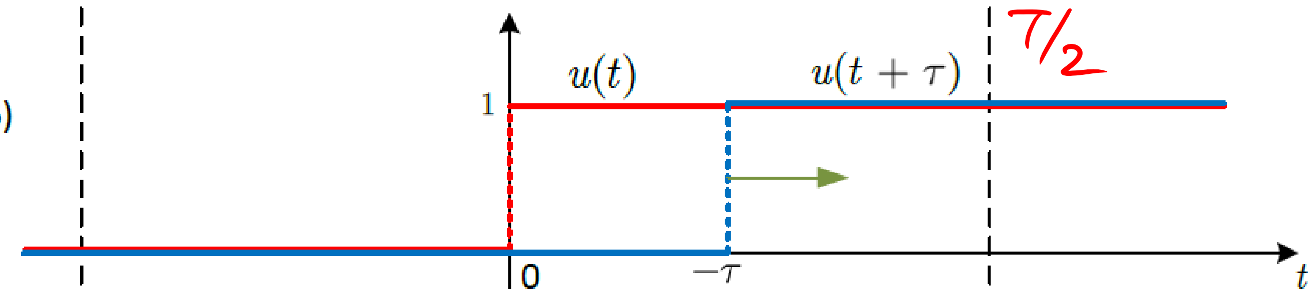
- $-\tau < 0 \Rightarrow \tau > 0$

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T/2} 1\cdot 1\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\, t\Big|_0^{T/2} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}-0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \tau > 0}$$

- **Συσχετίσεις**
- **Παράδειγμα:**

(β)




• $-\tau > 0 \Rightarrow \tau < 0$

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\tau}^{T/2} dt = \frac{1}{2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}+\tau\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} + \cancel{\lim_{T\to\infty} \frac{\tau}{T}}^{\to 0} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \quad \tau < 0$$

- **Συσχετίσεις**
- **Ιδιότητες**

1) Ισχύει ότι

$$\phi_x(\tau) = \phi_x(-\tau)$$

2) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = E_x$$

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt$$

$$\varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\cdot x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

για σήματα ενέργειας

3) Ισχύει ότι

$$|\phi_x(\tau)| \leq \phi_x(0) = P_x$$

για σήματα ισχύος

4) Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό, το ίδιο είναι και η αυτοσυσχέτισή του (με την ίδια περίοδο)

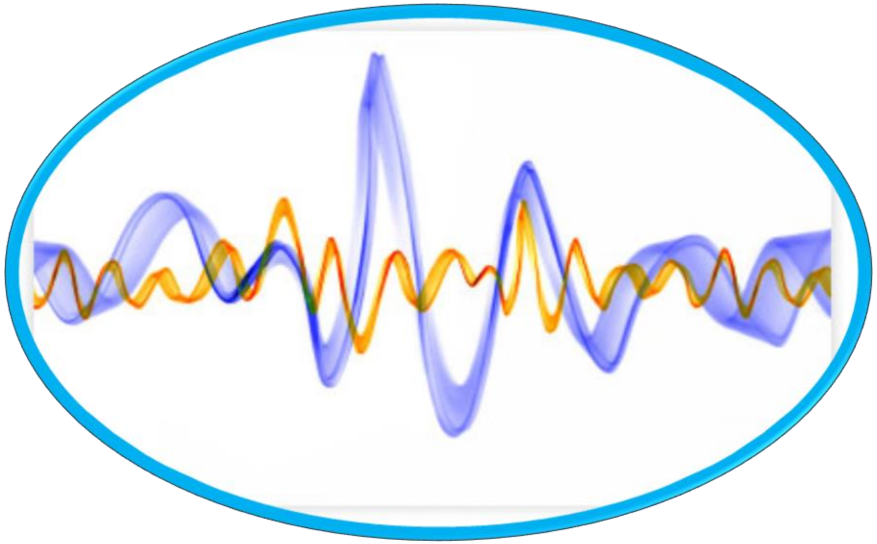
5) Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δεν περιέχει πληροφορία για τη φάση του σήματος

6) Ισχύει ότι

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}^*(-\tau)$$

7) Αν η ετεροσυσχέτιση είναι μηδενική για κάθε $\tau \in \Re$, τα σήματα λέγονται ασυσχέτιστα

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



# E.BA.

AM: 4238 x 2