ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 19Η

- Δειγματοληψία

- **Δειγματοληψία (review…)**

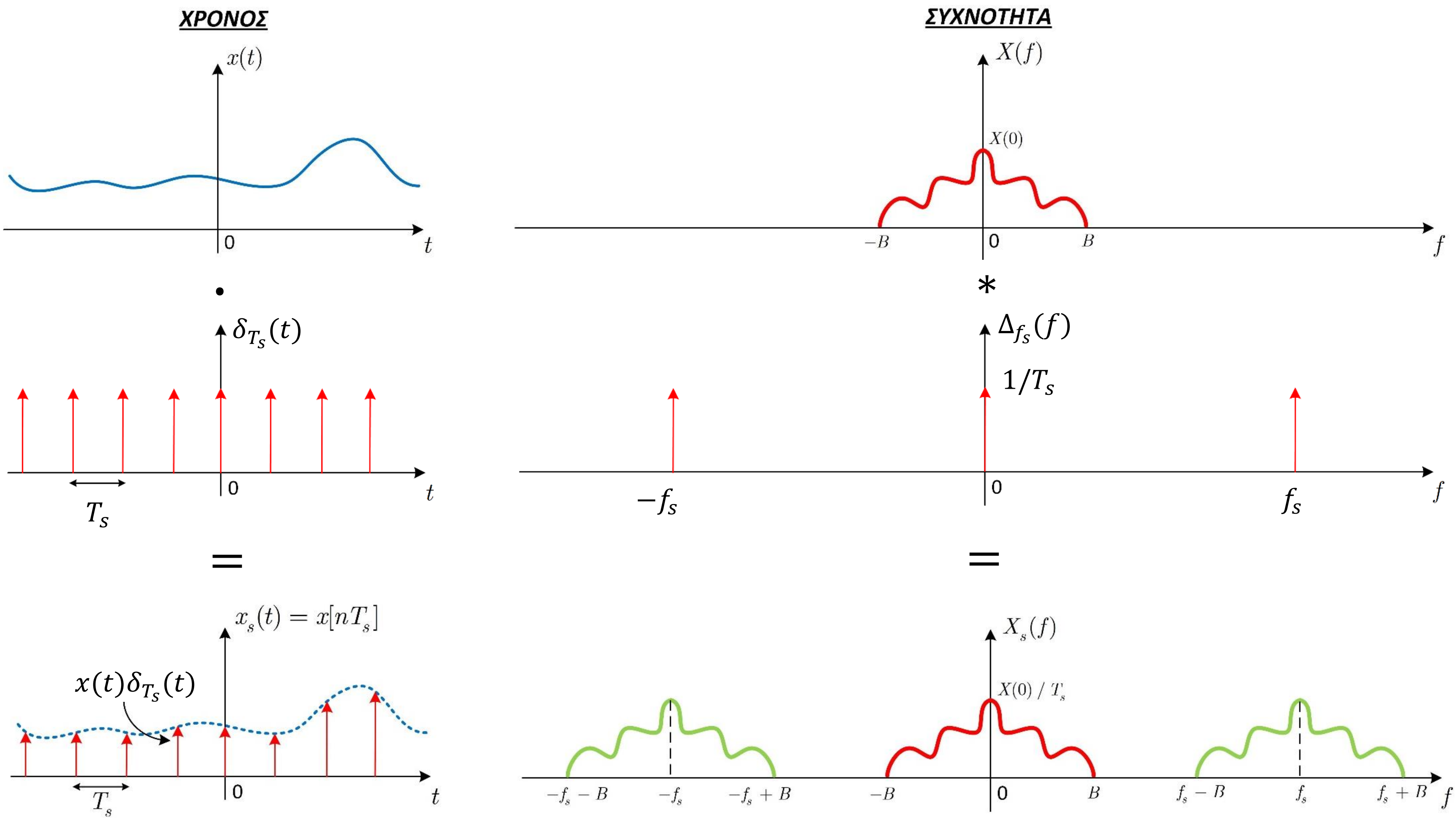
- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα – samples* από) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)

- Ομοιόμορφη δειγματοληψία σε σήμα βασικής ζώνης συχνοτήτων:

$$X(f) = 0, f \notin [-B, B]$$

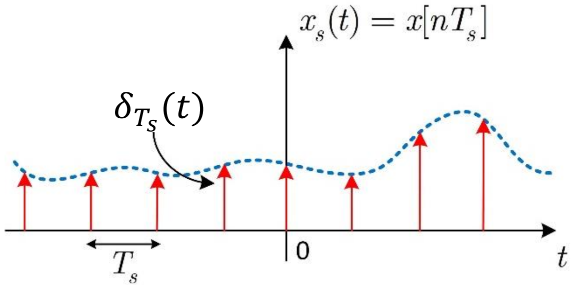
- **Δειγματοληψία (review…)**

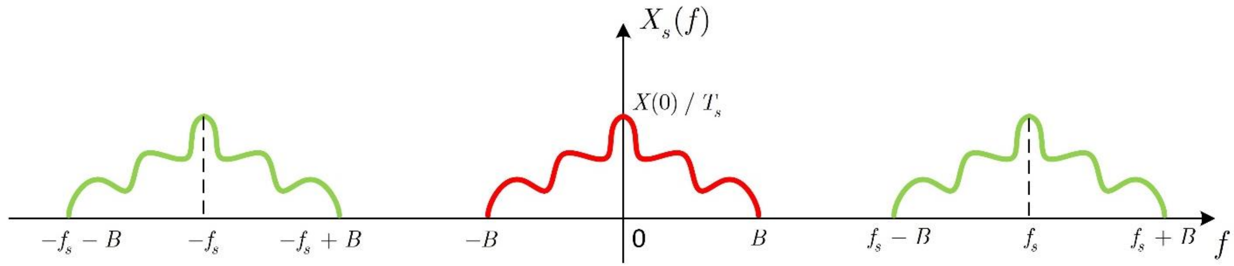


- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**

- Έχουμε τώρα τα δείγματα από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου
  - Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου

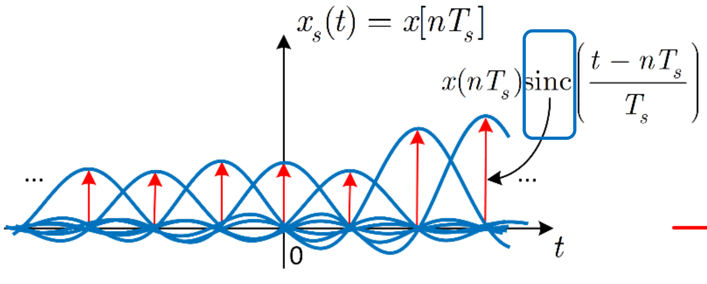
- Πως θα ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?

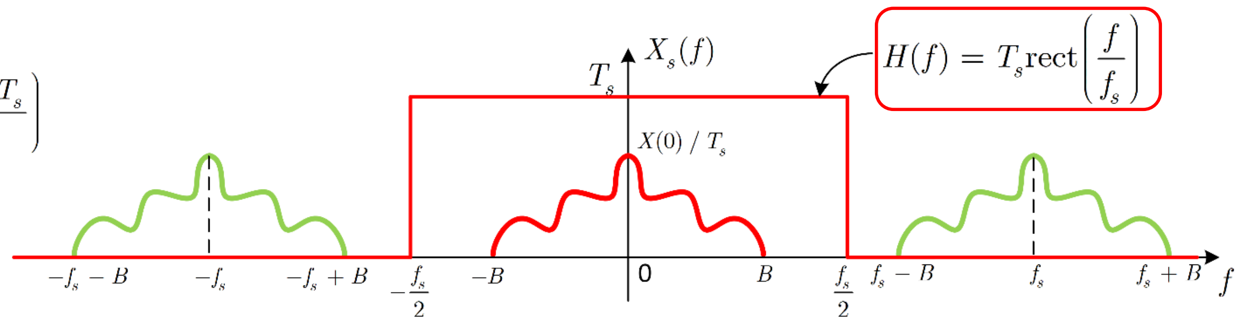




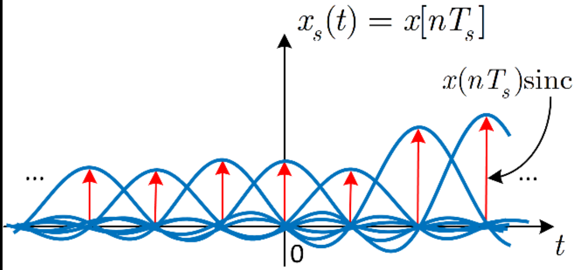
- Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θα μπορούσε να απομονώσει το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου

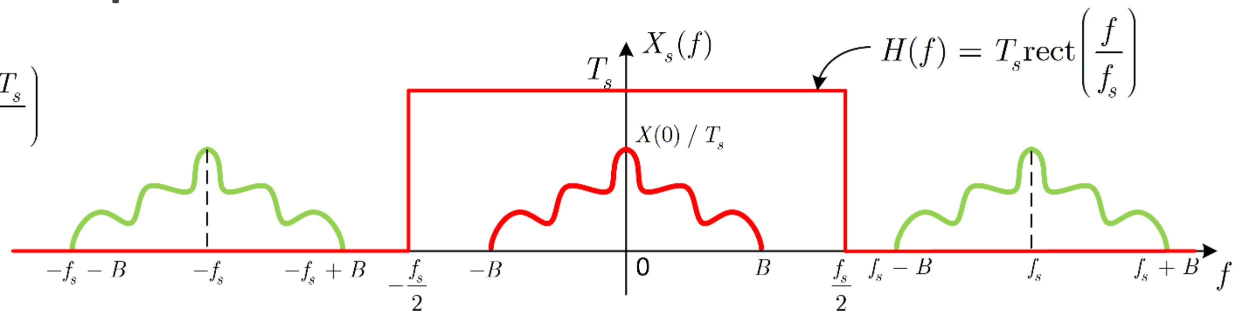
- Το γινόμενο του φίλτρου με το φάσμα στη συχνότητα αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο χρόνο των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$!!!!





- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**





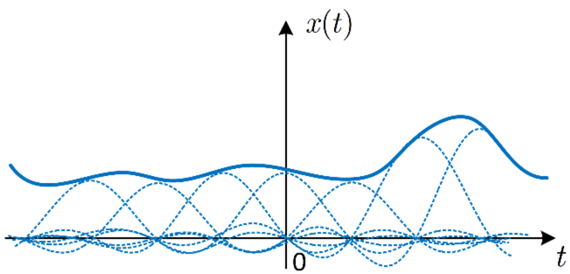
- Με μαθηματικά:

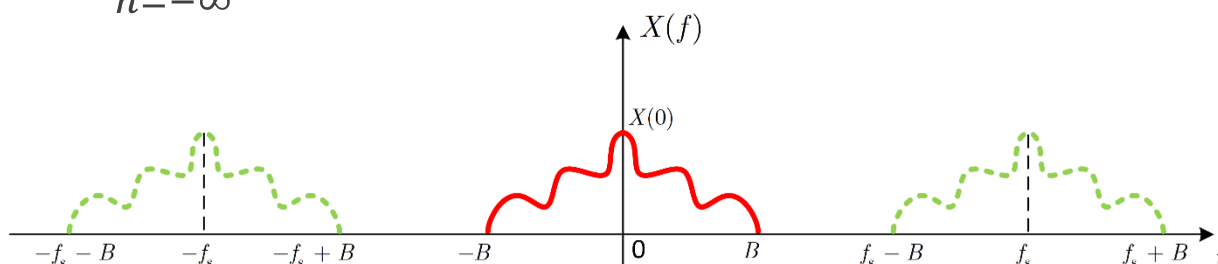
$$\left[X(f) * \Delta_{f_s}(f)\right]H(f) = \left[X(f) * \Delta_{f_s}(f)\right]T_s\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = X(f)$$

- Στο πεδίο του χρόνου:

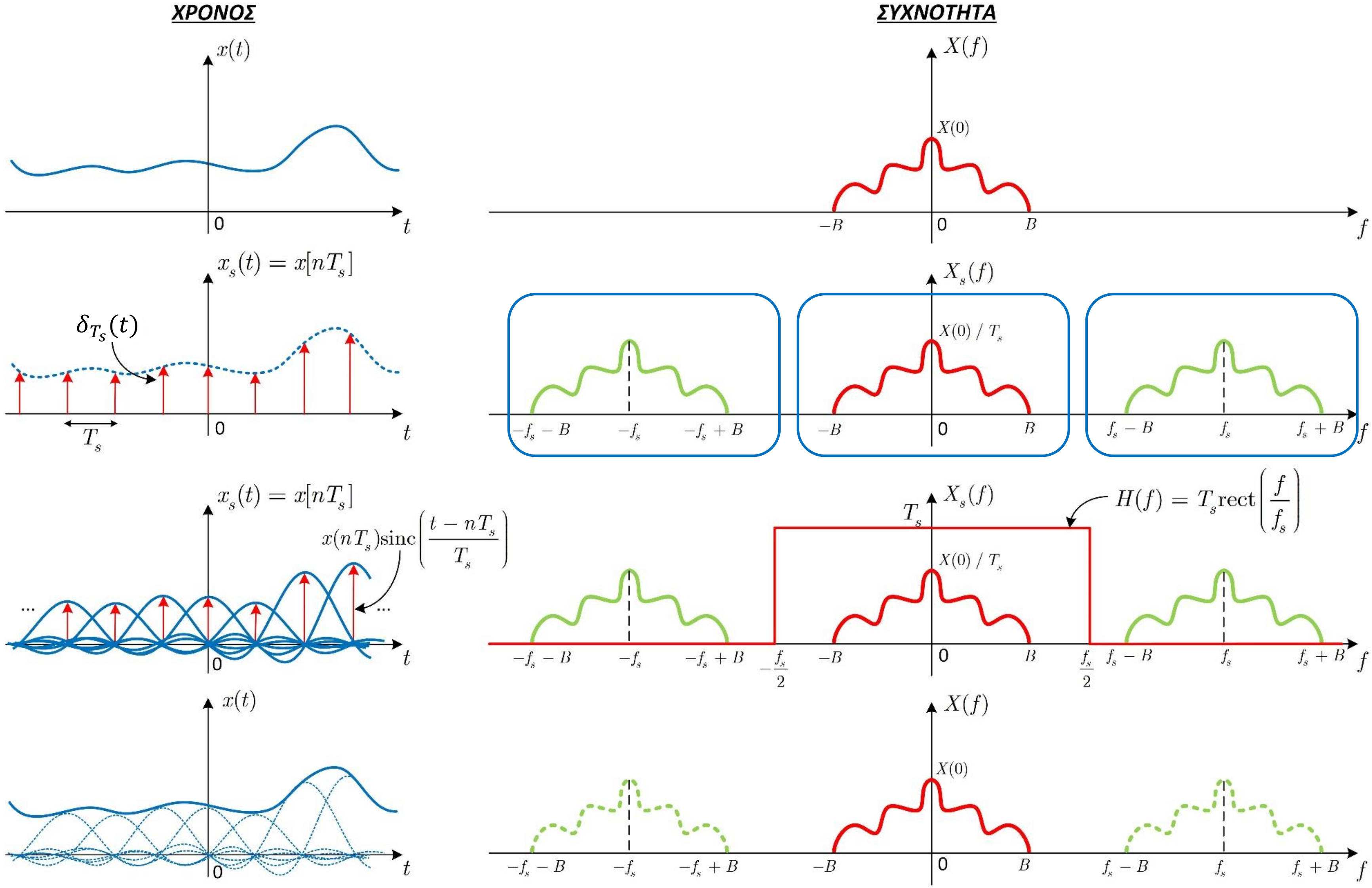
$$\left(x(t)\delta_{T_s}(t)\right) * h(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) = x(t)$$

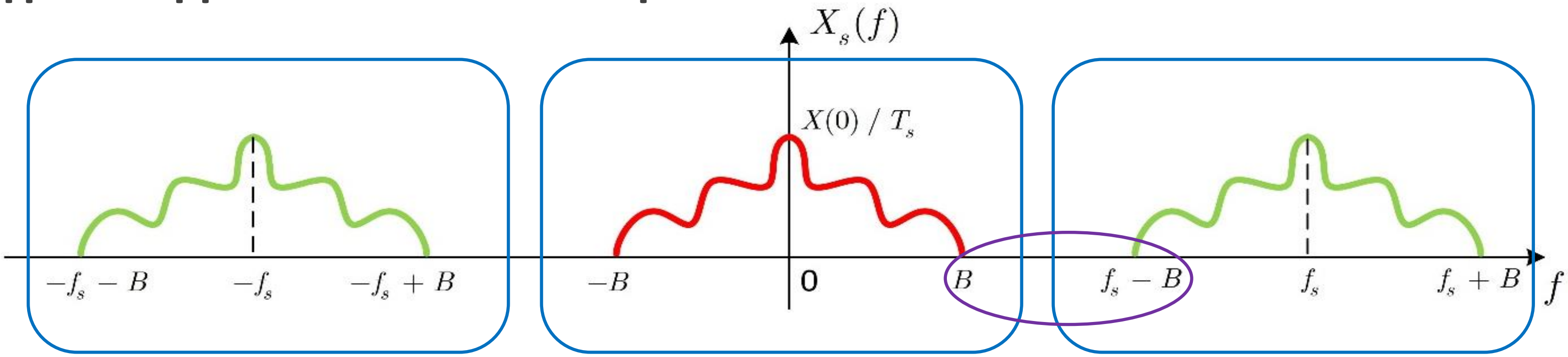




- **Δειγματοληψία και Ανακατασκευή**
- Συγκεντρωτικά:



- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**



- Για να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, πρέπει το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος να μην έχει επικαλύψεις!
  - Η **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s να είναι «αρκετά μεγάλη»
  - Πόσο μεγάλη?

- Αρκεί

$$\boxed{f_s - B > B \Leftrightarrow f_s > 2B = 2f_{max}}$$

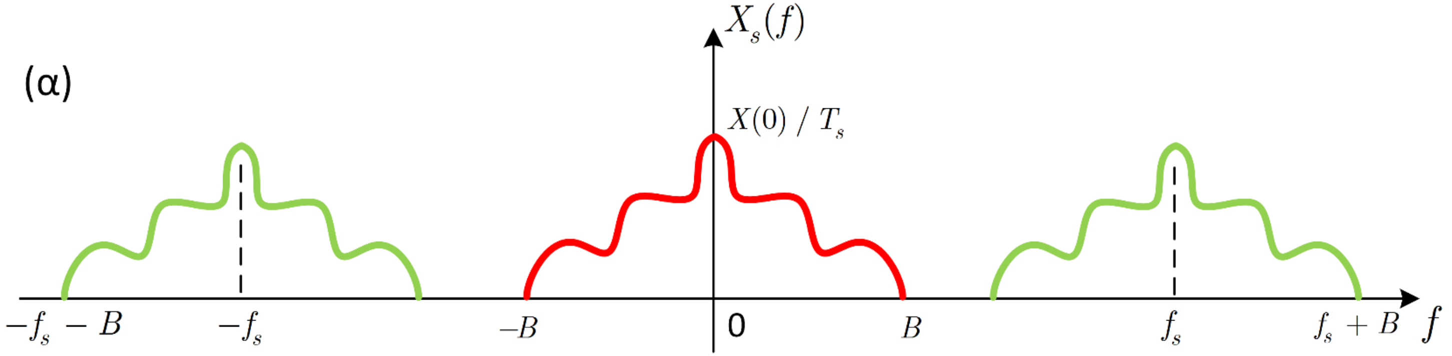
που αποτελεί και το θεώρημα της Δειγματοληψίας

- Με άλλα λόγια, **μπορούμε να ανακατασκευάσουμε <u>πλήρως και ακριβώς</u> το σήμα συνεχούς χρόνου από μια δειγματοληπτημένη έκδοσή του (ένα σήμα *διακριτού* χρόνου) αν τα δείγματα έχουν ληφθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $2B$ Hz, με $2B$ τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος**

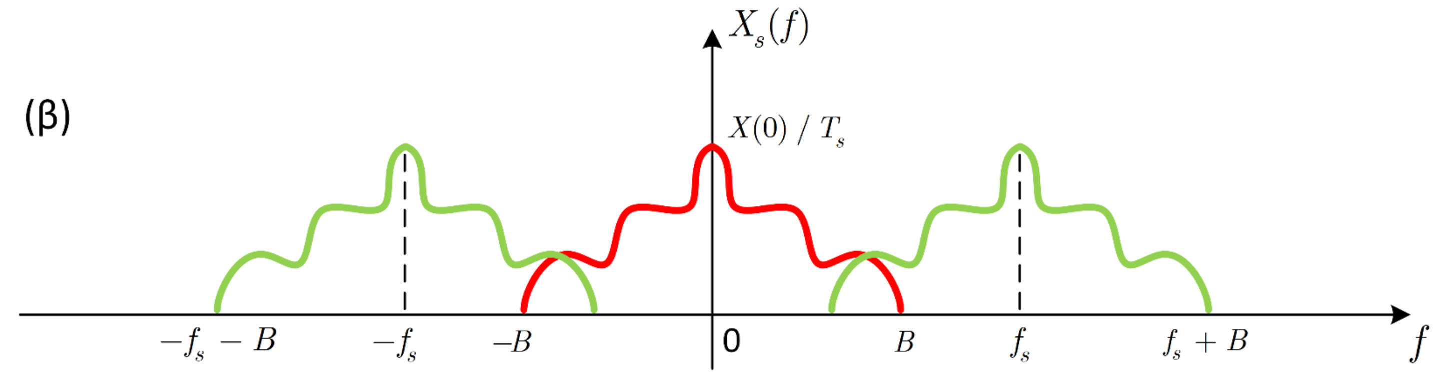
• Δειγματοληψία – Aliasing

• Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

• Αν $f_s > 2f_{max}$, τότε:



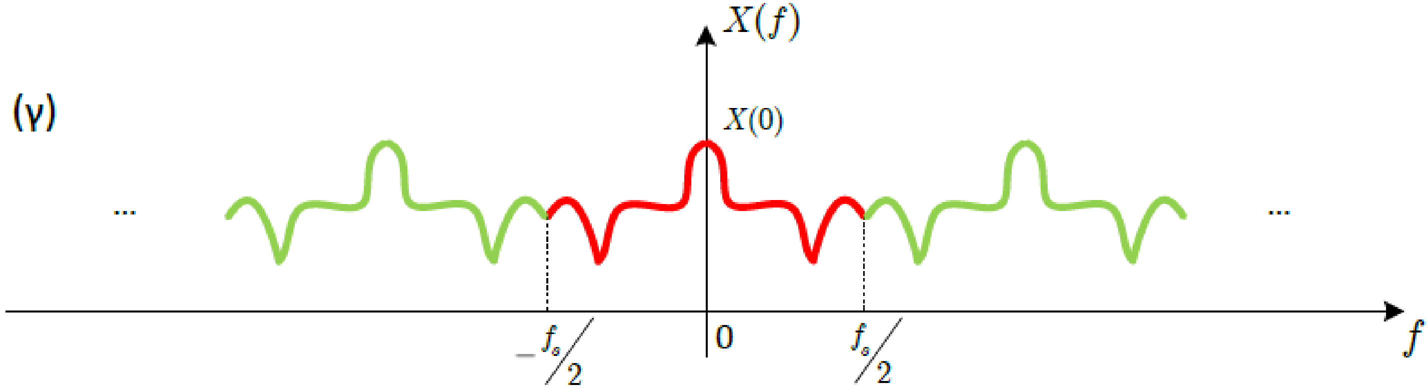
• Αν όμως $f_s < 2f_{max}$, τότε:



- **Δειγματοληψία – Aliasing**

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

- Το φάσμα που θα αποκόψει το χαμηλοπερατό φίλτρο θα μοιάζει με το παρακάτω:



- Το φάσμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα εντελώς διαφορετικό σήμα στο χρόνο, σε σχέση με αυτό που δειγματοληπτήθηκε!!

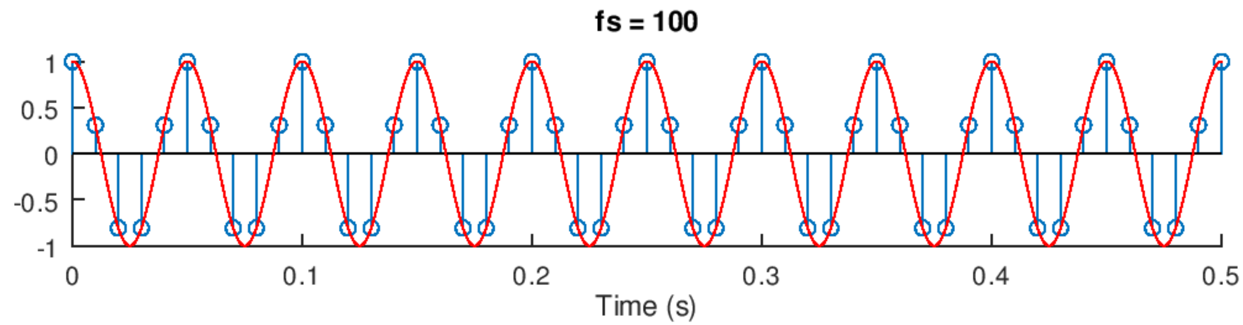
- Βλέπετε ότι έχουν εισαχθεί (και αλλοιώσει) το φάσμα συχνότητες που δεν ανήκουν σε αυτό (ξένες συχνότητες)
  - … οι οποίες προέρχονται από το άθροισμα συχνοτήτων του ίδιου του σήματος και των γειτονικών αντιγράφων του

- Οι συχνότητες αυτές λέγονται **ψευδώνυμες** συχνότητες (**aliased** frequencies)

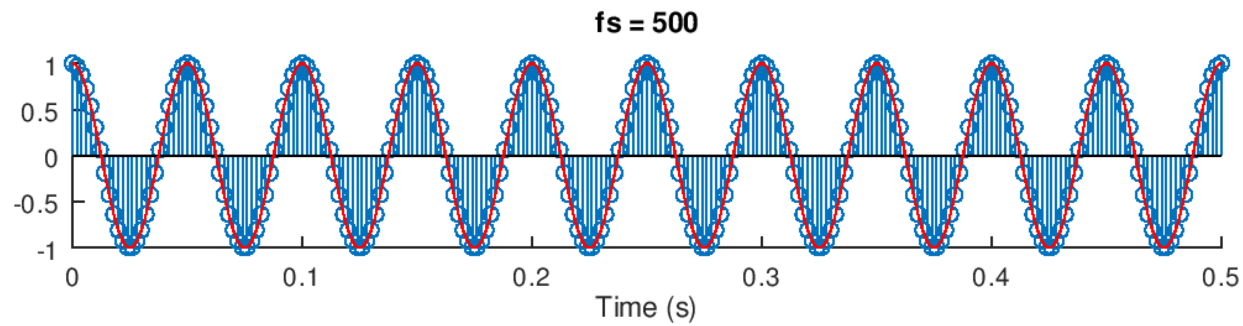
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
  - **Ψευδωνυμία** ή **Αναδίπλωση** (in Greek)

- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Έστω ένα απλό ημίτονο με $f_0 = 20$ Hz το οποίο δειγματοληπτείται με συχνότητες δειγματοληψίας

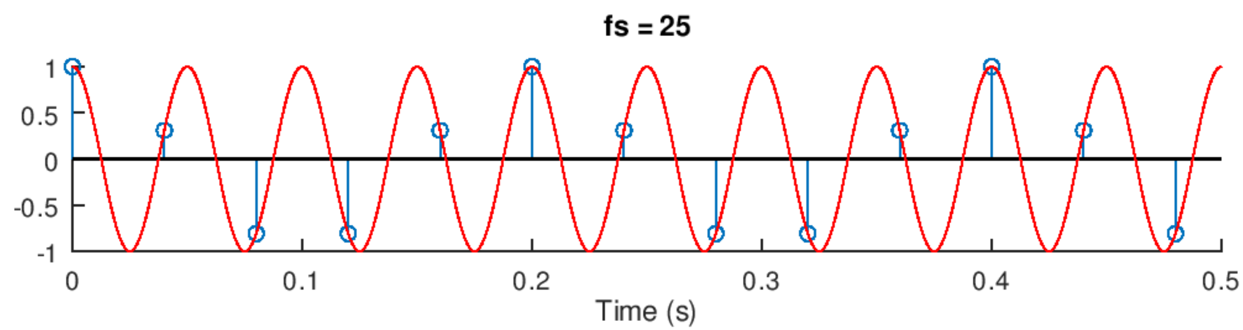
❑ $f_s = 100$ Hz



❑ $f_s = 500$ Hz



❑ $f_s = 25$ Hz

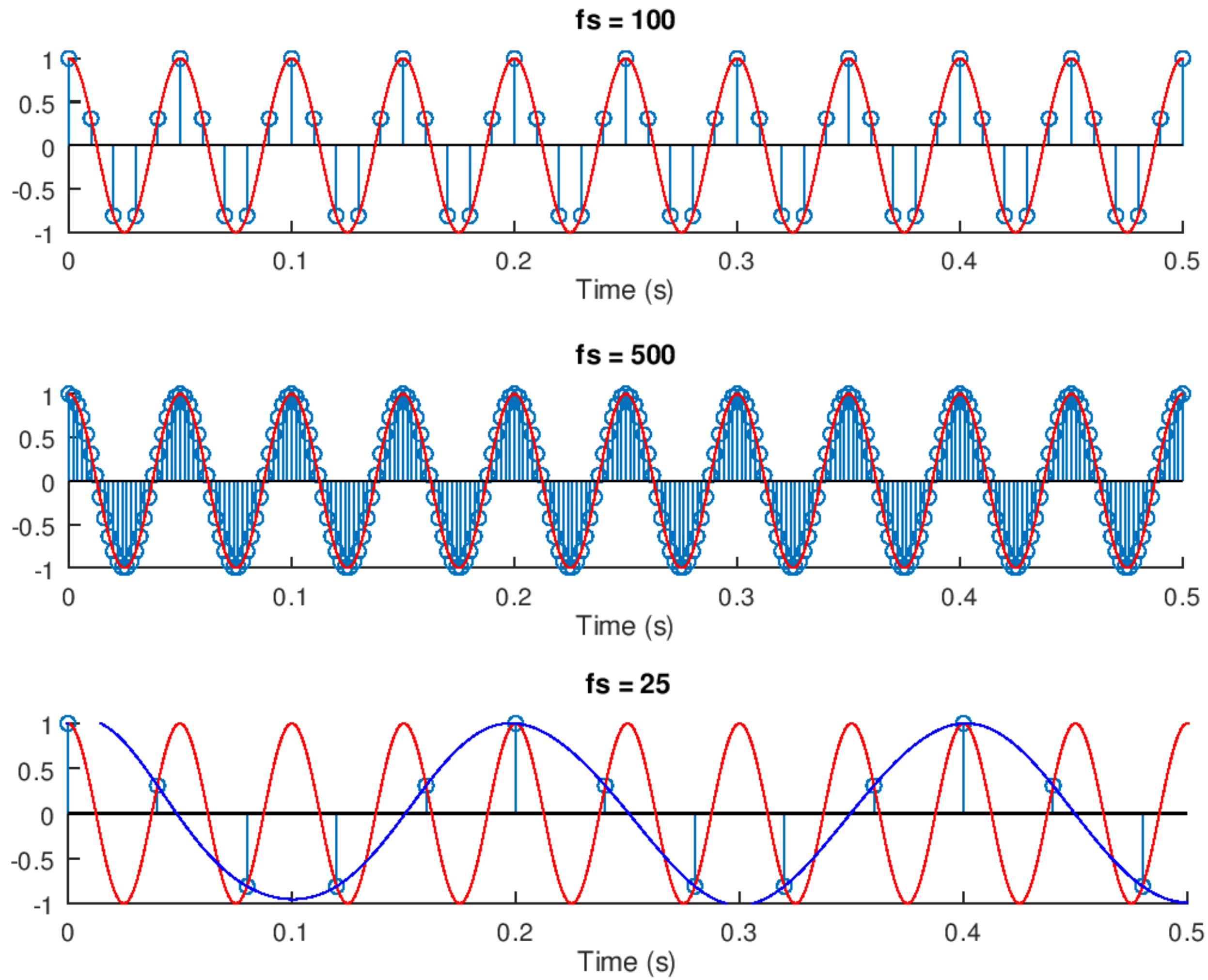


- **Δειγματοληψία**
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ποιο είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται στην τελευταία περίπτωση?

❑ $f_s = 100$ Hz

❑ $f_s = 500$ Hz

❑ $f_s = 25$ Hz



- **Δειγματοληψία**
- Παράδειγμα:

○ Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Αντικαθιστώ $t \leftarrow nT_s = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{4000}$

Οπότε

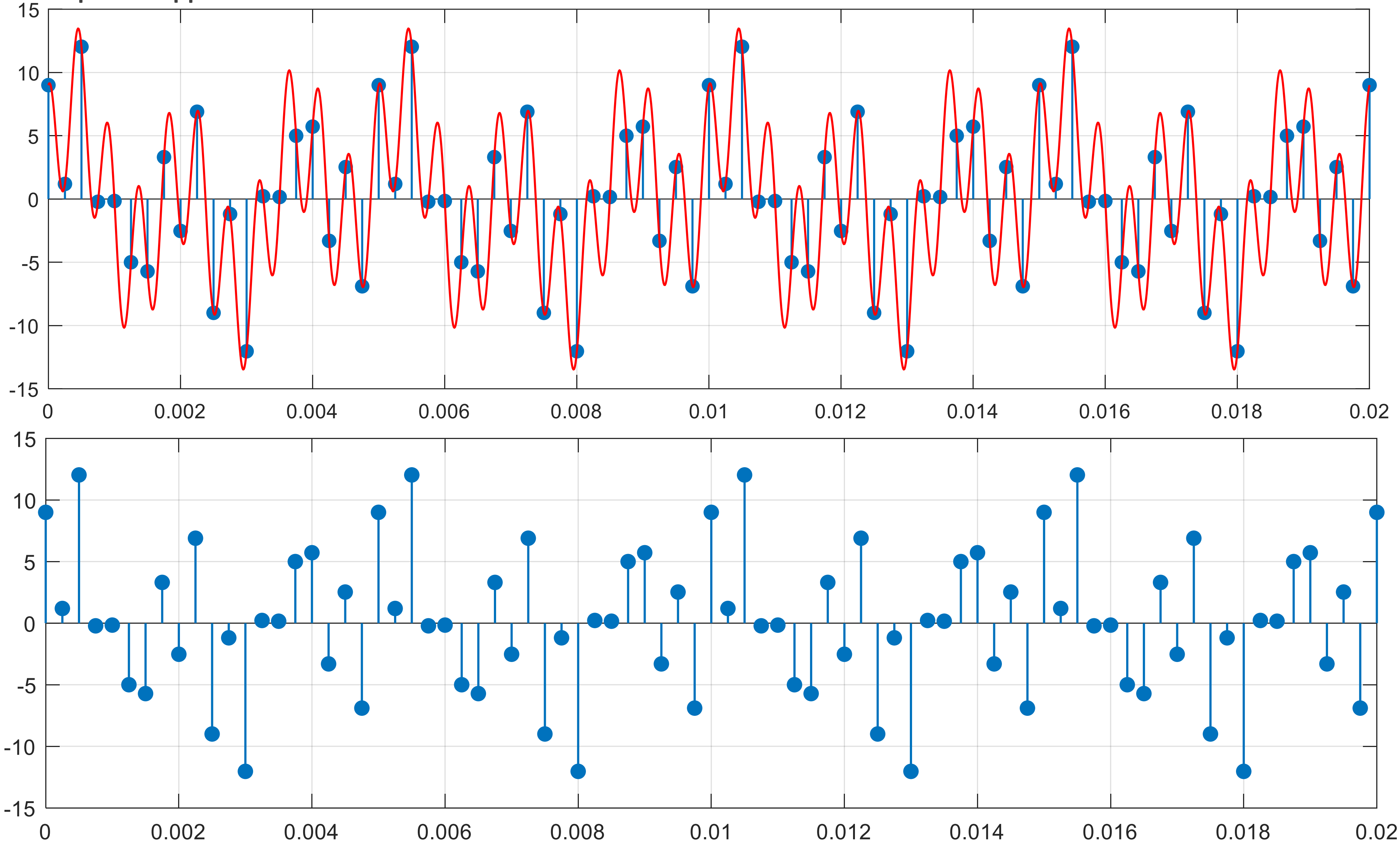
$$x(nT_s) = 3\cos\left(40\cancel{0}\pi \frac{n}{400\cancel{0}}\right) + 5\sin\left(120\cancel{0}\pi \frac{n}{400\cancel{0}}\right) + 6\cos\left(440\cancel{0}\pi \frac{n}{400\cancel{0}}\right)$$

$$= 3\cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi n}{10}\right) + 6\cos\left(\frac{11\pi n}{10}\right)$$

Παρατηρούμε ότι $f_s < 2f_{max} = 2\cdot 2200 = 4400$ Hz

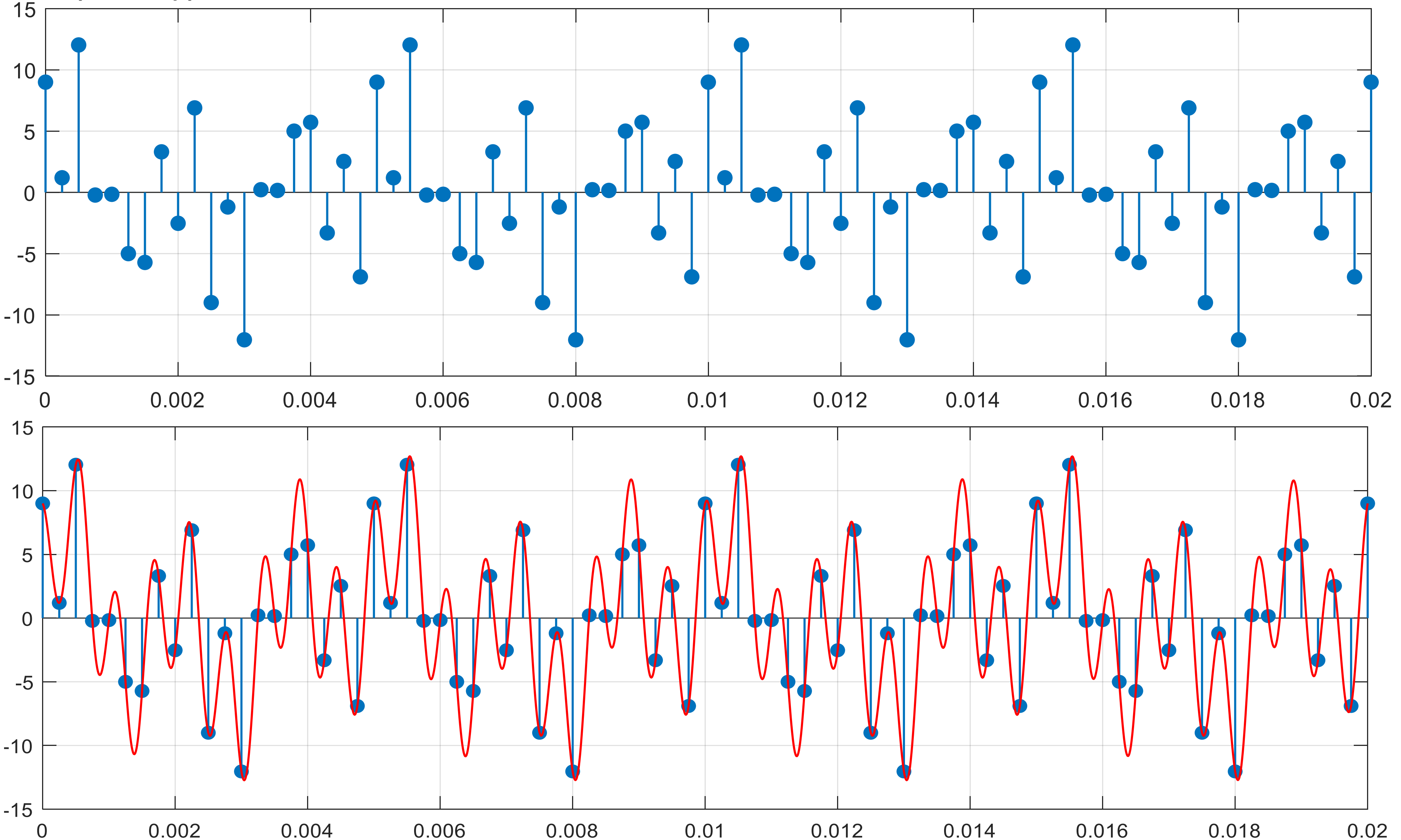
- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:



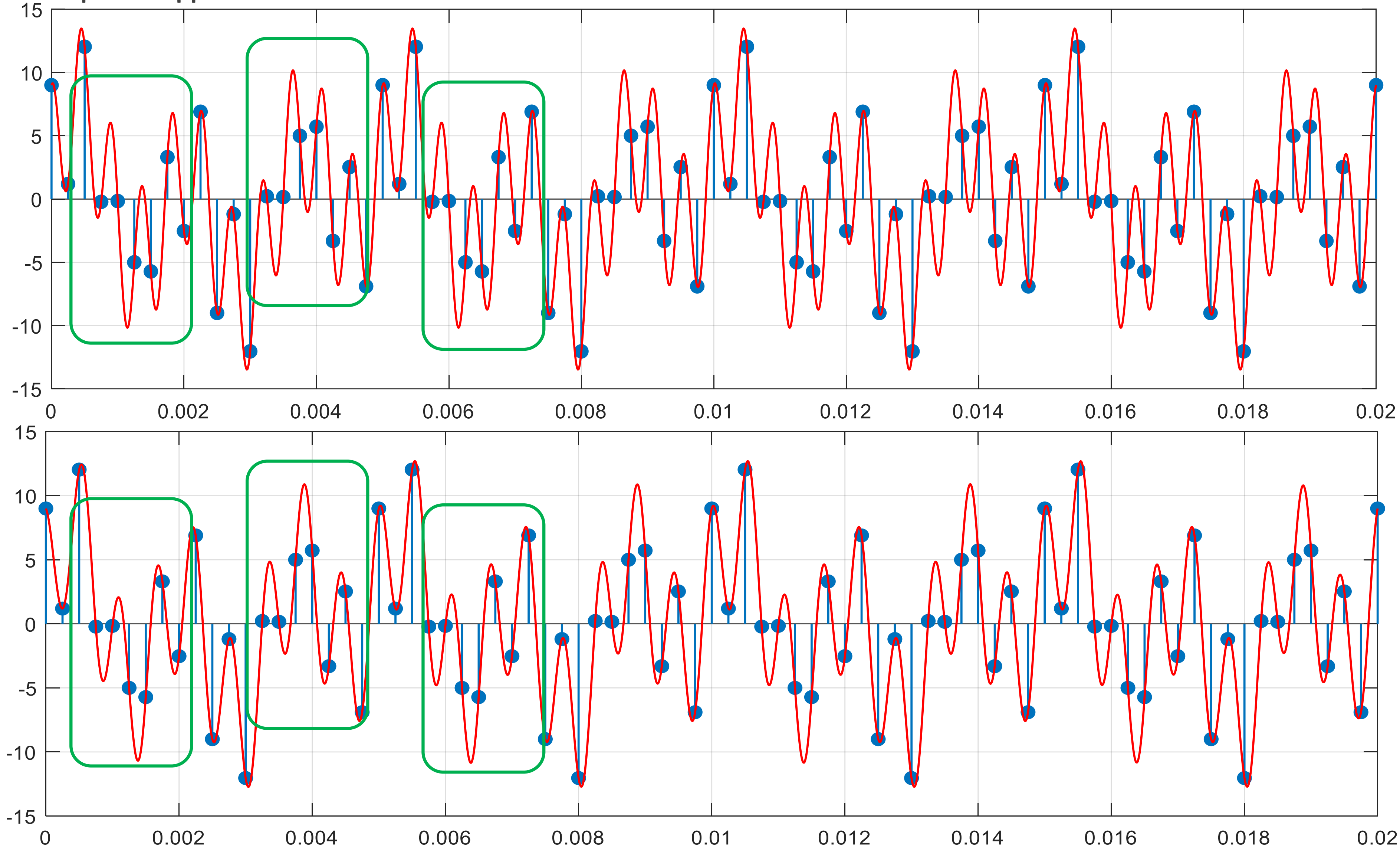
- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:



- **Δειγματοληψία**

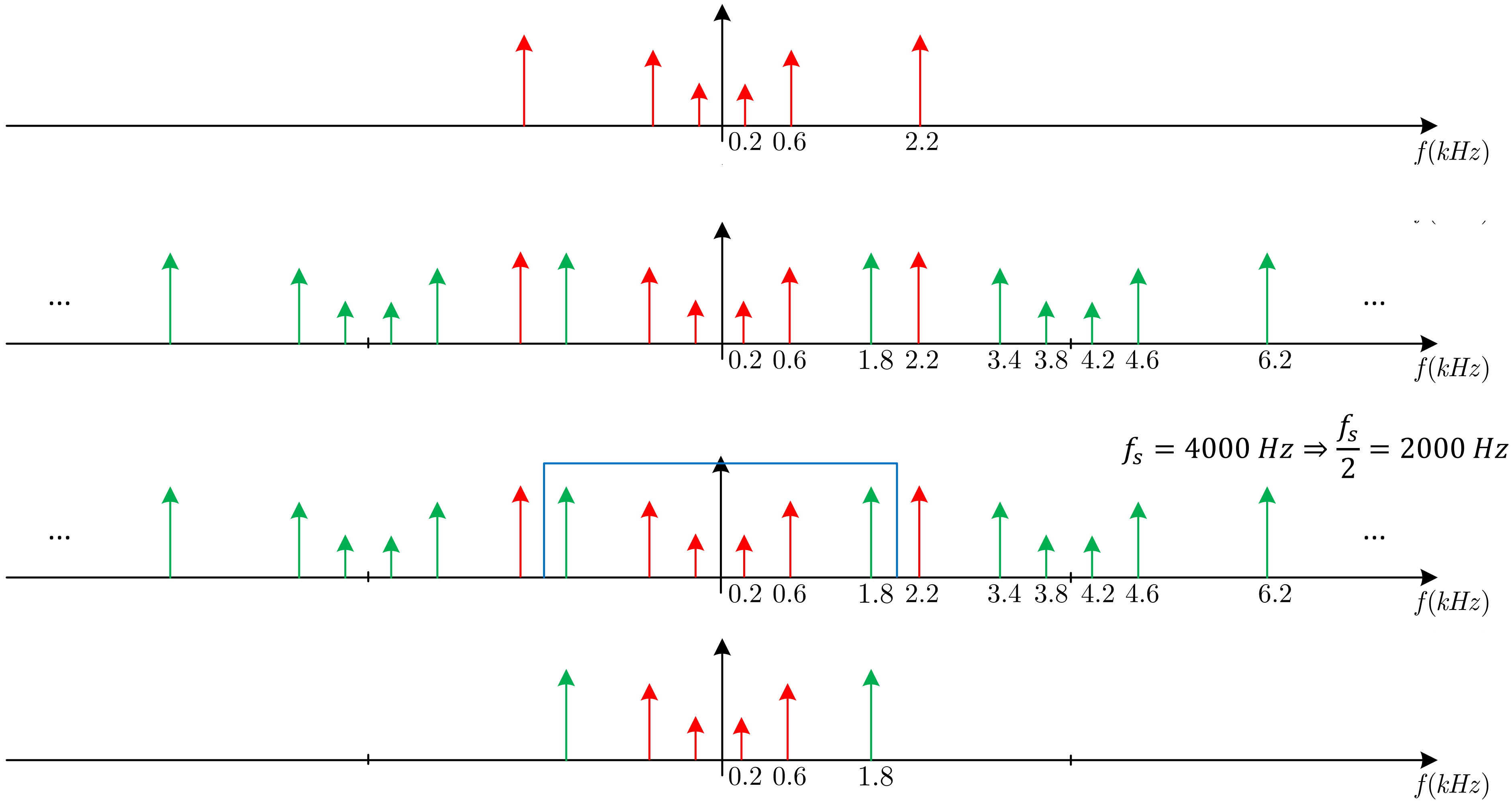
- Παράδειγμα:



- **Δειγματοληψία**

- Ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο του ανακατασκευασμένου σήματος?

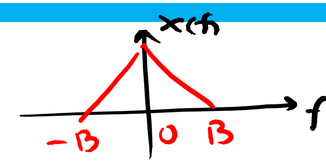
$$x(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(4400\pi t)$$



$$x_r(t) = 3\cos(400\pi t) + 5\sin(1200\pi t) + 6\cos(3600\pi t)$$

- **Δειγματοληψία**

$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f) \longrightarrow$



- Παράδειγμα:

○ Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α′) $x(t)$

(β′) $x(t-t_0)$

(γ′) $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(δ′) $x(t-t_0)+x(t+t_0)$

(ε′) $\frac{dx(t)}{dt}$

(ϛ′) $x(t)x(t)$

(ζ′) $x(t)*x(t)$

α) Ρυθμός Nyquist: $2f_{max} = 2B$

β) Είναι $x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$, άρα Ρυθμός Nyquist: $2B$

$[-B,B] \cdot (-\infty,+\infty)$

γ) Είναι $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f-f_0)$, άρα Ρυθμός Nyquist: $2(f_0+B)$

δ) Είναι $x(t-t_0)+x(t+t_0) \xleftrightarrow{F} 2X(f)\cos(2\pi f_0 t)$, όμοια με (β): $2B$

ε) Είναι $x'(t) \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)X(f)$, όμοιο με (β,δ): $2B$

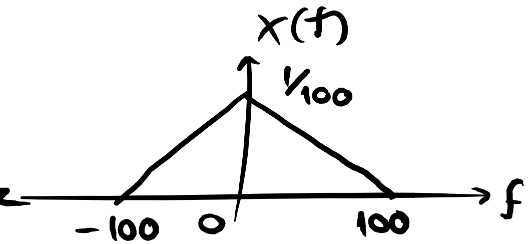
στ) Είναι $x^2(t) \xleftrightarrow{F} X(f)*X(f)$, από ιδιότητα εύρους, Ρυθμός Nyquist: $4B$

ζ) Είναι $x(t)*x(t) \xleftrightarrow{F} X^2(f)$, ρυθμός Nyquist: $2B$

- **Δειγματοληψία** $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\mathrm{sinc}(fT)$, $\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\mathrm{sinc}^2(fT)$
- Παράδειγμα: $T\mathrm{sinc}(tT) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$, $T\mathrm{sinc}^2(Tt) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}\left(\frac{f}{T}\right)$
  - Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α′) $\mathrm{sinc}^2(100t)$ (β′) $\frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t)$ (γ′) $\mathrm{sinc}(100t) + 3\mathrm{sinc}^2(60t)$ (δ′) $\mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

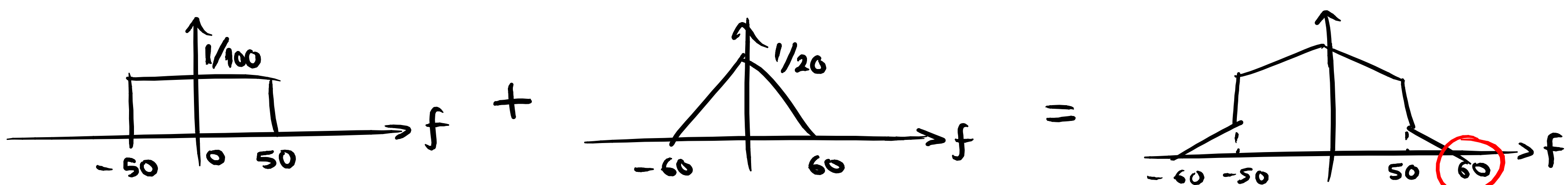
a) $x(t) = \mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{100}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$



Αρα $f_{max} = 100$ Hz $\longrightarrow$ ρυθμός Nyquist = 200 Hz

β) $x(t) = \frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t)$, επειδή το $\frac{1}{100}$ δεν αλλάζει το διάστημα που ο Μ.F. είναι μη-μηδενικός, έχουμε Ρυθμό Nyquist = 200 Hz

γ) $x(t) = \mathrm{sinc}(100t) + 3\,\mathrm{sinc}^2(60t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{100}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + \frac{3}{60}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{60}\right)$



Είναι $f_{max} = 60$ Hz, άρα Ρυθμός Nyquist = 120 Hz

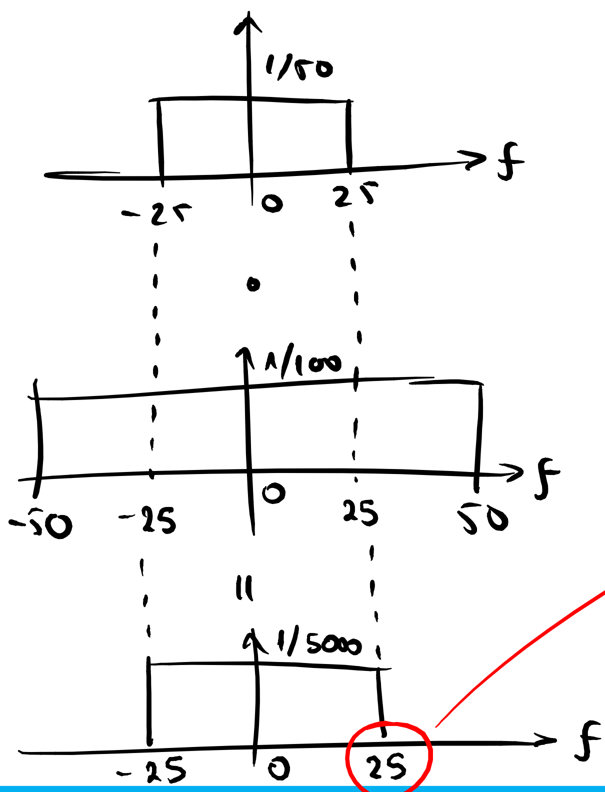
- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

δ) $x(t) = \mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

$$\Big\updownarrow F$$

$$X(f) = \frac{1}{50}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \frac{1}{100}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) = \frac{1}{5000} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$$

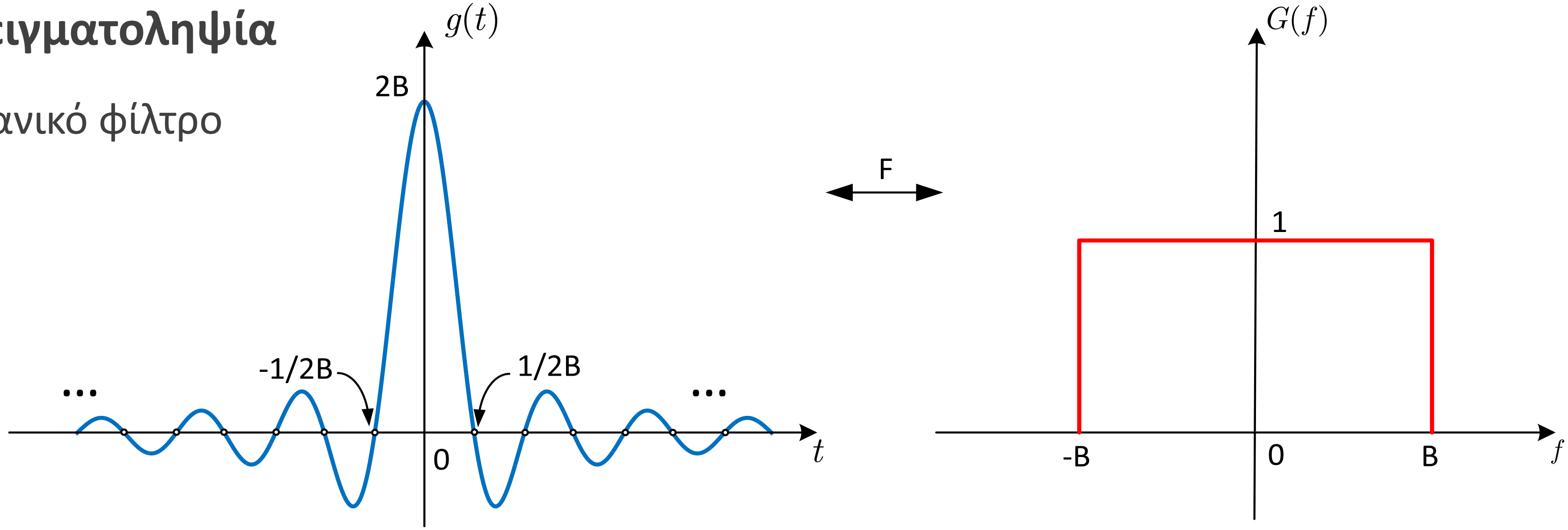


Οπότε $f_{max} = 25$ Hz $\longrightarrow$ Ρυθμός Nyquist $= 50$ Hz

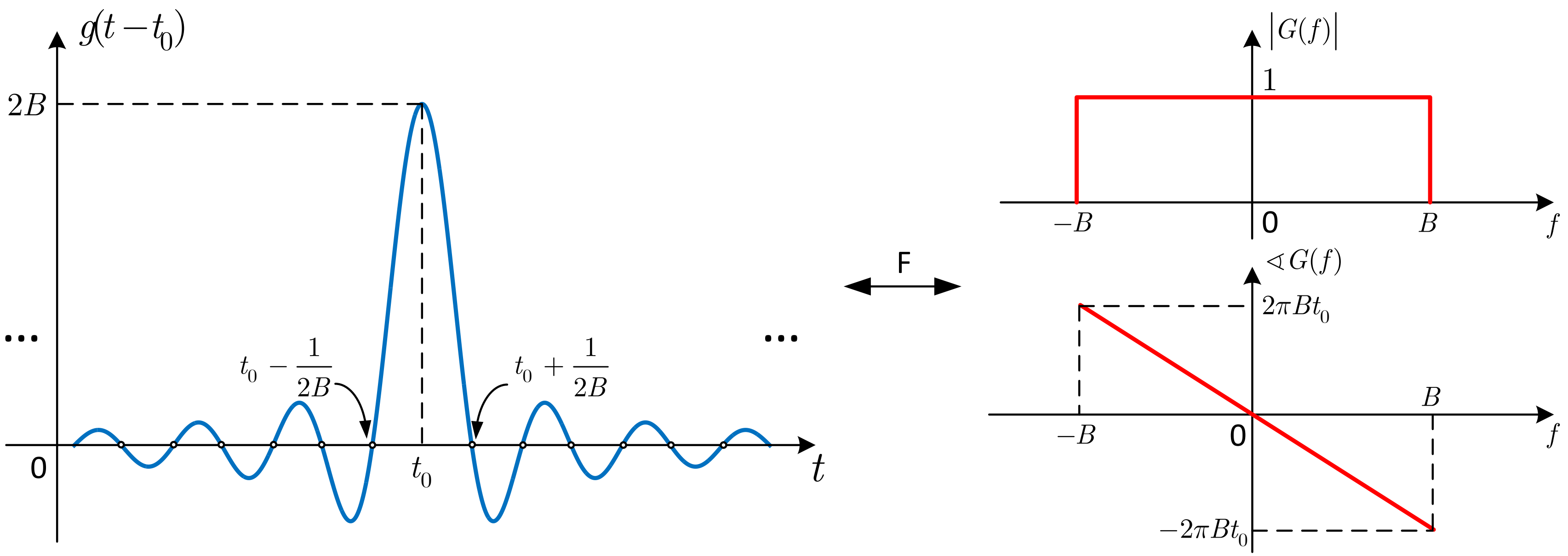
- **Δειγματοληψία**
- Πρακτικά προβλήματα:

1. Κανένα πραγματικό σήμα δεν είναι βασικής ζώνης
   - Αφού ένα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων σήμα πρέπει να είναι άπειρης διάρκειας στο χρόνο!
   - Εφαρμόζουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για να μετατρέψουμε το φάσμα του σήματος σε βασικής ζώνης
2. Οι συναρτήσεις Δέλτα δεν υπάρχουν στην πράξη
   - Μπορούν να προσεγγιστούν από στενούς τετραγωνικούς παλμούς
     - **Φυσική Δειγματοληψία**
     - **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**
3. Το χαμηλοπερατό φίλτρο που αποκόπτει το βασικό φάσμα δεν μπορεί να υλοποιηθεί (ιδανικό φίλτρο)
   - Ούτε η κρουστική του απόκριση (συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$), αφού είναι άπειρης διάρκειας και μη αιτιατή!
   - Μπορεί να προσεγγιστεί από μη ιδανικά φίλτρα
     - Από κρουστικές αποκρίσεις πεπερασμένης διάρκειας και αιτιατές

- **Δειγματοληψία**
- Ιδανικό φίλτρο

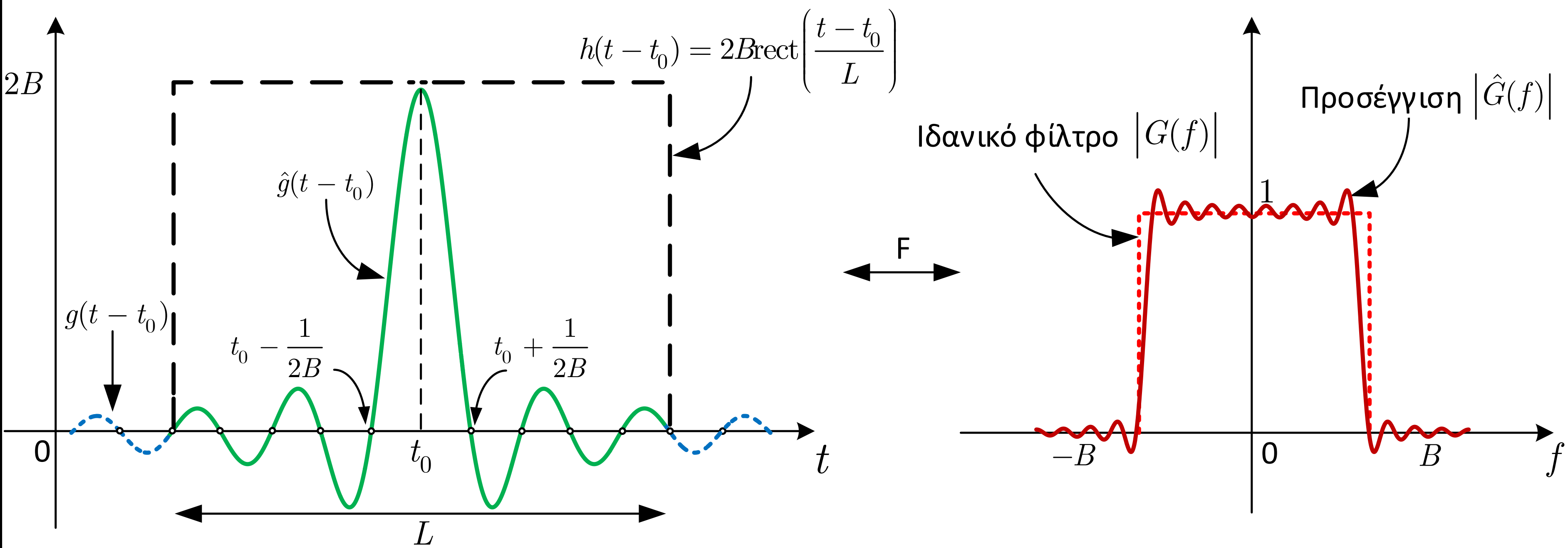


- Το μετατοπίζουμε προς τα δεξιά κατά t_0 έτσι ώστε η περισσότερη ενέργειά του να βρίσκεται στις θετικές χρονικές στιγμές



- **Δειγματοληψία**

- Ακόμα και μετά τη μετατόπιση, ένα τμήμα της κρουστικής απόκρισης είναι μη αιτιατό



- Εφαρμόζουμε ένα χρονικό παράθυρο διάρκειας L για να αποκόψουμε ένα τμήμα της

- Ο Μετασχ. Fourier του μη ιδανικού φίλτρου θα είναι

$$F\{\hat{g}(t-t_0)\} = \hat{G}(f)e^{-j2\pi f t_0} = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) * 2B\text{sinc}(fL)e^{-j2\pi f t_0}$$

- L μικρό: σφάλμα στην προσέγγιση μεγάλο, αλλά εύκολα και γρήγορα πραγματοποιήσιμο

- L μεγάλο: σφάλμα στην προσέγγιση μικρό, αλλά «αργό» στην πραγματοποίηση

- **Φυσική Δειγματοληψία**
- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα, μια σειρά από τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας D

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{D}{2}}{D}\right)$$

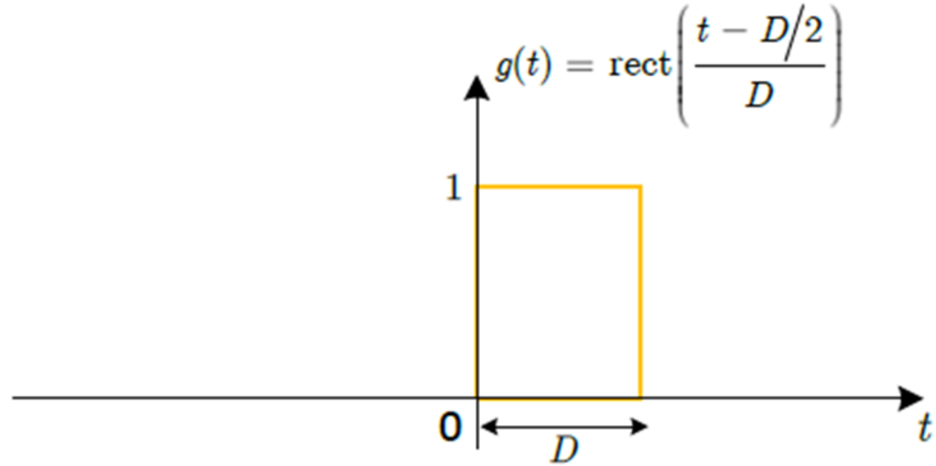
με μετασχ. Fourier

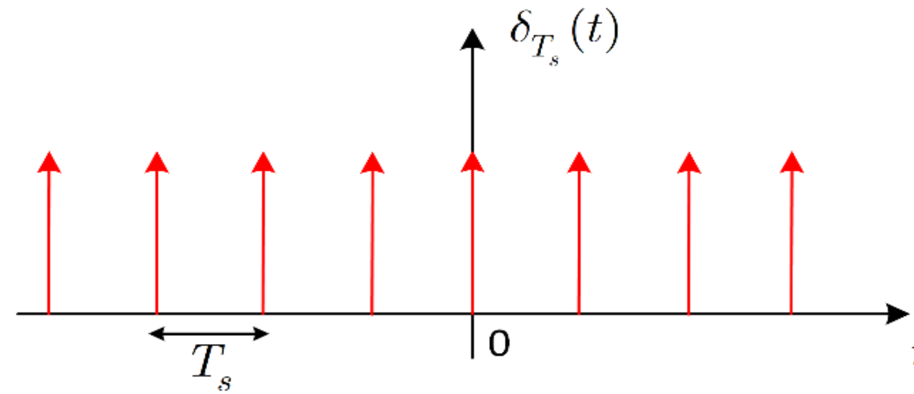
$$G(f) = D\mathrm{sinc}(fD)e^{-j\pi fD}$$

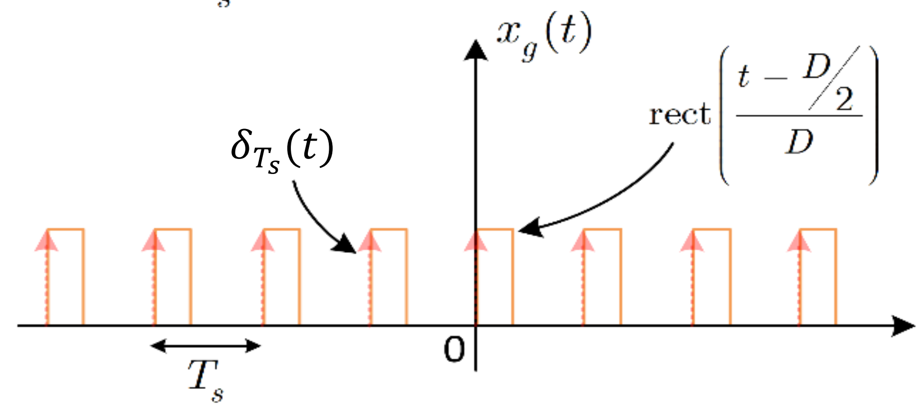
- Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα είναι

$$x_g(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_s)$$

- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα αυτή συνάρτηση δειγματοληψίας





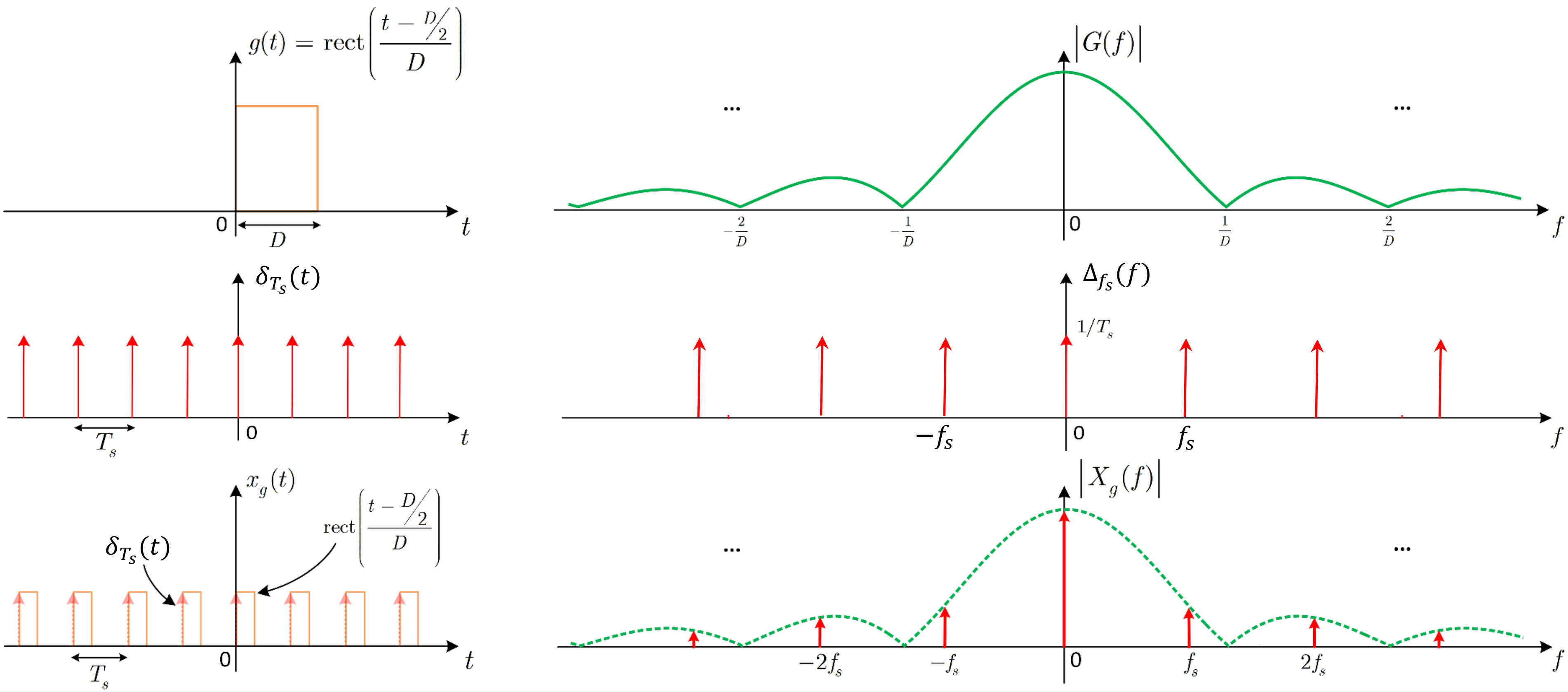


• Φυσική Δειγματοληψία

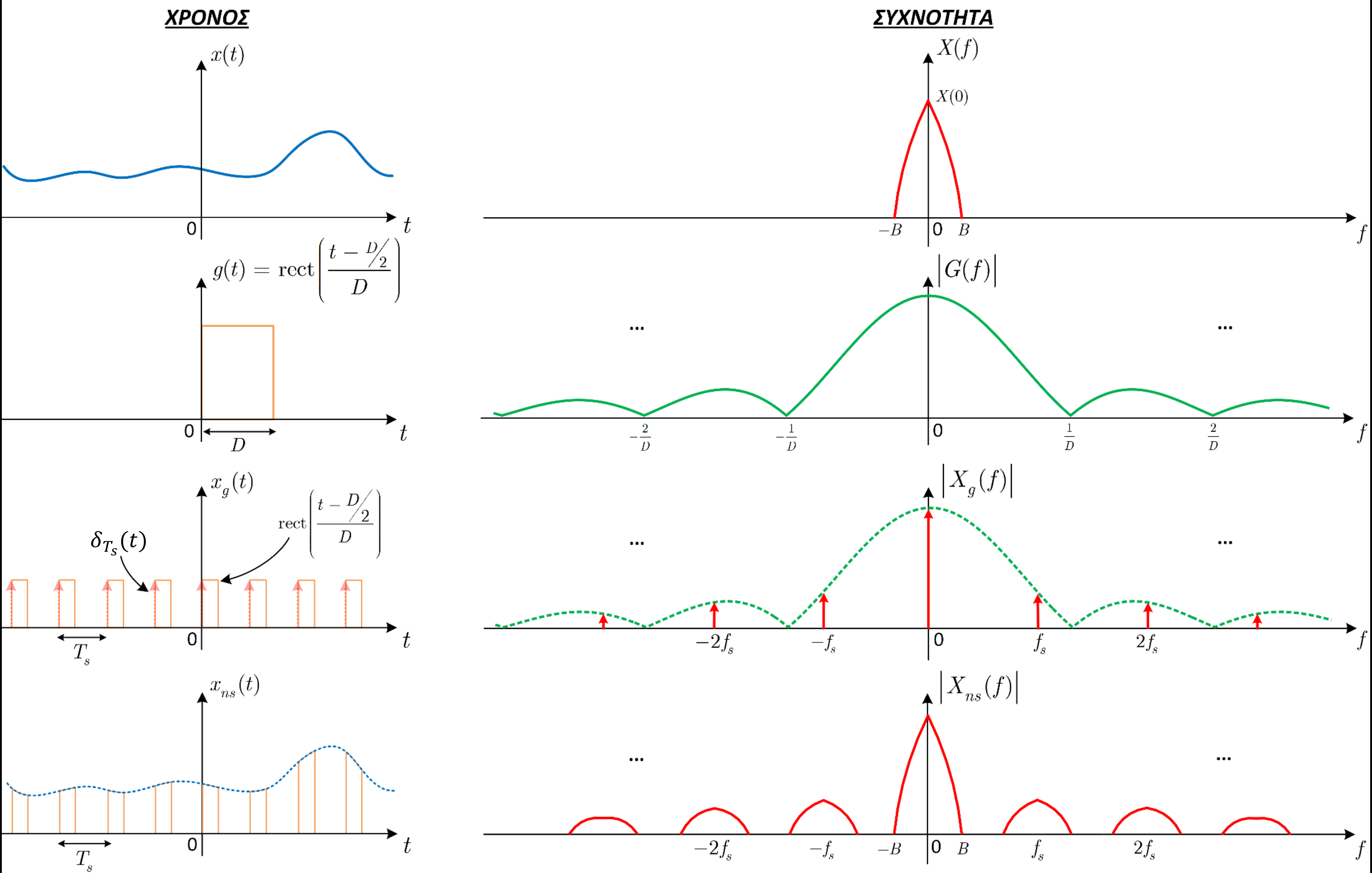
• Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα έχει μετασχ. Fourier

$$X_g(f) = G(f)\Delta_{f_s}(f) = G(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}G(kf_s)\delta(f-kf_s)$$

• Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη συνάρτηση δειγματοληψίας στους δυο χώρους

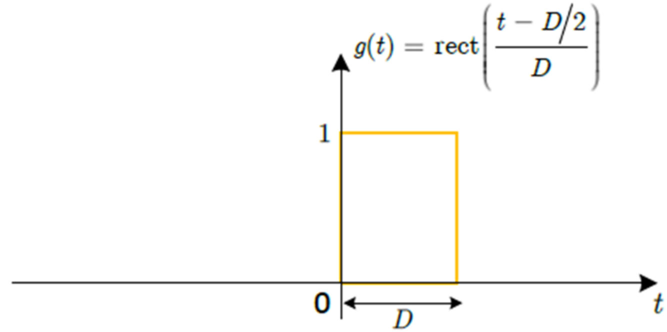


- **Φυσική Δειγματοληψία**

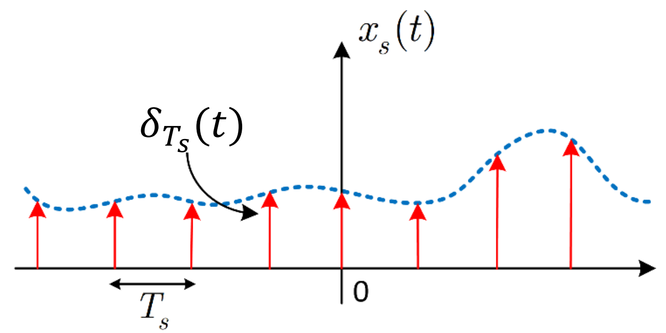


- **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**

- Πολλές φορές προτιμάται η σειρά παλμών να διατηρεί σταθερό το πλάτος κάθε παλμού σύμφωνα με τη χρονική στιγμή της δειγματοληψίας



- Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή αναπαρίσταται από μια εναλλαγή των πράξεων της φυσικής δειγματοληψίας



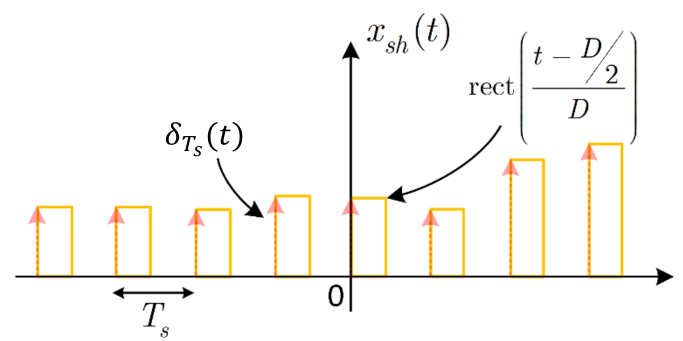
- Στη φυσική δειγματοληψία είχαμε

$$x_{ns}(t) = [\delta_{T_s}(t) * g(t)]x(t)$$

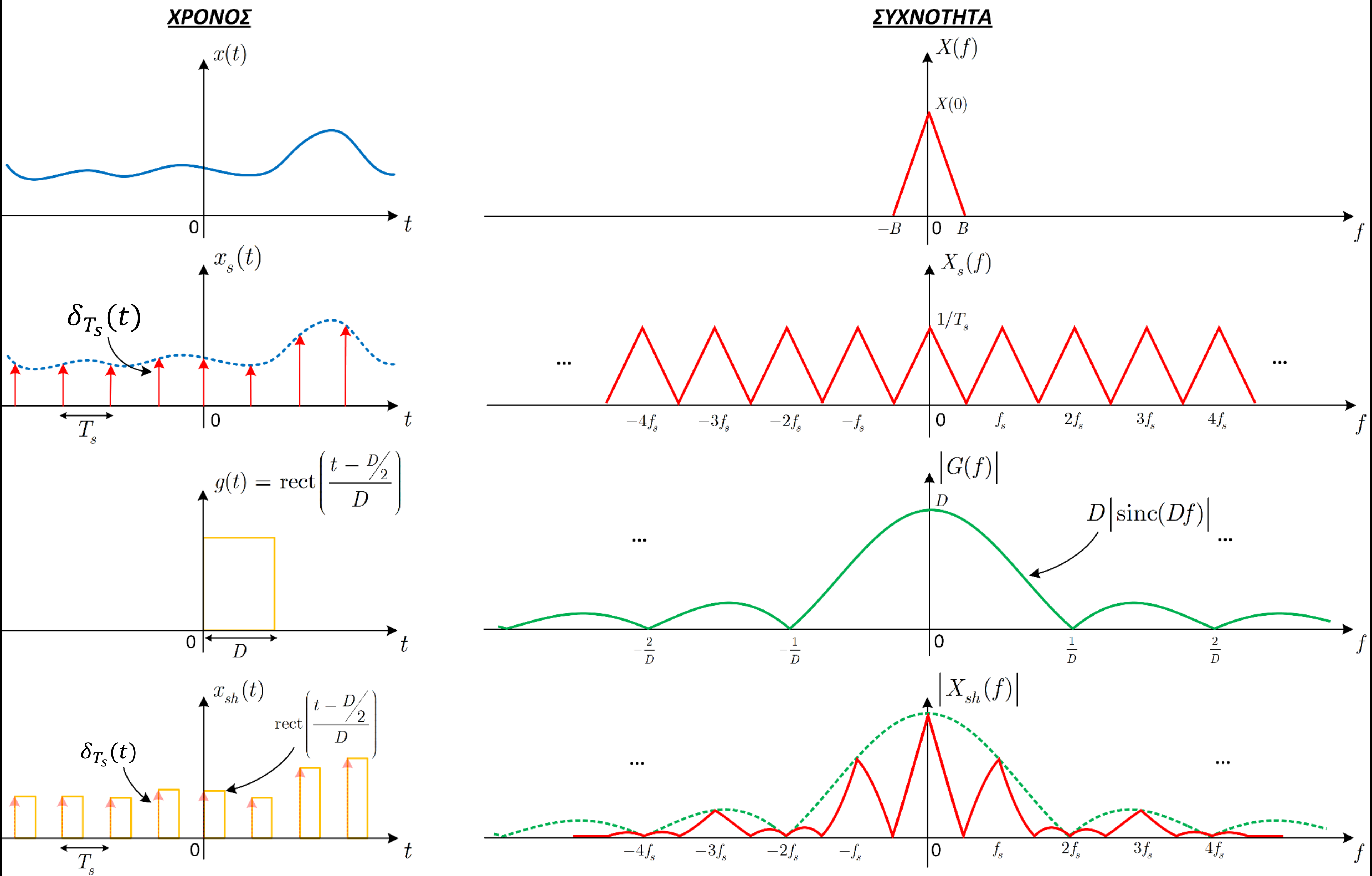
ενώ τώρα

$$x_{sh}(t) = [x(t)\delta_{T_s}(t)] * g(t)$$

- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα διαδικασία



• Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής

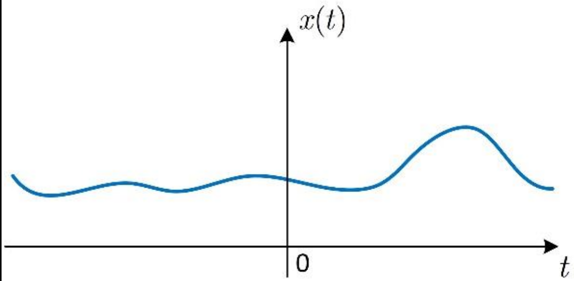


- **Δειγματοληψία – Ζωνοπερατή Δειγματοληψία**

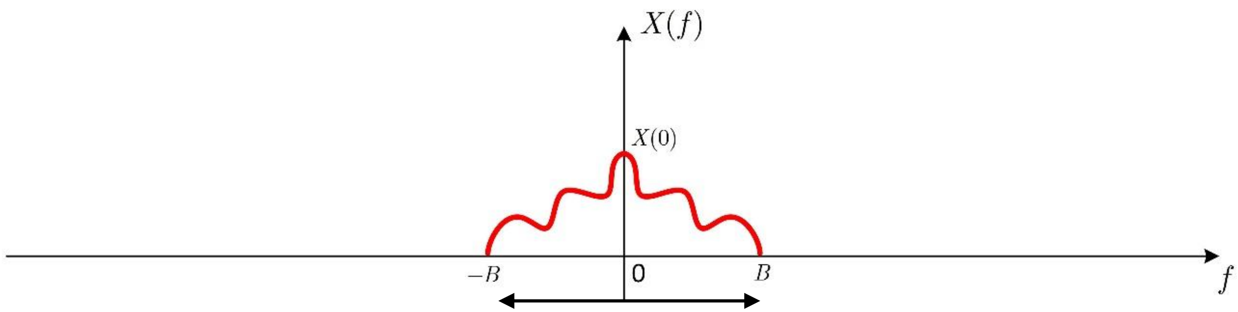
- <u>Θεώρημα του Shannon</u>: για την πλήρη και ακριβής ανακατασκευή ενός σήματος βασικής ζώνης (baseband signal) απαιτείται

$$f_s > 2f_{max} = 2B$$

<u>ΧΡΟΝΟΣ</u>



<u>ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ</u>



- <u>Διατύπωση</u>: για ένα σήμα βασικής ζώνης (baseband signal), χρειαζόμαστε συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα, $2B$, του σήματος

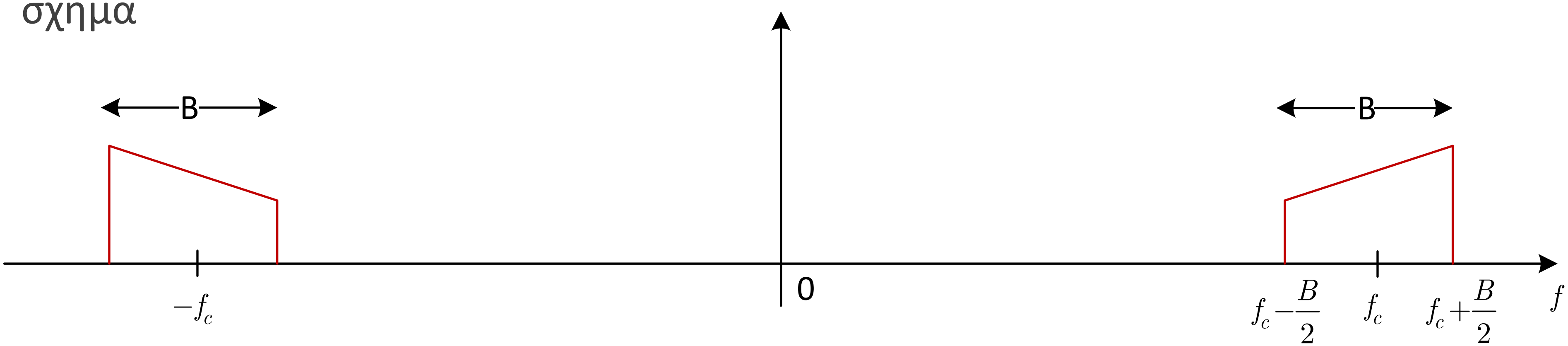
- ***<u>Εναλλακτικά</u>***: για ένα σήμα βασικής ζώνης (baseband signal), χρειαζόμαστε συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη του **εύρους ζώνης** του, $2B$

- Για ένα σήμα μη-βασικής ζώνης; ☺

- Δηλ. για ένα **ζωνοπερατό σήμα (bandpass signal)**;
  - Μήπως ισχύει κάτι διαφορετικό;

- **Δειγματοληψία – Ζωνοπερατή Δεγματοληψία**

- **Ζωνοπερατό** (bandpass) λέγεται ένα σήμα που το φασματικό του περιεχόμενο βρίσκεται σε ένα εύρος ζώνης $[-f_c - B, -f_c + B] \cup [f_c - B, f_c + B]$, όπως στο σχήμα



- Μια νέα δειγματοληψία που μπορούμε να εφαρμόσουμε εδώ ονομάζεται **ζωνοπερατή δειγματοληψία (bandpass sampling)**

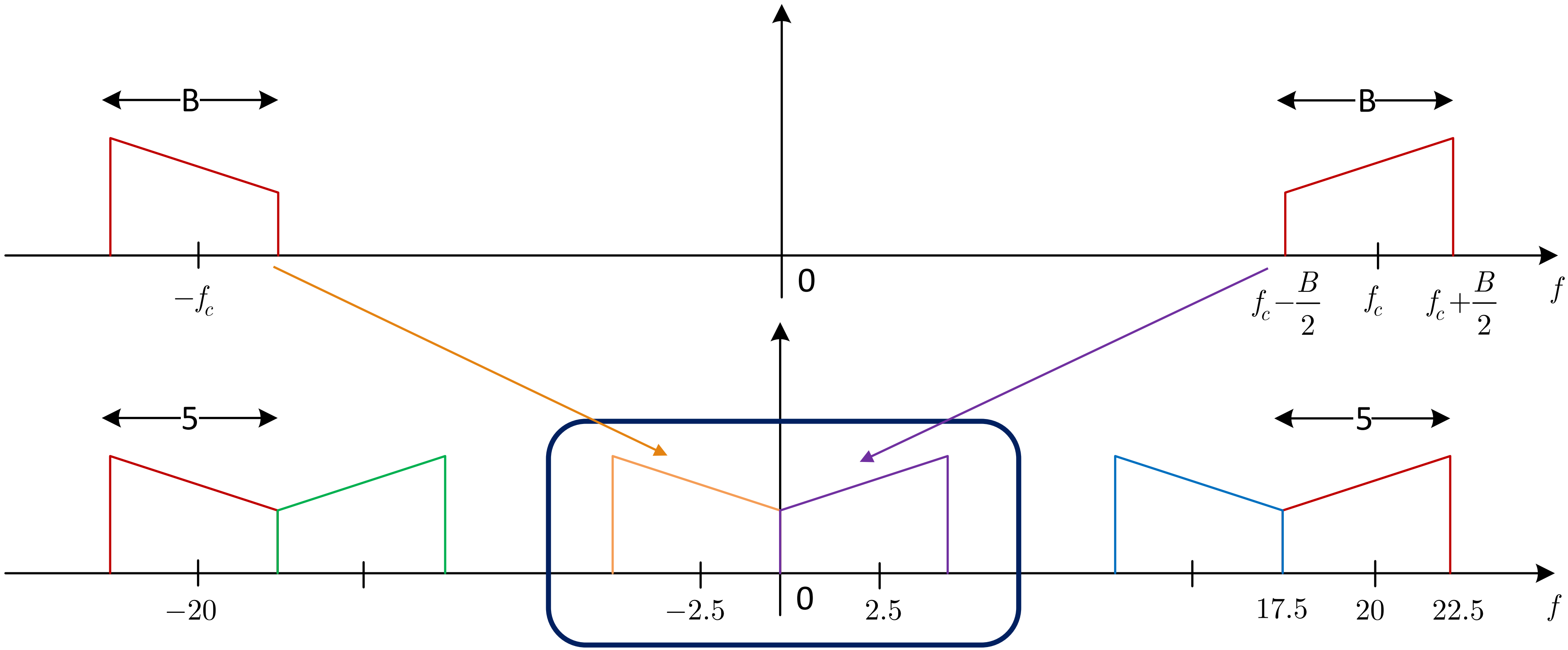
- Εδώ, το εύρος ζώνης του σήματος είναι ίσο με B

- Έστω $f_c = 20$ Hz και $B = 5$ Hz

- Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2\left(f_c + \frac{B}{2}\right) = 45$ Hz θα είναι ικανή να μας δώσει πίσω το αρχικό σήμα από τα δείγματά του

- Τι θα συμβεί αν δειγματοληπτήσουμε με π.χ. $f_s = 17.5$ Hz?

- **Δειγματοληψία – Ζωνοπερατή Δεγματοληψία**
- Τι θα συμβεί να δειγματοληπτήσουμε με π.χ. $f_s = 17.5$ Hz?

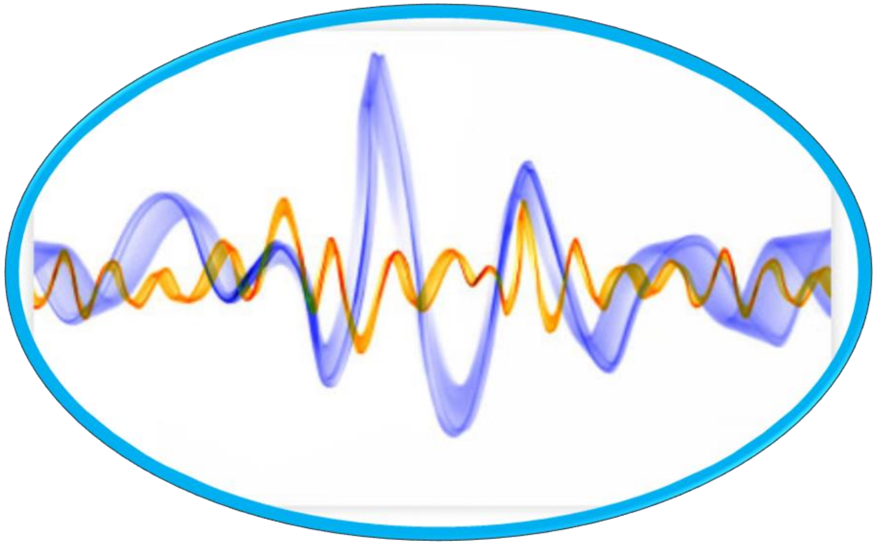


- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η συχνότητα δειγματοληψίας μπορεί να επιλεχθεί στο διάστημα

$$\frac{2f_c - B}{m} \geq f_s \geq \frac{2f_c + B}{m+1}$$

για m θετικό ακέραιο, υπό την προϋπόθεση ότι $f_s > 2B$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 4256

AM: 4238