HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 18Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace
- Δειγματοληψία

- **Η συνάρτηση μεταφοράς (review…)**

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

Κρουστική απόκριση $h(t) \leftrightarrow$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace (review…)**

- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$

- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace (review…)**

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
    - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - ○ Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - ○ Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος (review…)

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - …και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)}$$

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος (review…)

• Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμα του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i}, \qquad R_H$$

• Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος (review…)

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος (review…)

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \dots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

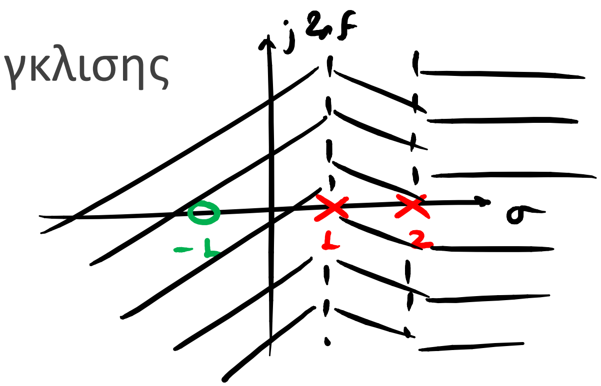
$$\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)$$

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**
- **Παράδειγμα:**

○ Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης



Είναι $H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-2)}$, δυο πόλοι: $s=1$, $s=2$

Πεδία Σύγκλισης:
- $\sigma > 2$
- $1 < \sigma < 2$
- $\sigma < 1$

Είναι $H(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$, με $A=-2$, $B=3$, οπότε:

$H(s) = -2\frac{1}{s-1} + 3\frac{1}{s-2}$, R_H ένα από τα παραπάνω τρία.

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**

- Παράδειγμα:

- $\sigma > 2$: $H(s) = 3\dfrac{1}{s-2} - 2\dfrac{1}{s-1}$, $\sigma > 2$ $\Rightarrow h(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{t}u(t)$.

  - $\underline{\sigma > 2}$ • $\underline{\sigma > 1}$
  - $\sigma < 2$ • $\sigma < 1$

  Δεξ.

- $\sigma < 1$: $H(s) = 3\dfrac{1}{s-2} - 2\dfrac{1}{s-1}$, $\sigma < 1$ $\Rightarrow h(t) = -3e^{2t}u(-t) + 2e^{t}u(-t)$

  - $\sigma > 2$ • $\sigma > 1$
  - $\underline{\sigma < 2}$ • $\underline{\sigma < 1}$

  Αριστ.

- $1 < \sigma < 2$: $H(s) = 3\dfrac{1}{s-2} - 2\dfrac{1}{s-1}$ $\Rightarrow h(t) = -3e^{2t}u(-t) - 2e^{t}u(t)$.

  - $\sigma > 2$ • $\underline{\sigma > 1}$
  - $\underline{\sigma < 2}$ • $\sigma < 1$

  Αμφ.

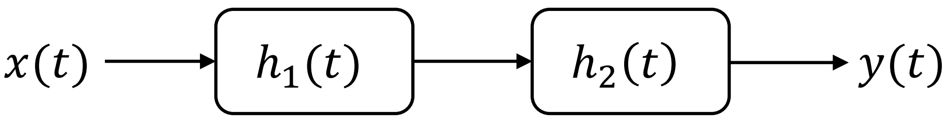
- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**
- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \Re_+$
- Ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος
- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα
- Άρα: **ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του**

- **Διατάξεις ΓΧΑ Συστημάτων**

- Διάταξη σε σειρά

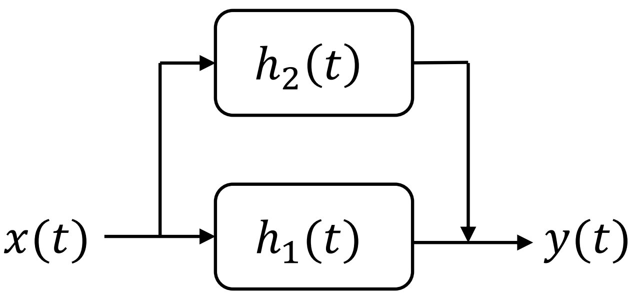


$$y(t) = \underbrace{\boxed{h_1(t) * h_2(t)}}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{\boxed{H_1(s)H_2(s)}}_{H_{total}(s)} X(s)$$

- Διάταξη σε παραλληλία



$$\begin{aligned} y(t) &= (h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)) \\ &= \underbrace{\boxed{\big(h_1(t) + h_2(t)\big)}}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{\boxed{\big(H_1(s) + H_2(s)\big)}}_{H_{total}(s)} X(s) \end{aligned}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) \to \infty$
- Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν πόλους και μηδενικά του συστήματος
  - Είναι μόνο αυτά??
- Για παράδειγμα, έστω $H(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}, \sigma > 3$
- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$
- Προσέξτε όμως ότι

$$\lim_{s\to\infty} H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\cancel{s}\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = \lim_{s\to\infty} \frac{\left(1-\frac{2}{s}\right)}{s\left(1-\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{1}{s}\right)} = 0$$

- Άρα υπάρχει **ένα** “έξτρα” μηδενικό στο άπειρο!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους και 2 μηδενικά**!

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**

- Γενικότερα

$$H(s) = A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-c_i)}{\prod_{k=1}^{N}(s-d_k)} = A\frac{s^M\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{s^N\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)} = As^{M-N}\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{c_i}{s}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{d_k}{s}\right)}$$

- Αν $M > N \Leftrightarrow M - N > 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M - N$ πόλοι
- Αν $M < N \Leftrightarrow M - N < 0$, και τότε $\lim_{s\to\infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N - M$ μηδενικά
- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο

- Άρα :

- **Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών**

$$\#\,\textbf{πόλων} = \#\,\textbf{μηδενικών}$$

- **Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς**
- **Παράδειγμα:**

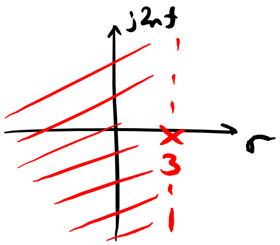
○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $s = 3$

a) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας?

b) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα?

c) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα?

d) Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα?



α) Όχι, γιατί τα πεπερασμένης διάρκειας σήματα δεν έχουν πόλους.

β) Ναι, αφού το $\int |h(t)| dt < +\infty$ δηλώνει ότι το ROC περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, άρα το ROC είναι προς τα αριστερά:
Προϋπόθεση για το παραπάνω είναι να μην υπάρχει άλλος πόλος με $-\infty < \sigma_p < 0$ ή να υπάρχουν πόλοι μόνο με $0 < \sigma_p < 3$.

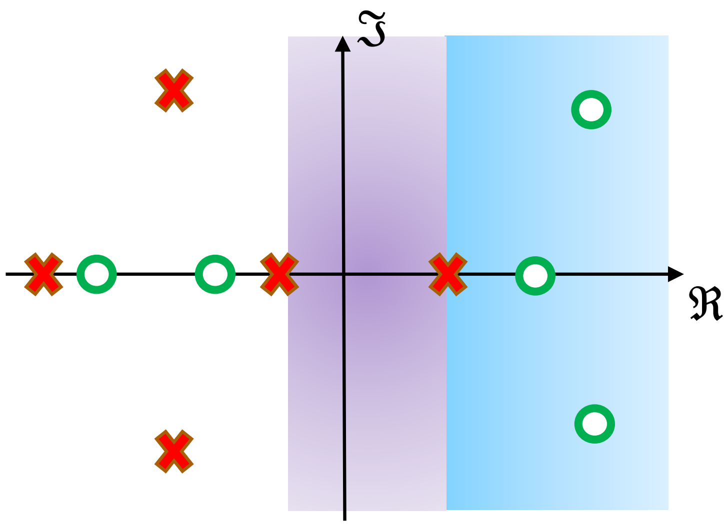
γ) Όχι, λόγω β).

δ) Ναι, αν υπάρχουν πόλοι με $-\infty < \sigma_p < 0$.

- **Ευστάθεια και Αιτιατότητα**

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια ***ρητή*** συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε αιτιατό, αντι-αιτιατό, ή μη αιτιατό σύστημα (κρουστική απόκριση)
  - Ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης

- Έστω το ακόλουθο διάγραμμα πόλων-μηδενικών που αντιστοιχεί σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς



- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα αιτιατό?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα ευσταθές?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι **και** αιτιατό **και** ευσταθές? ☹

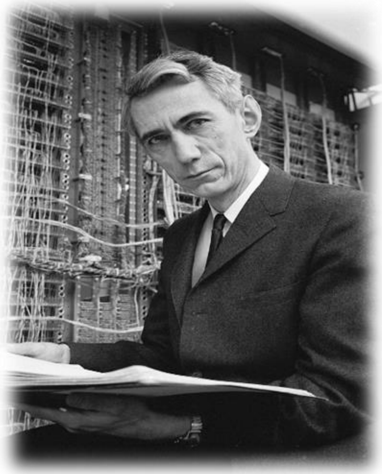
- Για να είναι ένα σύστημα **ευσταθές και αιτιατό, πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου**

- Εναλλακτικά, **όλοι οι πόλοι θα πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος**

- **Δειγματοληψία**

- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα - samples*) ένα σήμα συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)



- Ας δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό…

- **Δειγματοληψία**

- Θέλουμε να αποθηκεύσουμε ένα σήμα $x(t)$ σε έναν Η/Υ

- Προφανώς δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις *άπειρες* τιμές του
  - Ακόμα κι αν αυτό είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα

- Πρέπει να πάρουμε μερικά **δείγματα** του σήματος $x(t)$
  - Τιμές: $x(-20), x(-1), x(0), x(10), x\left(\sqrt{152}\right), x(62.7)$, κ.ο.κ

- Τα δείγματα αυτά θέλουμε να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ξανά ***ακριβώς*** το σήμα συνεχούς χρόνου

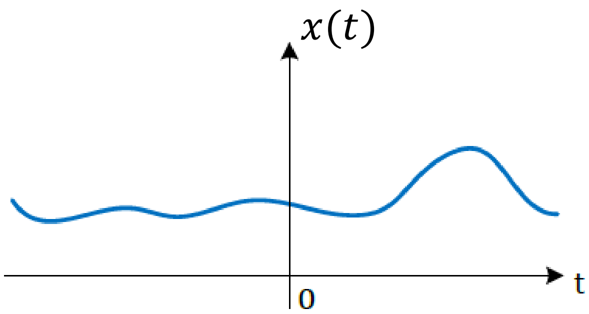
- **Ερώτημα Ι**: *ποιες* τιμές πρέπει να πάρουμε;
  - Όποιες θέλουμε? Κάποιες συγκεκριμένες? Έχει σημασία?

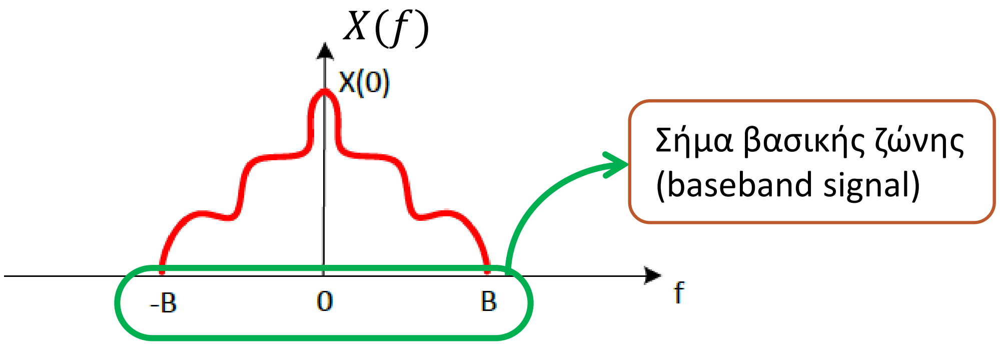
- **Ερώτημα ΙΙ**: *πόσο συχνά* πρέπει να τις πάρουμε;
  - Μια τιμή-δείγμα κάθε δευτερόλεπτο? Πιο συχνά? Λιγότερο συχνά? Έχει σημασία?

- Ας υποθέσουμε ότι θα δειγματοληπτήσουμε ***ομοιόμορφα*** και ότι το σήμα μας είναι σήμα ***βασικής ζώνης (baseband signal)***
  - Δηλ. με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ των δειγμάτων και θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος είναι μη μηδενικός γύρω από ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, π.χ. $X(f) \neq 0,\ f \in [-B, B]$

- **Δειγματοληψία**

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ και ο μετασχ. Fourier του $X(f)$ όπως στο σχήμα





- Για να «τραβήξουμε» δείγματα από το σήμα $x(t)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη δειγματοληπτική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

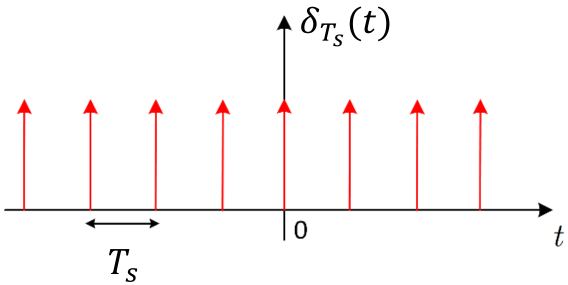
- Ας ορίσουμε μια **συνάρτηση δειγματοληψίας με περίοδο δειγματοληψίας $\boldsymbol{T_s}$**

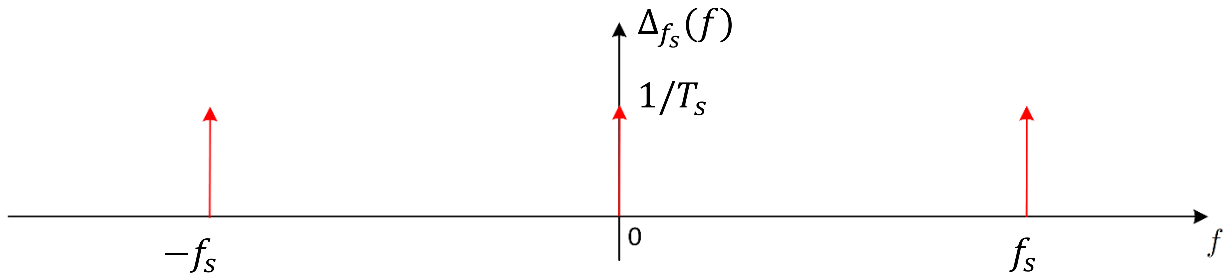
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f-kf_s)$$

- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** είναι $\boldsymbol{f_s = 1/T_s}$

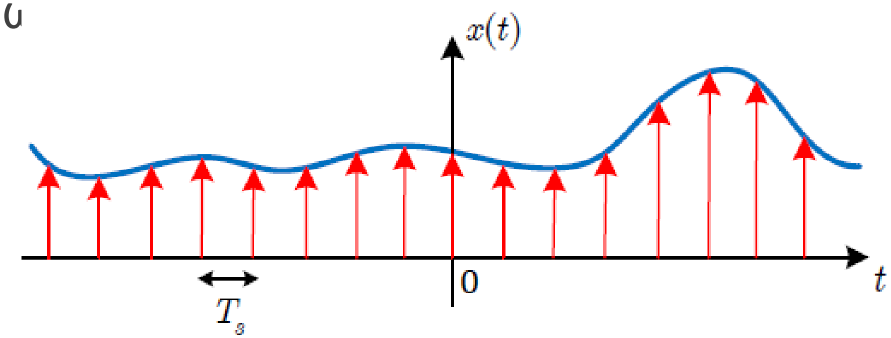
- **Δειγματοληψία**

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

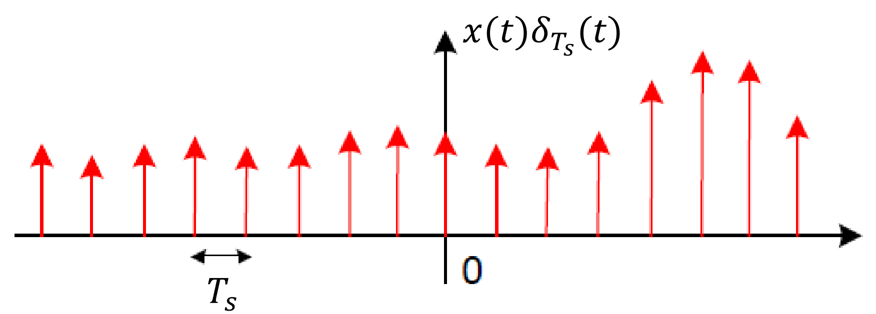




- Το γινόμενο της $\delta_{T_s}(t)$ με το σήμα $x(t)$ θα δ
  μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με *μη μοναδιαίους* συντελεστές
  - Συναρτήσεις δέλτα που η επιφάνειά τους έχει αλλάξει με βάση το σήμα



- Τα δείγματα απέχουν χρόνο T_s μεταξύ τους
  - Ας υποθέσουμε ότι αυτή η τιμή είναι «αρκετά μικρή»
  - Οπότε η $f_s = 1/T_s$ «αρκετά μεγάλη»



- **Δειγματοληψία**
- Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των δυο σημάτων στο χρόνο θα μετατραπεί σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας
- Δηλ.

$$x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

και

$$X(f) * \Delta_{f_s}(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}X(f-kf_s)$$

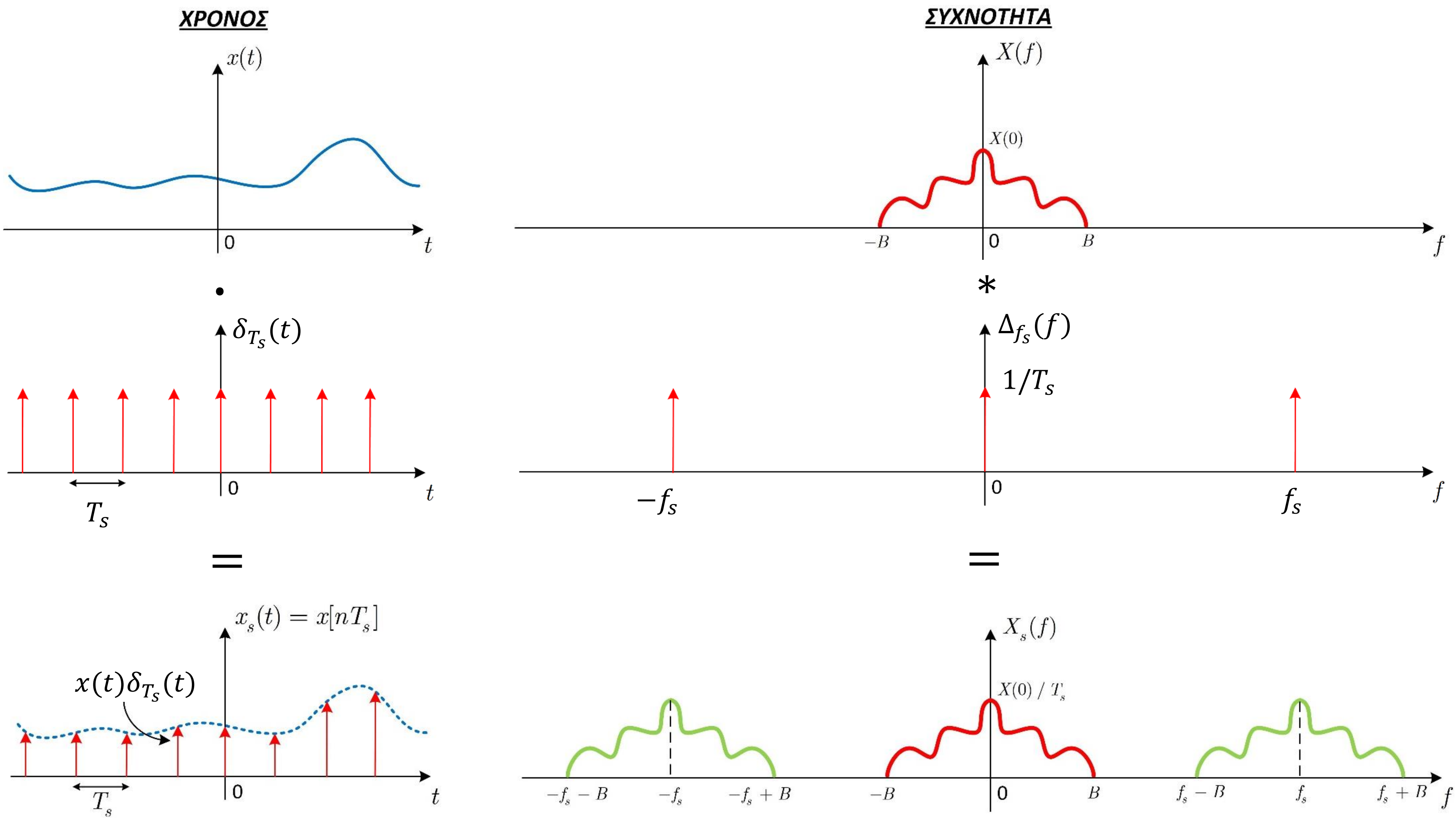
λόγω της ιδιότητας

$$X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$$

- Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα από τους μετασχηματισμούς Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου, τοποθετημένους σε απόσταση f_s (ανά δυο) μεταξύ τους!!
- Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι **περιοδικός** στη συχνότητα με περίοδο f_s!!!

- **Δειγματοληψία**

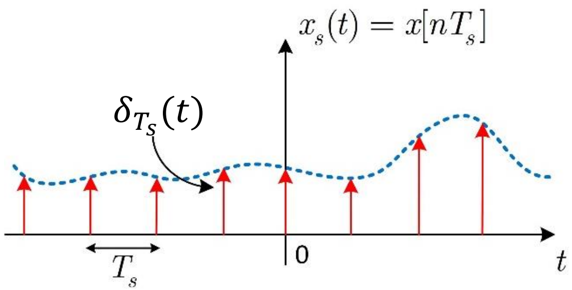
- Σχηματικά, έχουμε την παρακάτω εικόνα:

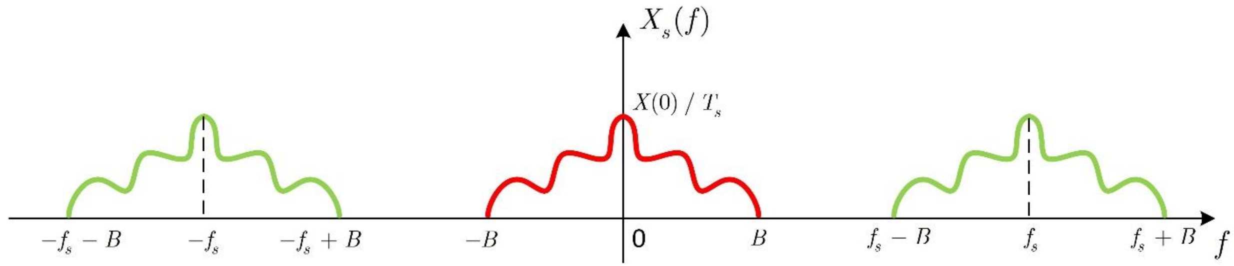


- **Δειγματοληψία – Ανακατασκευή**

- Έχουμε τώρα τα δείγματα από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου
  - Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου

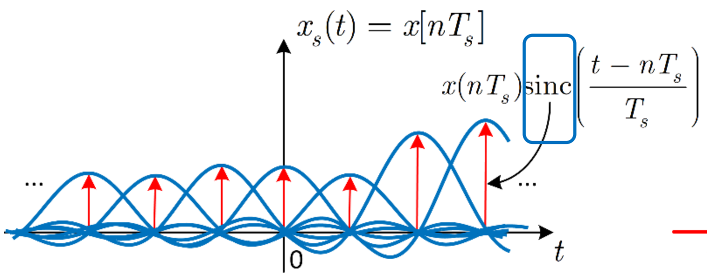
- Πως θα ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?

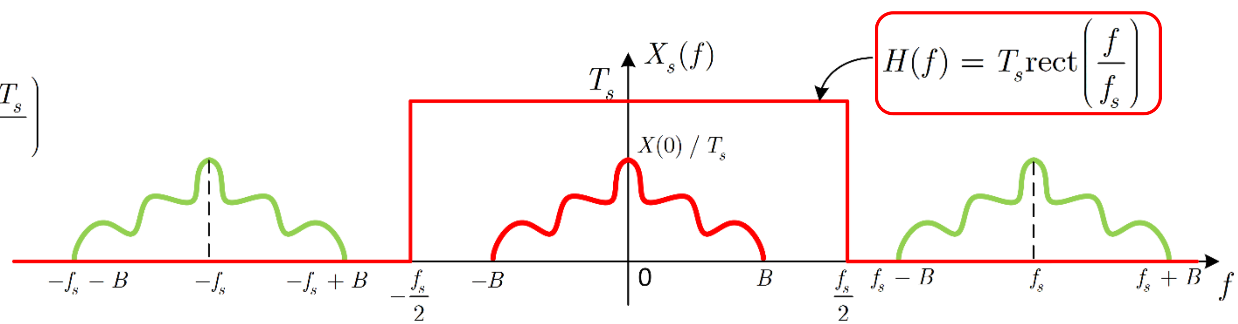




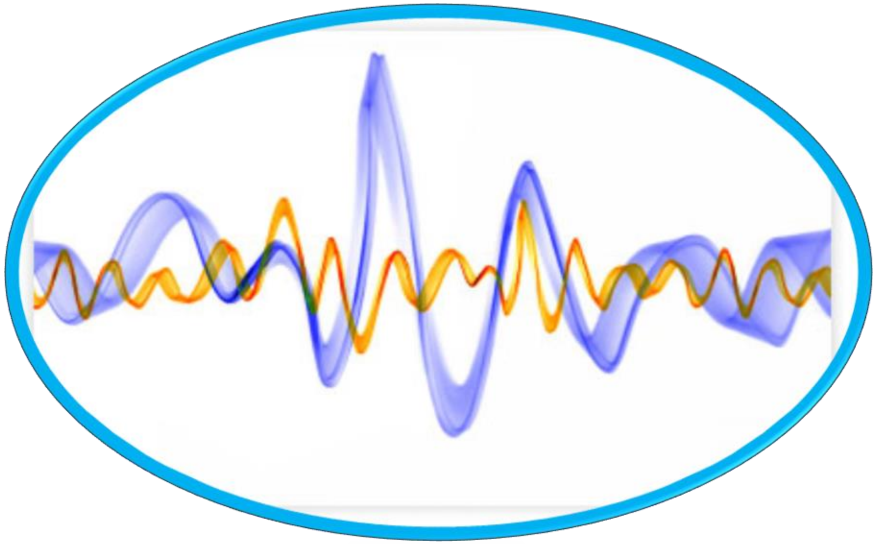
- Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο θα μπορούσε να απομονώσει το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου

- Το γινόμενο του φίλτρου με το φάσμα στη συχνότητα αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο χρόνο των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$!!!!





Συνεχίζεται...



E.BA.

AM: 4238: 1

AM: 3574: 1

AM: 4220 : 1