ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 17Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

- **Η συνάρτηση μεταφοράς**

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

Κρουστική απόκριση $h(t) \leftrightarrow$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**
- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **Ν το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$
- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

- ❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος
- ❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- ❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - ○ Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - ○ Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)}$$

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμα του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i}, \qquad R_H$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- **Παράδειγμα:**

  - Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

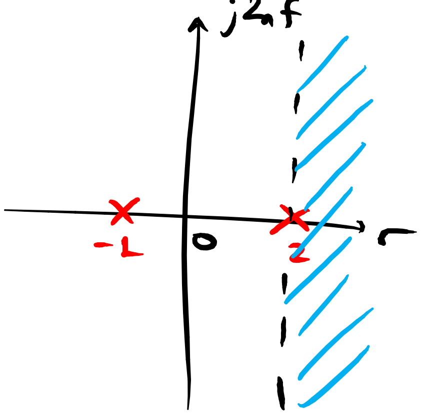
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι <u>αιτιατό</u>.

Το ROC θα είναι "δεξιόπλευρο"

$$\Uparrow$$

$$h(t) = 0,\ t<0$$



Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

$$\Updownarrow \mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 - s - 2\right) = X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

Πόλοι: $s=2$, $s=-1$

με $\sigma > 2$, αφού είναι αιτιατό.

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

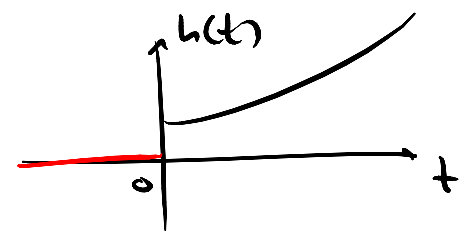
- Παράδειγμα:

Μερικά κλάσματα: $H(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$, με $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$

άρα $H(s) = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\substack{\bullet\ \underline{\sigma>2} \\ \bullet\ \sigma<2}} - \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\substack{\bullet\ \underline{\sigma>-1} \\ \bullet\ \sigma<-1}}$, $\sigma > 2$.

$\{\sigma>2\} \cap \{\sigma>-1\} = \{\sigma>2\}$

Οπότε $H(s) = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{s-2}}_{\sigma>2} - \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\sigma>-1}$, και από γνωστούς πίνακες



έχουμε

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}, \ \sigma>a$$

που είναι αιτιατό $(h(t)=0,\ t<0)$ όπως αναμενόταν.

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

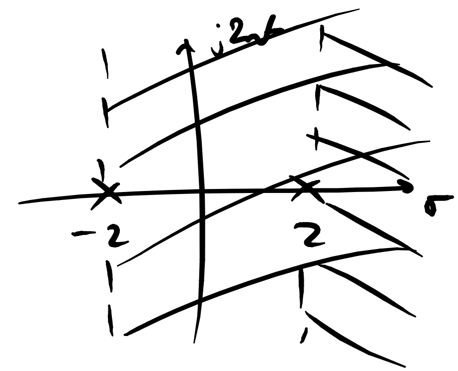
- **Παράδειγμα:**
  - Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $\underline{x(t) = e^{-2t}u(t)}$

Βρήκαμε πριν ότι

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \quad \sigma > 2$$

Ξέρουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} &Y(s) = H(s)X(s) \\ &x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}, \quad \sigma > -2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$



$$\Longrightarrow Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)}, \quad R_Y = R_X \cap R_H = \{\sigma > 2\} \cap \{\sigma > -2\}$$
$$= \sigma > 2.$$

Μερικά Κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}, \quad \text{με } A = \frac{1}{12}, \ B = -\frac{1}{3}, \ C = \frac{1}{4}$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:
  - Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$

Οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}, \quad \sigma > 2$$

$$\frac{\bullet\ \sigma>2}{\bullet\ \sigma<2} \qquad \frac{\bullet\ \sigma>-1}{\bullet\ \sigma<-1} \qquad \frac{\bullet\ \sigma>-2}{\bullet\ \sigma<-2}$$

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t)$$

που είναι δεξιόπλευρο (και αιτιατό) όπως αναμενόταν.

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -a$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \ldots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)}$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) \xleftrightarrow{L} s^n Y(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-)$$

- **Παράδειγμα:**

○ Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\underline{\frac{d^2}{dt^2}y(t)} + 5\underline{\frac{d}{dt}y(t)} + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2,\ y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$

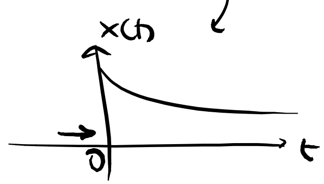
Είναι:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \xleftrightarrow{L} s^2Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{2-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-) = s^2Y(s) - s\overbrace{y(0^-)}^{2} - s^0\cdot\overbrace{y'(0^-)}^{1}$$

$$= s^2Y(s) - 2s - 1$$

$$\frac{d}{dt}y(t) \xleftrightarrow{L} sY(s) - \sum_{i=1}^{1} s^{1-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-) = sY(s) - s^0y(0^-) = sY(s) - 2$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{L} sX(s) - s^0\cancel{x(0^-)}^{\,0} = sX(s) - 0 = sX(s)$$



$$e^{-4t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+4},\ \sigma > -4$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

Οπότε:

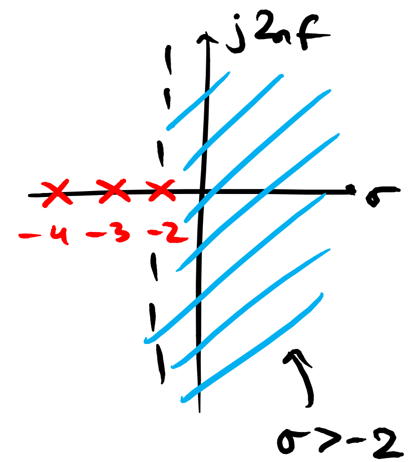
$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5\left(sY(s) - 2\right) + 6Y(s) = X(s) + sX(s)$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = X(s) + sX(s)$$

$$Y(s)\left(s^2 + 5s + 6\right) - 2s - 11 = X(s)(1+s)$$

$$= \frac{s+1}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$



Άρα

$$Y(s) = \frac{13}{2}\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+4}, \quad \sigma > -2$$

οπότε

$$y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t).$$

Συνεχίζεται...