HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

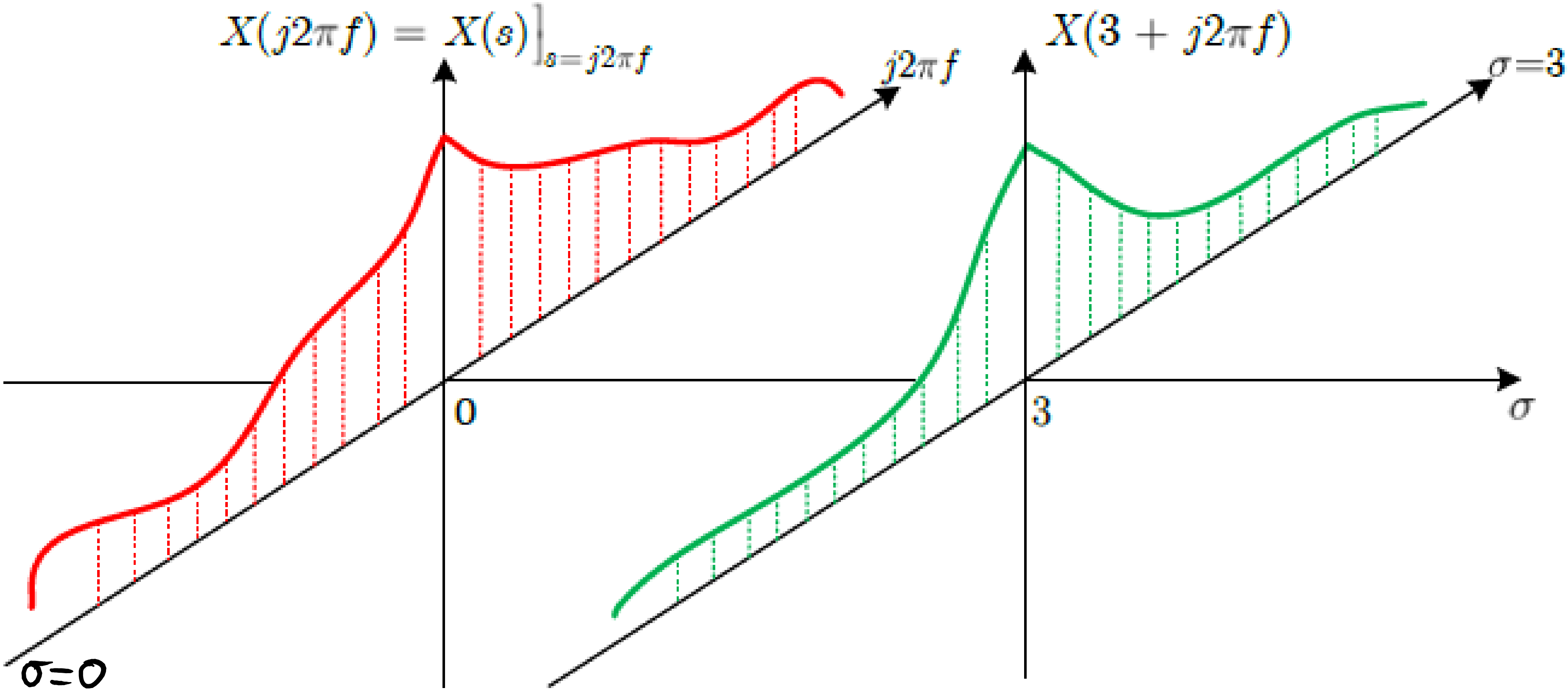
- Μετασχηματισμός Laplace

• Μετασχηματισμός Laplace (review)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)} e^{-st} dt$$

$s = \sigma + j2\pi f$

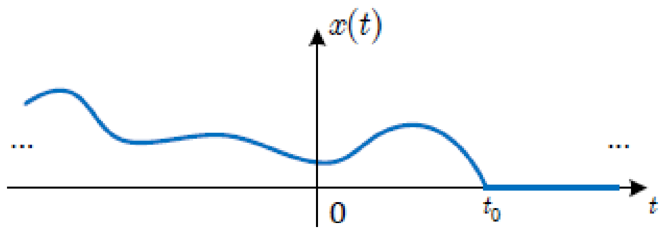
Re Im



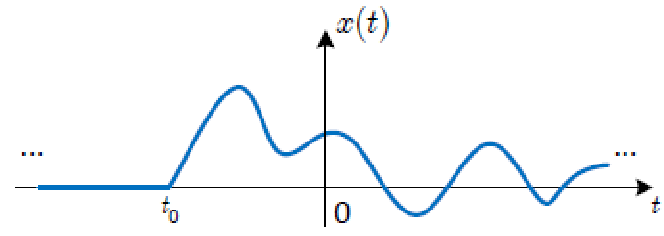
- **Μετασχηματισμός Laplace (review)**

- Ορισμός Μετασχ. Laplace

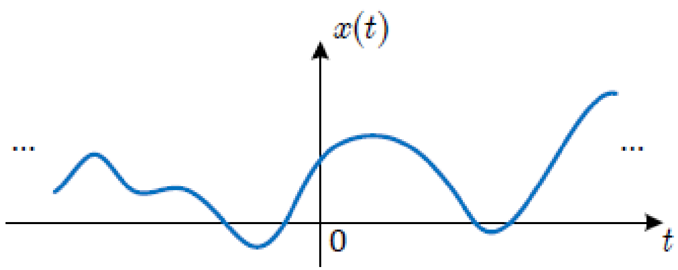
$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$



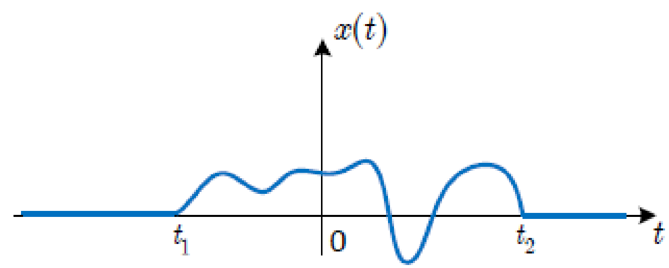
(α΄) Αριστερόπλευρο σήμα.



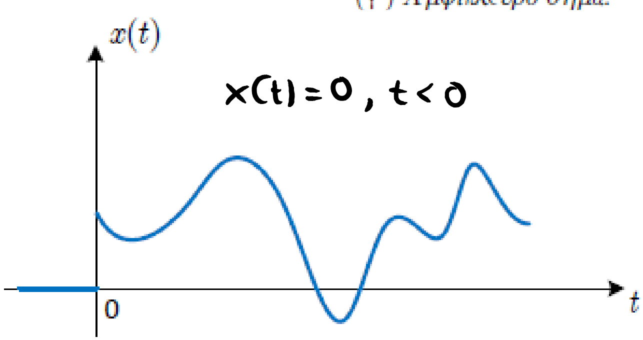
(β΄) Δεξιόπλευρο σήμα.



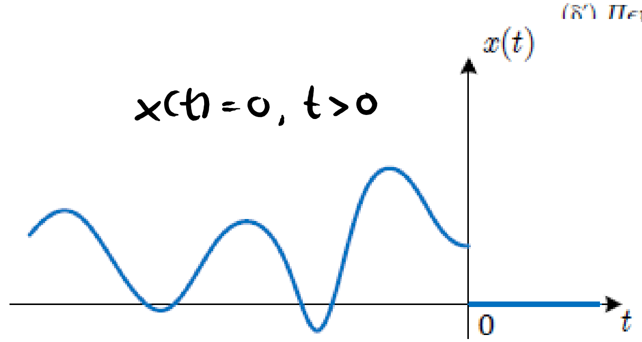
(γ΄) Αμφίπλευρο σήμα.



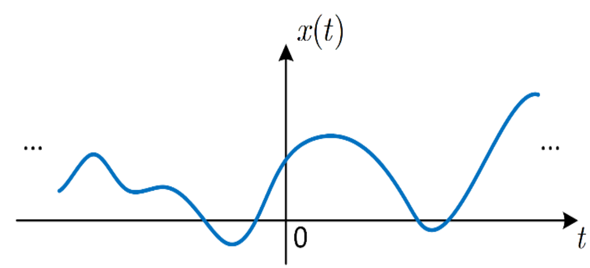
(δ΄) Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.



(α΄) Αιτιατό Σήμα.



(β΄) Αντι-αιτιατό σήμα.



(γ΄) Μη-αιτιατό σήμα

- **Μετασχηματισμός Laplace (review)**

Πεδία Σύγκλισης

- Γνωστά ζεύγη

$$x(t) = e^{at}u(t), \qquad a \in \Re \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s-a}, \qquad \sigma > a$$

$$x(t) = -e^{bt}u(-t), \qquad b \in \Re \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s-b}, \qquad \sigma < b$$

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}\, u(-t), a, b \in \Re \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)}, a < \sigma < b$$

$$x(t) = \delta(t) \;\leftrightarrow\; X(s) = 1, \qquad \forall s$$

- **Μετασχηματισμός Laplace (review)**
- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

- **Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης**
- Ιδιότητες:

1. Ένα πεδίο σύγκλισης δεν περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
   a) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   b) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου αριστερά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   c) Μια λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
   d) Όλο το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f} = X(\sigma + j2\pi f)\Big|_{\sigma=0}$$

- Άρα ο Μετασχ. Fourier είναι μια «**υποπερίπτωση**» του μετασχ. Laplace?
- Άρα ο μετασχ. Laplace είναι μια «**γενίκευση**» του μετασχ. Fourier?
- Η αλήθεια είναι ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να προκύψει εκτιμώντας το μετασχ. Laplace επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. για $s = j2\pi f$
- Όπως και ότι μπορούμε – μερικές φορές – να πάρουμε το μετασχ. Laplace από το μετασχ. Fourier θέτοντας $j2\pi f = s$
- Όμως κάποια πράγματα θέλουν προσοχή… ☺

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- **1.** Για να γίνει η εκτίμηση $X(f) = X(s)|_{s=j2\pi f}$ πρέπει το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace να περιέχει το φανταστικό άξονα

- **2.** Ακόμα κι αν δεν τον περιέχει, δε σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει
  - Απλώς δεν υπολογίζεται μέσω του μετασχ. Laplace
  - Μπορεί να υπάρχει μέσω συναρτήσεων Δέλτα π.χ.

- **3.** Αν το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier συγκλίνει, τότε ο μετασχ. Laplace υπάρχει για κάποιο πεδίο σύγκλισης και μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $j2\pi f = s$
  - Για παράδειγμα, όταν ο μετασχ. Fourier είναι ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$
  - Ενώ αν χρησιμοποιούμε γενικευμένες συναρτήσεις $(\pi.\chi.\, \delta(t))$, η γενίκευση αυτή δε δουλεύει

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

- Βρήκαμε πριν ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{a + s}, \sigma > -a$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) = X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Αντίθετα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \sigma > 0$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) \neq X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) \neq X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

- Ο λόγος είναι ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού δεν περιέχει το φανταστικό άξονα, αλλά και το ότι ο μετασχ. Fourier δεν προκύπτει από σύγκλιση του ορισμού
    - Χρειαζόμαστε γενικευμένη συνάρτηση για τη σύγκλιση

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- Πέρα όμως από τις τυπικές μαθηματικές σχέσεις, τι άλλο υπάρχει?
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$ για $a = 2$ και $a = 4$
- Προφανώς μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

και

$$X(s) = \frac{1}{a + s} \Rightarrow |X(s)| = \frac{1}{\sqrt{(a+\sigma)^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

- Ας απεικονίσουμε τις δυο περιπτώσεις για τις διαφορετικές τιμές του a
- Προσέξτε ότι το $s = -a$ είναι ο πόλος του μετασχηματισμού Laplace!

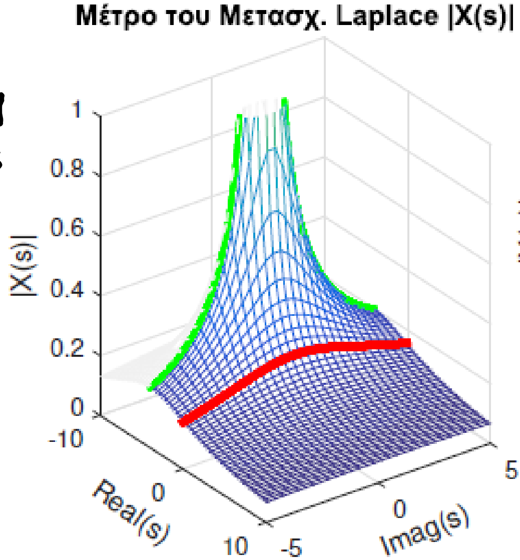
- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

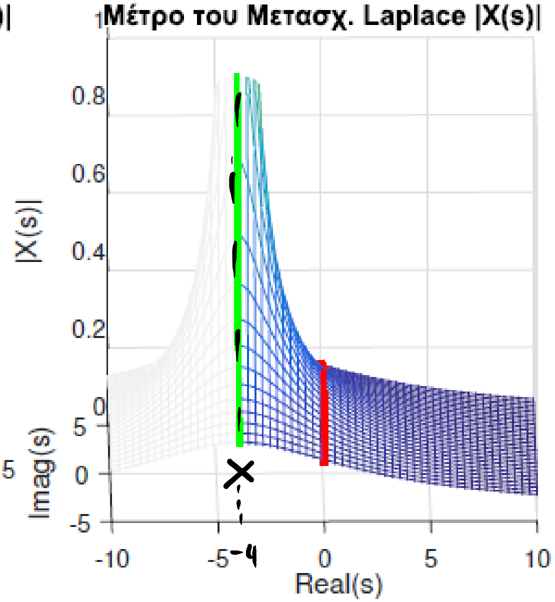
$$\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-at}u(t),\ a>0$$

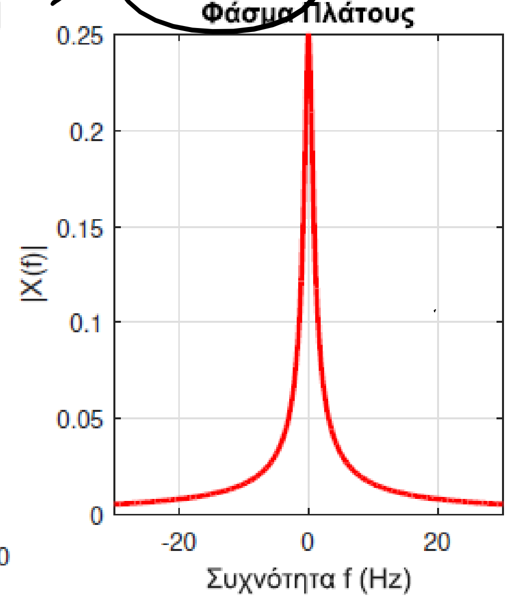
$$\sigma > -a$$

$a=4$

$s=-4$ πόλος

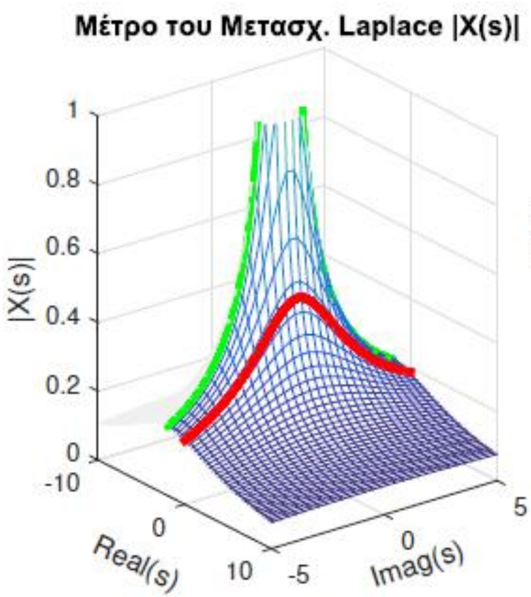


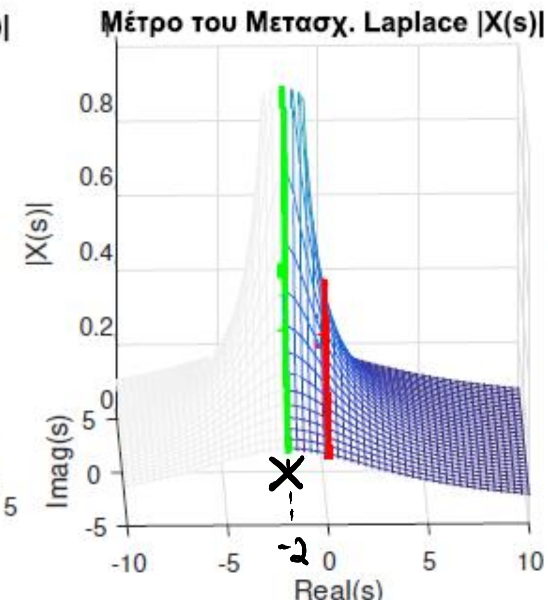


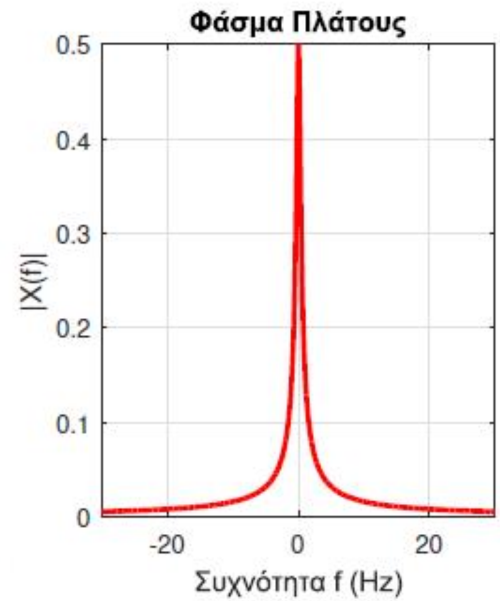


$a=2$

$s=-2$ πόλος







• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$,	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n-οστη παραγώγιση στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

- Απόδειξη: $z(t) = Ax(t) + By(t)$

$$Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-st} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} Ax(t) e^{-st} dt}_{\substack{L\{Ax(t)\} \\ \| \\ AX(s) \\ R_x}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} By(t) e^{-st} dt}_{\substack{L\{By(t)\} \\ \| \\ BY(s) \\ R_y}}$$

$$R_z \supseteq R_x \cap R_y$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

  - Βρείτε το μετασχ. Laplace του αθροίσματος των σημάτων

$$X(s) = \frac{1}{s-2}, \sigma > 2 \ , \qquad Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)}, \sigma > 2$$

$$X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{s-1-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{\cancel{s-2}}{(s-1)\cancel{(s-2)}}$$

$$= \frac{1}{s-1} \rightarrow \boxed{\sigma > 1}, \quad \rightarrow \sigma < 1$$

Οπότε $X(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$, $\sigma > 1$, που είναι υπερσύνολο του $\sigma > 2$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x

• Απόδειξη:

$$z(t) = x^*(t), \quad Z(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-st} dt =$$

$$= \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-s^* t} dt}_{X(s^*)} \Big)^* = X^*(s^*)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

○ Έστω ένα σήμα $x(t) \in \Re$ με ρητό Μετασχ. Laplace $X(s)$. Για το σήμα γνωρίζετε ότι:

- έχει έναν πόλο στη θέση $s_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi}{3}}$ κι έναν πόλο στη θέση s_2
- έχει ένα μηδενικό στη θέση $s_3 = -1$
- $X(0) = 2$

Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε για το $X(s)$

Αφού $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow x(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{L} \boxed{X(s) = X^*(s^*)}$

Αν το $s = s_0$ είναι πόλος του $X(s)$, δηλ. $X(s_0) \to +\infty$, τότε θα ισχύει ότι το $s = s_0^*$ είναι επίσης πόλος του $X(s)$. Άρα οι πόλοι του μετασχ. Laplace ενός πραγματικού σήματος $x(t)$ έρχονται σε συζυγή ζεύγη!

Άρα αφού $s_1 =$ πόλος, $s_2 = s_1^* =$ επίσης πόλος $= \frac{1}{2} e^{-j\pi/3}$. Επίσης, με όμοιο τρόπο δείχναμε ότι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή ζεύγη!

Οπότε η μορφή του Μετασχ. Laplace θα είναι:

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

$$X(s) = A\frac{s+1}{\left(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)} = A\frac{s+1}{s^2-\frac{1}{2}se^{-j\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}se^{j\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{4}} =$$

$X(0)=2$

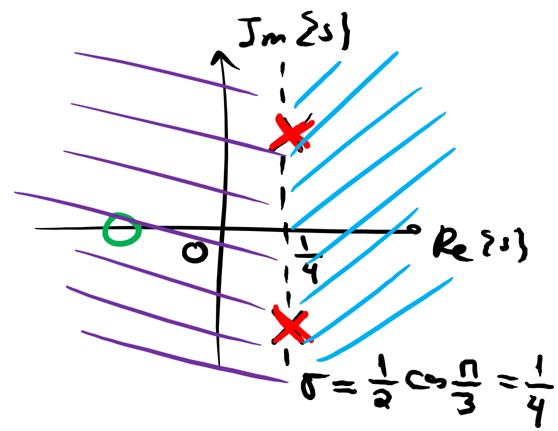
$$= A\frac{s+1}{s^2-\frac{1}{2}s\left(e^{j\frac{\pi}{3}}+e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)+\frac{1}{4}} = A\frac{s+1}{s^2-\frac{1}{\cancel{2}}s\cdot\cancel{2}\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}}$$

$$= A\frac{s+1}{s^2-\cos\frac{\pi}{3}\cdot s+\frac{1}{4}}$$

Για $s=0$, $X(0) = A\frac{0+1}{0^2-0+\frac{1}{4}} = 4A = 2 \Rightarrow \boxed{A = 1/2}$

Άρα τελικά,

$$X(s) = 1/2\,\frac{s+1}{s^2-\cos\frac{\pi}{3}\cdot s+\frac{1}{4}}, \quad R_x = ?$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Ιδιότητα	**Σήμα**	**Μετασχημ. Laplace**	**ROC**
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$

• Απόδειξη:

Όμοια με Μετασχ. Fourier

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

○ Έστω δυο σήματα $x(t) = e^{at}u(t),\ y(t) = e^{2at}u(t)$. Υπολογίστε τη συνέλιξη τους.

Ιδιότητα : $x(t) * y(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s)Y(s)\ ,\ R \supseteq R_x \cap R_y$

$$X(s) = L\{x(t)\} = \frac{1}{s-a}\ ,\ \sigma > a$$

$$Y(s) = L\{y(t)\} = \frac{1}{s-2a}\ ,\ \sigma > 2a$$

$\rightarrow R_x \cap R_y = \{\sigma > 2a\} = R_{x*y}$

Οπότε

$$X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-a)(s-2a)} \overset{\text{PFE}}{=\!=} \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-2a}\ ,\ t^{\varepsilon}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{(s-a)}(s-2a)}\cancel{(s-a)}\Big]_{s=a} = \frac{1}{s-2a}\Big]_{s=a} = \frac{1}{a-2a} = -\frac{1}{a}$$

$$B = \frac{1}{(s-a)\cancel{(s-2a)}}\cancel{(s-2a)}\Big]_{s=2a} = \frac{1}{s-a}\Big]_{s=2a} = \frac{1}{a}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}, \ \sigma > a$$

$$\cancel{-e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}}, \ \sigma < a$$

Οπότε έχουμε

$$Y(s)X(s) = -\frac{1}{a}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{a}\frac{1}{s-2a}$$

$$R_1 \begin{cases} \bullet\ \underline{\sigma > a} \\ \bullet\ \sigma < a \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \bullet\ \underline{\sigma > 2a} \\ \bullet\ \sigma < 2a \end{matrix}\right\} R_2$$

Θέλουμε οι επιλογές των πεδίων σύγκλισης να είναι τέτοιες ώστε η τομή τους να είναι $\{\sigma > 2a\} = R_{x*y}$

Θέλω δηλαδή $R_1 \cap R_2 = \{\sigma > 2a\}$, άρα επιλέγω $R_1 = \{\sigma > a\}$

$R_2 = \{\sigma > 2a\}$

Άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι:

$$x(t) * y(t) = -\frac{1}{a}e^{at}u(t) + \frac{1}{a}e^{2at}u(t)$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{2at} - e^{at}\right)u(t)$$

- **Ο Μονόπλευρος Μετασχ. Laplace**

$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$: δίπλευρος

- Μονόπλευρος μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Ουσιαστικά αποτελεί το μετασχ. Laplace που ξέρουμε ήδη, αλλά για αιτιατά σήματα
- Κάποιες ιδιότητες είναι λίγο διαφορετικές

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big]_{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2}-e^{-sT/2})$	Όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}>0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\}<0$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$e^{-a\|t\|},\ a>0$	$\frac{2a}{a^2-s^2}$	$a > \mathrm{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$t\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-(2\pi f_0)^2}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}, \qquad \sigma < -2$$

$$s^2-3s-10=0 \Longrightarrow \Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = (-3)^2-4\cdot1\cdot(-10) = 9+40 = 49$$

Οπότε

$$s_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{49}}{2} = \frac{3\pm7}{2} \quad \begin{cases} s_1 = 5 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-5}, \text{ με}$$

$$A = \frac{s+7}{\cancel{(s+2)}(s-5)}\cancel{(s+2)}\Big]_{s=-2} = \frac{s+7}{s-5}\Big]_{s=-2} = \frac{5}{-7} = -\frac{5}{7}$$

$$B = \frac{s+7}{s+2}\Big]_{s=5} = \frac{12}{7}$$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Έτσι,

$$X(s) = -\frac{5}{7}\frac{1}{s+2} + \frac{12}{7}\frac{1}{s-5}$$

$$R_1 \begin{cases} \bullet\ \sigma > -2 \\ \bullet\ \underline{\sigma < -2} \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \bullet\ \sigma > 5 \\ \bullet\ \underline{\sigma < 5} \end{matrix}\right\} R_2$$

$$\{\sigma < -2\} \supseteq R_1 \cap R_2$$

$$R_1 \downarrow \sigma < -2 \qquad R_2 \downarrow \sigma < 5$$

$$\rightarrow -e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a},\ \sigma < a$$

Από γνωστά ζεύγη, έχουμε:

$$x(t) = -\frac{5}{7}\left(-e^{-2t}u(-t)\right) + \frac{12}{7}\left(-e^{5t}u(-t)\right)$$

$$= \left(\frac{5}{7}e^{-2t} - \frac{12}{7}e^{5t}\right)u(-t).$$

Ζεύγη
Ιδιότητες

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}, \sigma > 0$$

Έχουμε $X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{\frac{1}{s^2+4}}{s} = \frac{X_1(s)}{s}$, με $X_1(s) = \frac{1}{s^2+4}$, $\sigma>0$

Γνωρίζω ότι $\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X_1(s)}{s}, \ \sigma>0$

Άρα $X_1(s) = \frac{1}{s^2+4}, \ \sigma>0 \xleftrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x_1(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)u(t)$

Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\sin(2\tau)u(\tau)d\tau$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

Ζεύγη

Ιδιότητες

- Παράδειγμα:

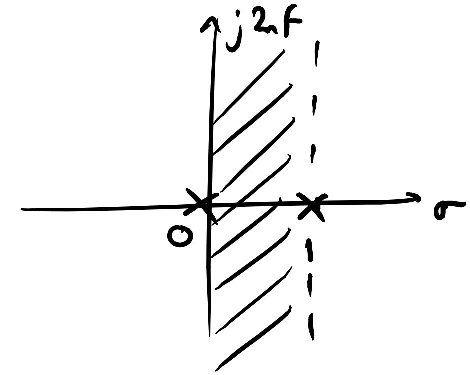
$$= \int_0^t \frac{1}{2}\sin(2\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2\tau)\right)\Big]_0^t = -\frac{1}{4}\left(\cos(2\tau)\right)\Big]_0^t$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos(2t)-1\right) = \frac{1}{4}\left(1-\cos(2t)\right),\ t>0$$

Έτσι

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(1-\cos(2t)\right)u(t)$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**



- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2+2}{s^3-s}, \qquad 0 < \sigma < 1$$

Είναι $X(s) = \dfrac{s^2+2}{s(s^2-1)} = \dfrac{s^2+2}{s(s+1)(s-1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{\Gamma}{s-1}$, με

$$\left.\begin{aligned} A &= \left.\frac{s^2+2}{(s+1)(s-1)}\right]_{s=0} = \frac{2}{-1} = -2 \\ B &= \left.\frac{s^2+2}{s(s-1)}\right]_{s=-1} = \frac{3}{(-1)\cdot(-2)} = \frac{3}{2} \\ \Gamma &= \left.\frac{s^2+2}{s(s+1)}\right]_{s=1} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα:

$$\rightarrow X(s) = -2\frac{1}{s} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s-1}, \ \mu\varepsilon \ 0<\sigma<1$$

- $\underline{\sigma>0}$ • $\underline{\sigma>-1}$ • $\sigma>1$
- $\sigma<0$ • $\sigma<-1$ • $\underline{\sigma<1}$

Επιλέγω $\underbrace{\sigma>0}_{R_1}, \underbrace{\sigma>-1}_{R_2}, \underbrace{\sigma<1}_{R_3}$ γιατί $R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{0<\sigma<1\}$

Από πίνακες βλέπαμε ότι:

$$x(t) = -2u(t) + \frac{3}{2}e^{-t}u(t) - \frac{3}{2}e^{t}u(-t)$$

- **Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής**
- **Θεώρημα Αρχικής Τιμής**
- Προϋποθέσεις

i. Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό

ii. Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{s \to \infty} sX(s) = x(0^+)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

- **Θεώρημα Τελικής Τιμής**
- Προϋποθέσεις

i. Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό

ii. Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ