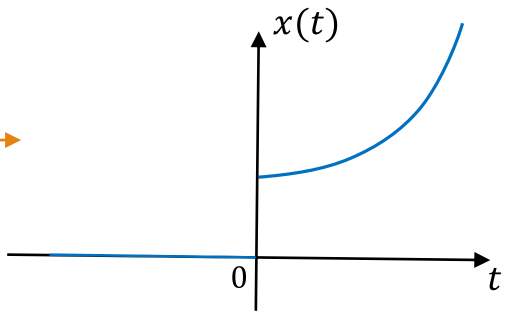
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15Η

- Μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (?) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων
- Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)
  - Κάποια σήματα ισχύος
  - Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος
- Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$
  - Δεν έχει μετασχ. Fourier
  - Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?



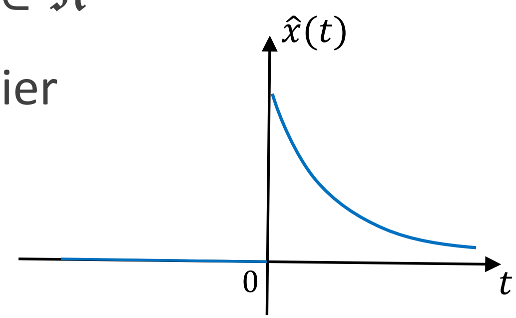
$$a < 0$$

- Ας το κάνουμε να έχει! ☺
- Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = e^{at}e^{-\sigma t}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \qquad \sigma \in \Re$$

- Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$



- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

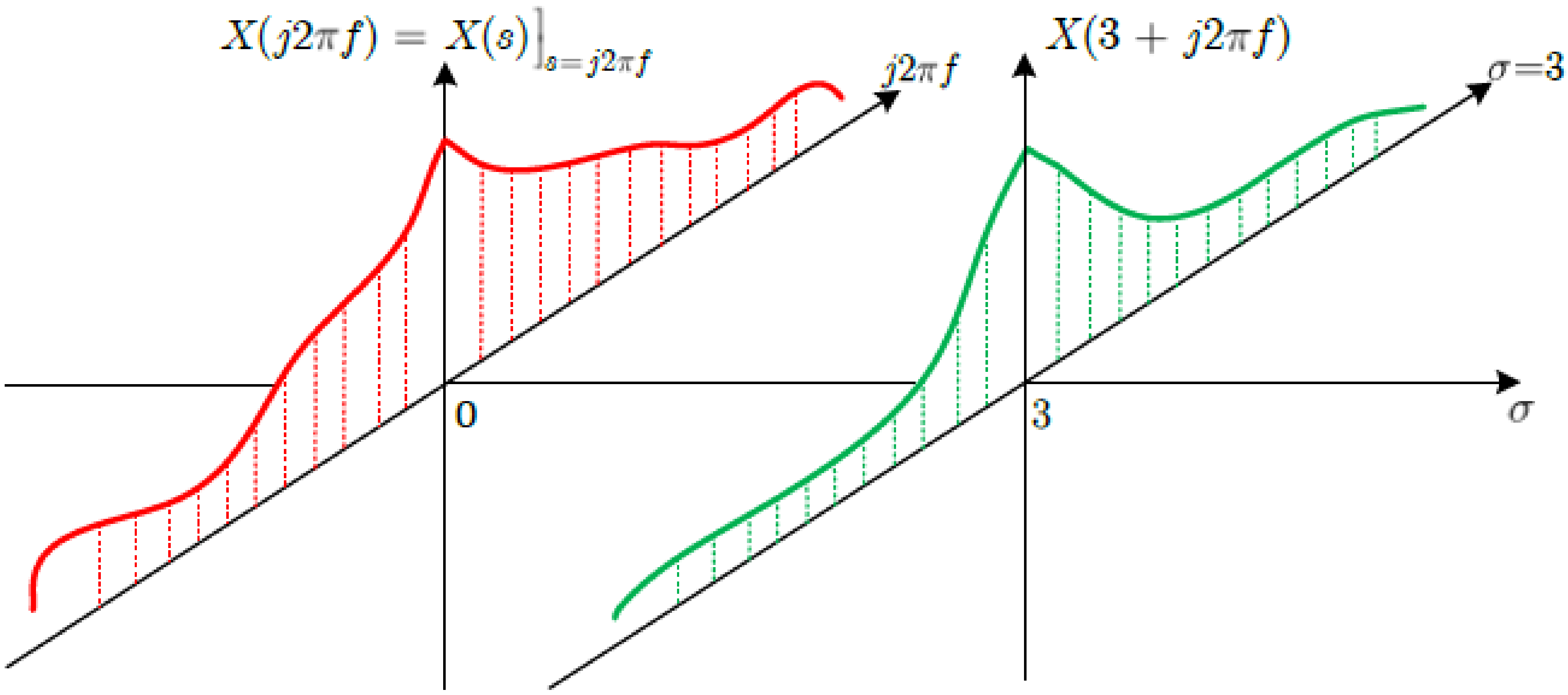
- Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα
- Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! ☺
- Από την παραπάνω σχέση

$$\hat{X}(f) = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-(\sigma + j2\pi f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\boxed{e^{at} u(t)}}_{x(t)} e^{-st} dt = X(s)$$

- Οπότε βρήκαμε έναν άλλο μετασχηματισμό ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}
- Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόνταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$
  - Μιγαδικές συχνότητες!!!???? ☹☹

- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace**

- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας
  - Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$

- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence - ROC)**
  - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής

- Ορισμός Μετασχ. Laplace

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

  - Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε...

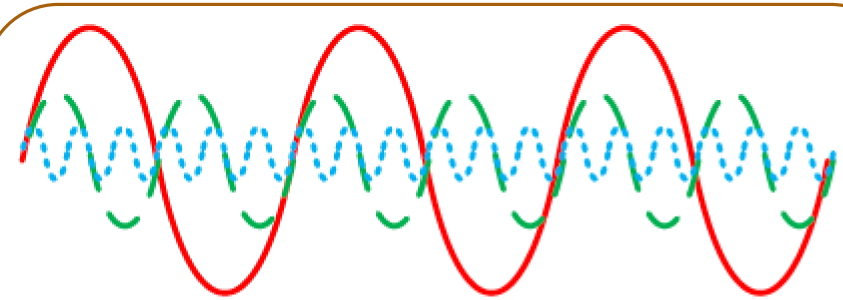
- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξενίζει…
- Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(f)e^{j2\pi f t}df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{X}(f)e^{\sigma t}\right)e^{j2\pi f t}df$$

- Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

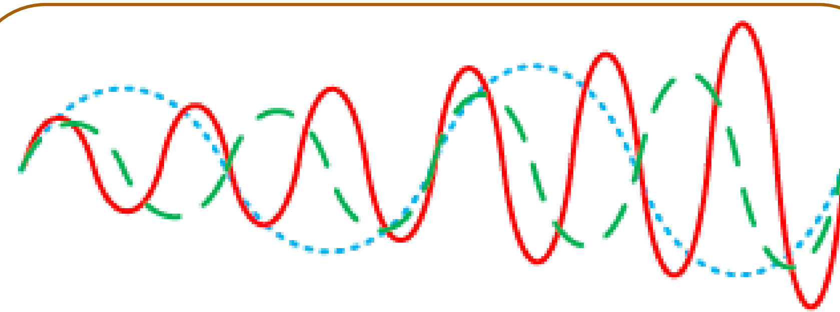
$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} 2\left|\hat{X}(f)\right|e^{\sigma t}\cos\left(2\pi f t + \hat{\phi}(f)\right)df$$

$\sigma = 0$



(α′) Σταθερού πλάτους ημίτονα

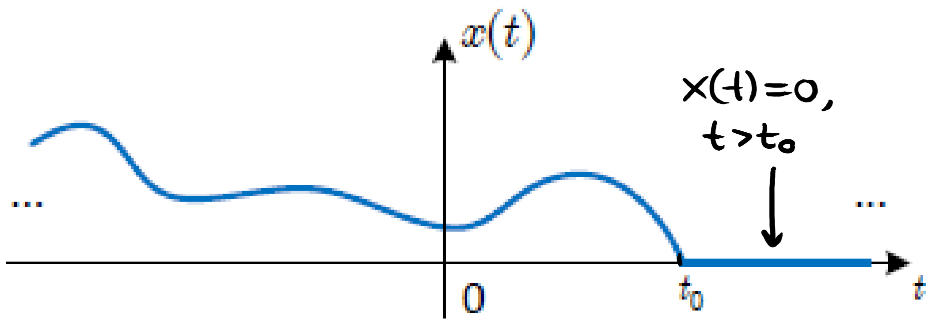
$\sigma \neq 0$



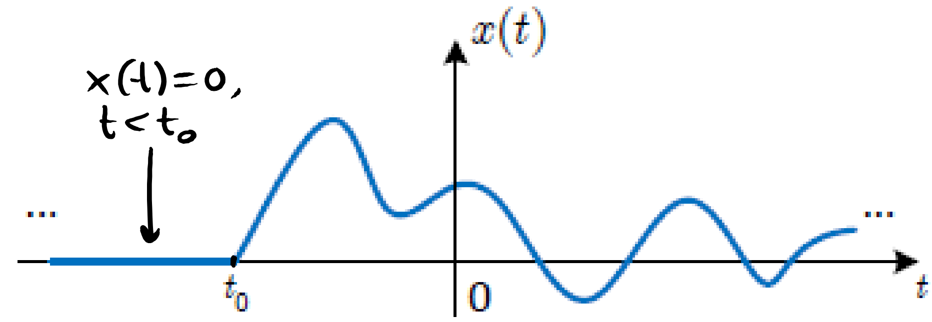
(β′) Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

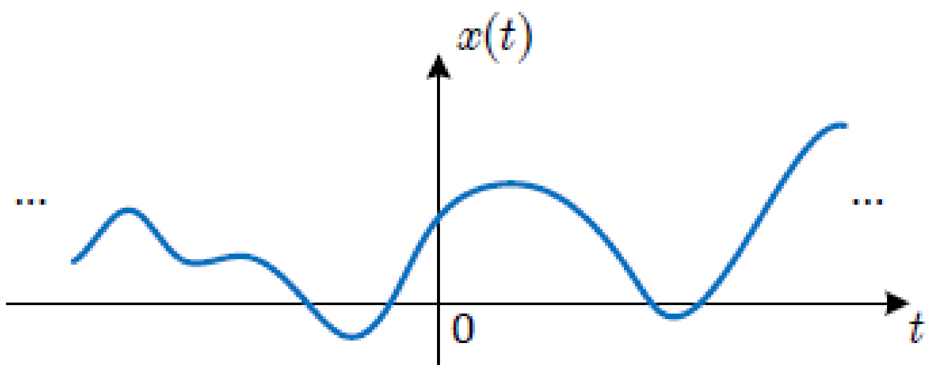
- Πλευρικότητα



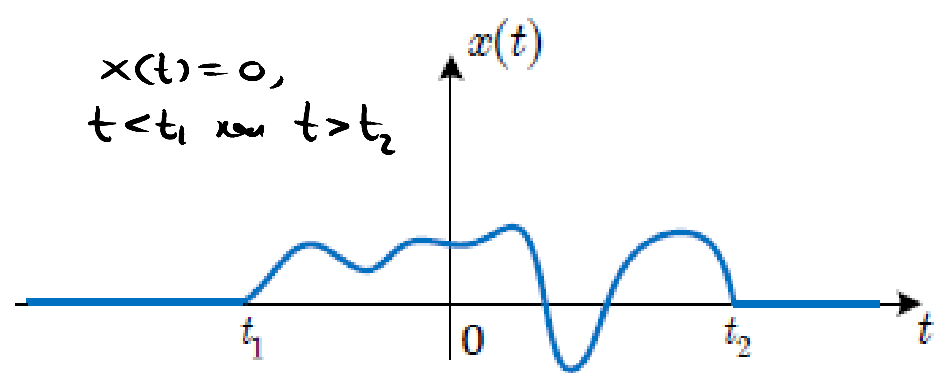
(α') *Αριστερόπλευρο σήμα.*



(β') *Δεξιόπλευρο σήμα.*



(γ') *Αμφίπλευρο σήμα.*

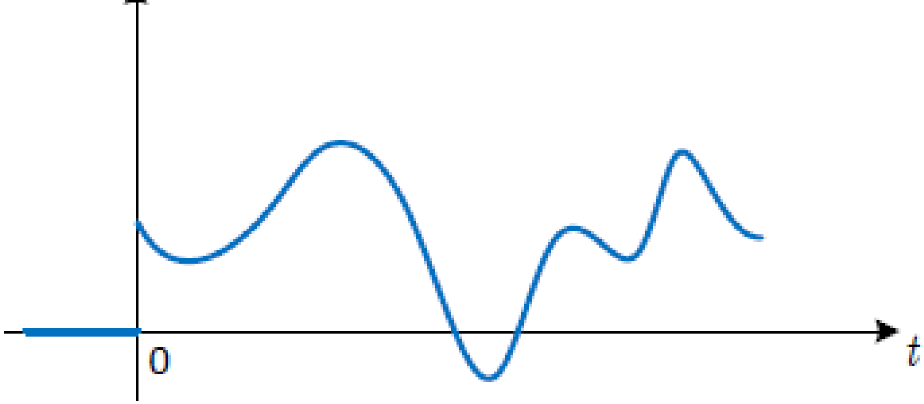


(δ') *Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.*

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

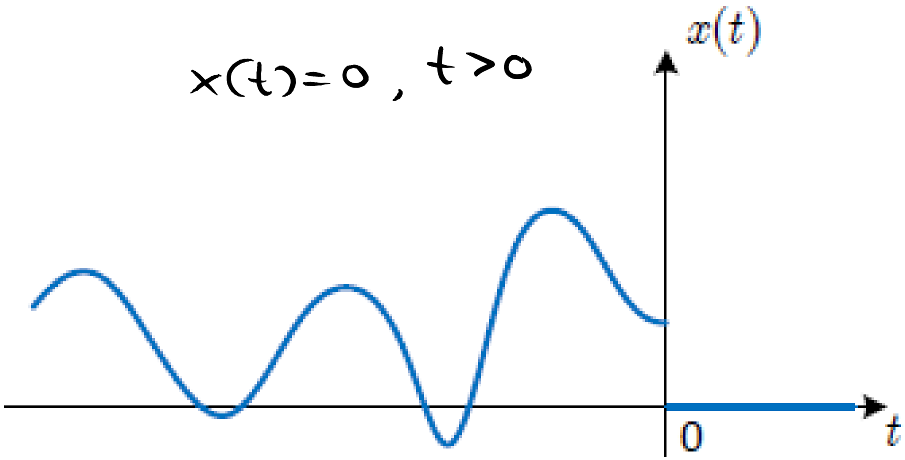
- Αιτιατότητα

$x(t)=0,\ t<0$

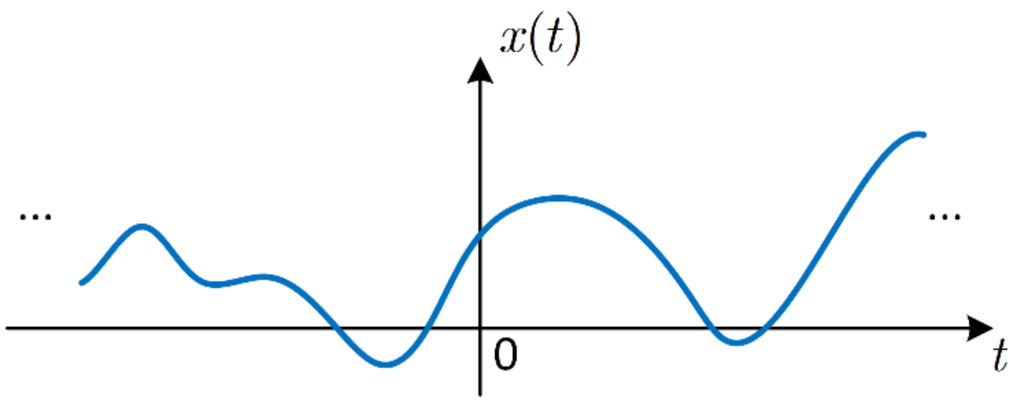


(α′) *Αιτιατό Σήμα.*

$x(t)=0\ ,\ t>0$



(β′) *Αντι-αιτιατό σήμα.*



(γ′) *Μη-αιτιατό σήμα*

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t), a \in \Re$

Έχουμε

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} \underbrace{u(t)}_{1,\, t>0} e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (1)$$

Έχουμε $\lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t\to+\infty} e^{(a-\sigma-j2\pi f)t} = \lim_{t\to+\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi f t}}$. (2)

Αν $a-\sigma<0 \Leftrightarrow \boxed{\sigma > a}$, τότε (2) $\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{(a-s)t} = 0$ (3)

Η (1) $\overset{(3)}{\Longrightarrow} X(s) = L\{e^{at}u(t)\} = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}, \ \sigma > a$

$s = \sigma + j2\pi f$

$$e^{at}u(t),\ a \in \mathbb{R} \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \quad \underbrace{\mathrm{Re}\{s\}}_{\sigma} > a$$

Πεδίο Σύγκλισης

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

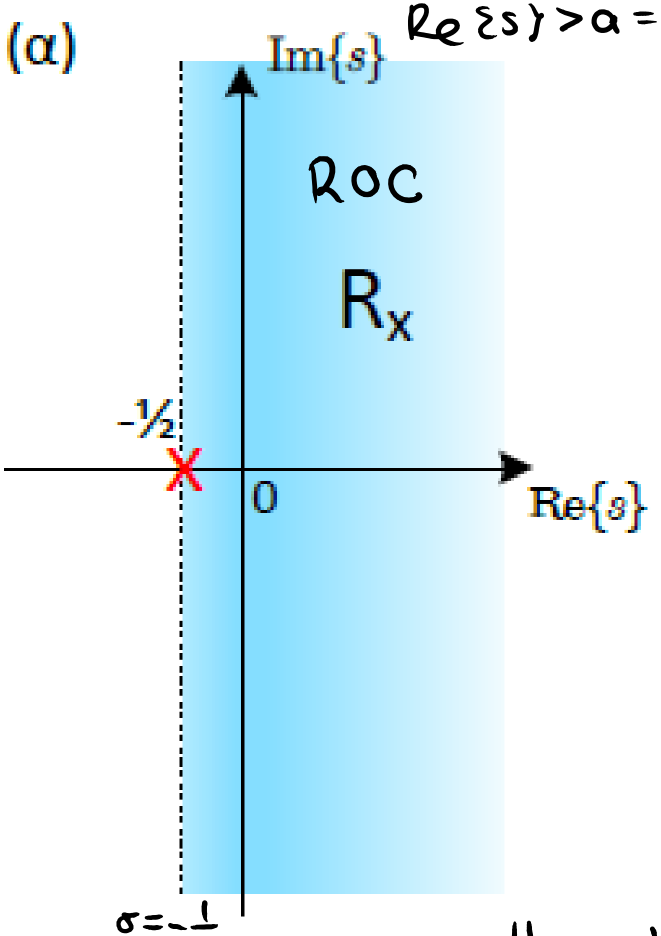
$a = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$

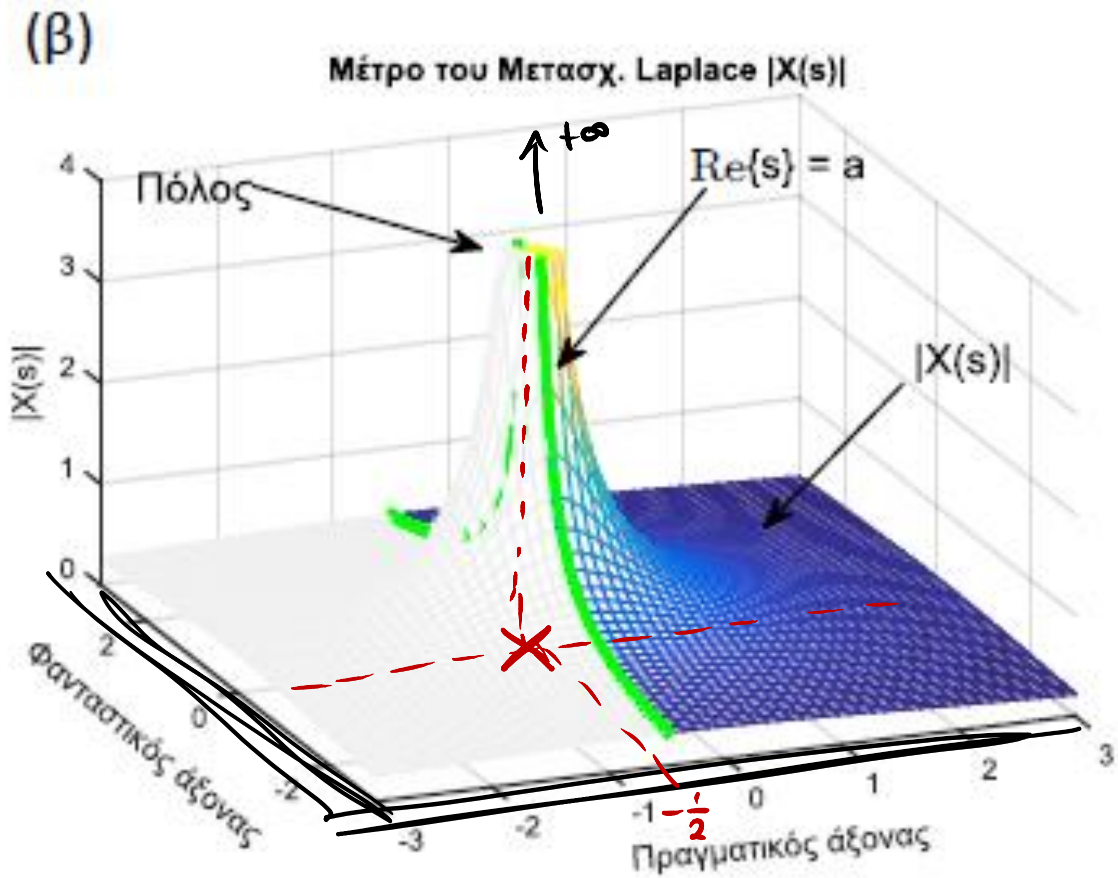
Πεδίο Σύγκλισης:

$\sigma > a = -\frac{1}{2}$

$Re\{s\} > a = -\frac{1}{2}$

$X(s) = \frac{1}{s-a}, \ \sigma > a$



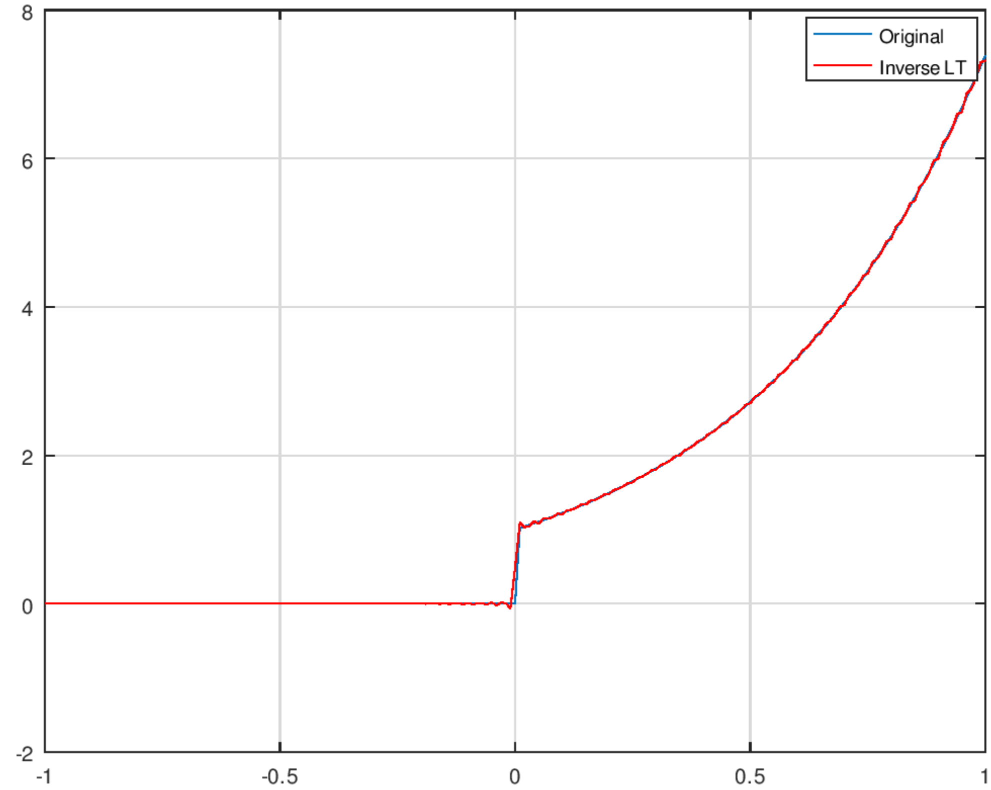


Η τιμή $a = -\frac{1}{2}$ ονομάζεται ΠΟΛΟΣ του Μετασχ. Laplace : η ρίζα του παρονομαστή : ΠΟΛΟΣ

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Κώδικας:

```
% alpha parameter (must be > 0)
a = 2;
% Time step
dt = 0.01;
% Time axis
t = -1:dt:1;
% Frequency step
df = 0.01;
% Frequency axis (the usual one)
f = -40:df:40;
% Signal (0 for t<0, exp(at) for t > 0)
x = [zeros(size(t(t<=0))) exp(a*t(t>0))];
% Sigma selection
sigma = 4;
% Laplace Transform
X = 1./(sigma - a + j*2*pi*f);
% Memory allocaton
x_est = zeros(size(x));
% Synthesizing x(t) from Laplace Transform
for i=1:length(f)
  x_est = x_est + X(i).*exp((sigma + j*2*pi*f(i))*t);
endfor
% Normalize
x_est = df*x_est;
% Plotting
plot(t, x); grid; hold on;
plot(t, real(x_est), 'r'); hold off;
```



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t), a \in \Re$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{at} \underbrace{u(-t)}_{1,\ t<0} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t} dt = -\frac{1}{a-s}\left(1 - \lim_{t\to-\infty} e^{(a-s)t}\right) \quad (1)$$

Είναι

$$\lim_{t\to-\infty} e^{(a-\sigma-j2\pi f)t} = \lim_{t\to-\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{-j2\pi f t} = 0 \quad (2), \text{ αν } a-\sigma>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sigma < a} \text{ Πεδίο Σύγκλισης}$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} X(s) = -\frac{1}{a-s}(1-0) = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}, \quad \overbrace{Re\{s\}}^{\sigma} < a$$

$$-e^{at}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s-a}, \quad \sigma < a$$

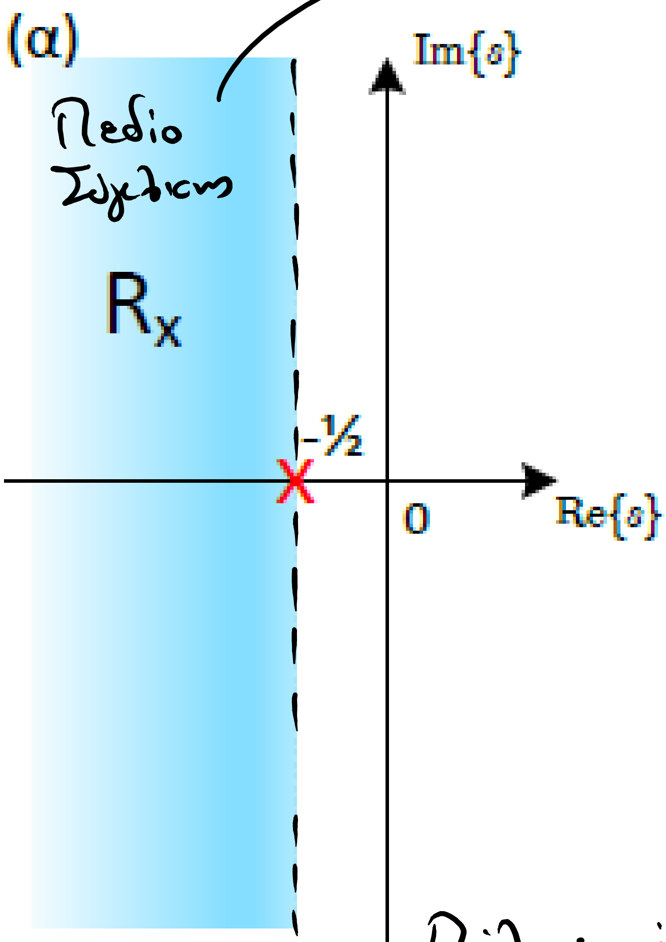
- **Μετασχηματισμός Laplace**

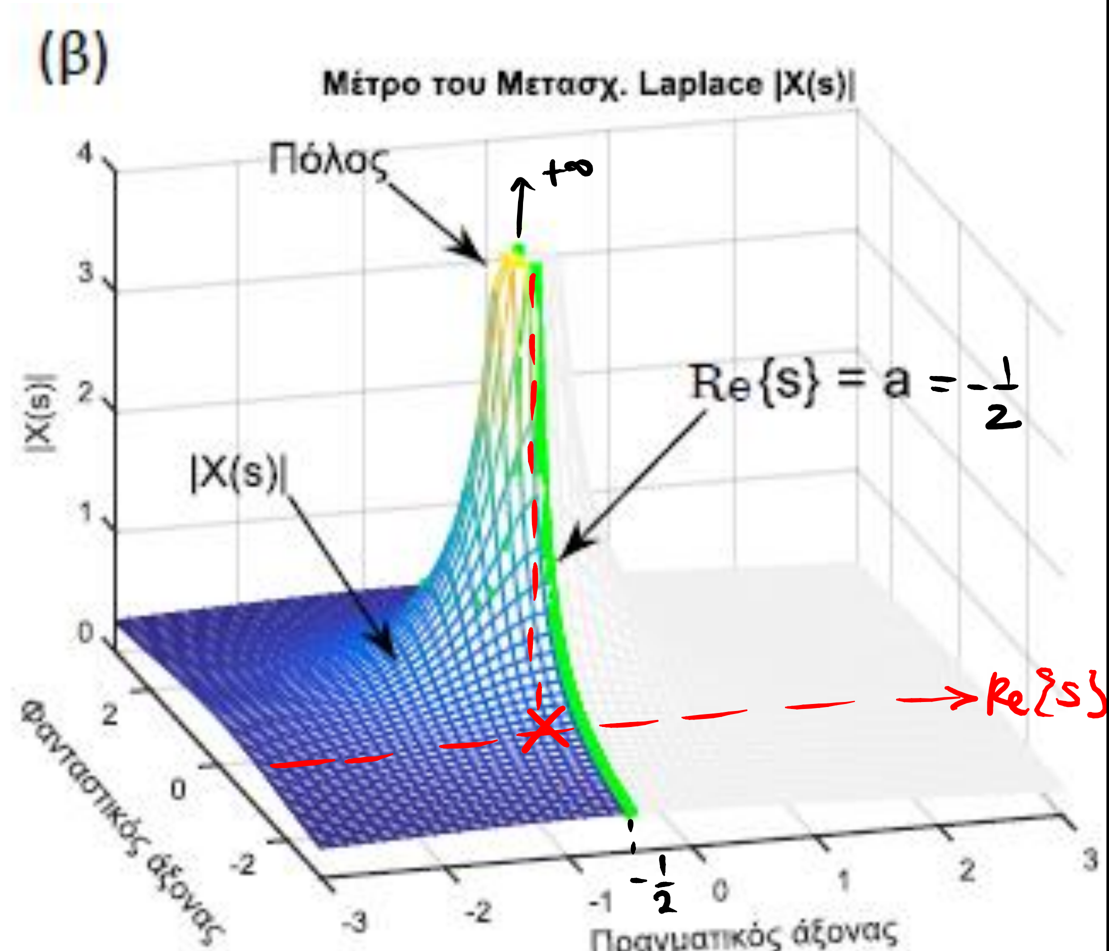
$a=-\frac{1}{2} \leadsto -e^{-\frac{1}{2}t}u(-t)$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)=\frac{1}{s-a},\ \sigma<a$

- Παράδειγμα:

$\sigma<a \Leftrightarrow Re\{s\}<a$





Πόλος: ρίζα του $s-a=0$

$\Downarrow$

$s=a=-\frac{1}{2}$

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}\,u(-t), \qquad a, b \in \Re$$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{at}u(t) - e^{bt}u(-t)\right)e^{-st}\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(t)e^{-st}\,dt}_{L\{e^{at}u(t)\}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{bt}u(-t)e^{-st}\,dt}_{L\{-e^{bt}u(-t)\}}$$

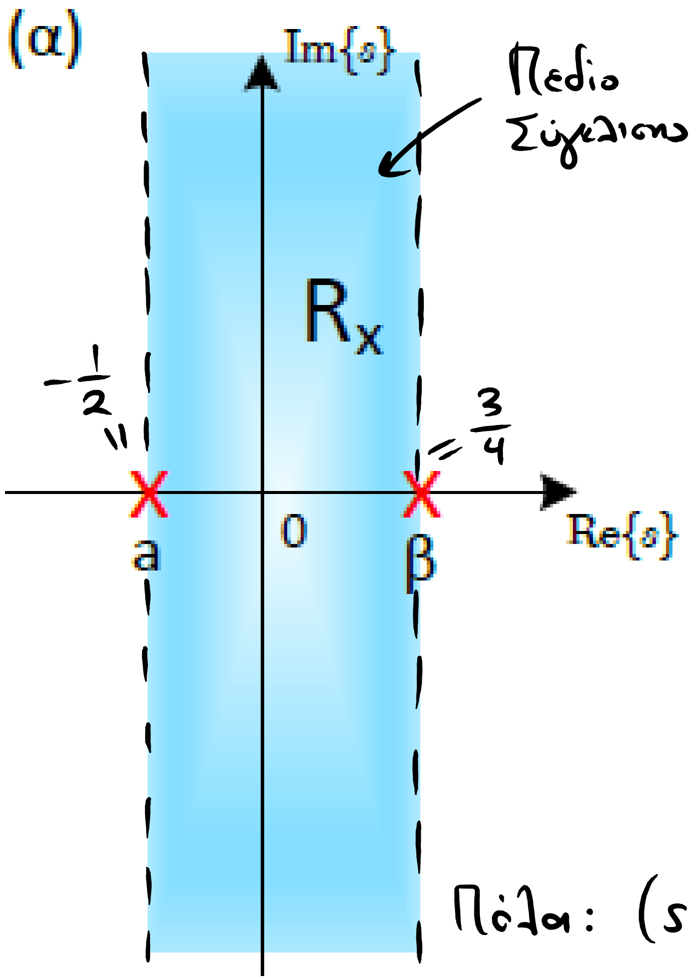
$$= \underbrace{\frac{1}{s-a}}_{\sigma > a} + \underbrace{\frac{1}{s-b}}_{\sigma < b} = \frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)} = \frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)},$$

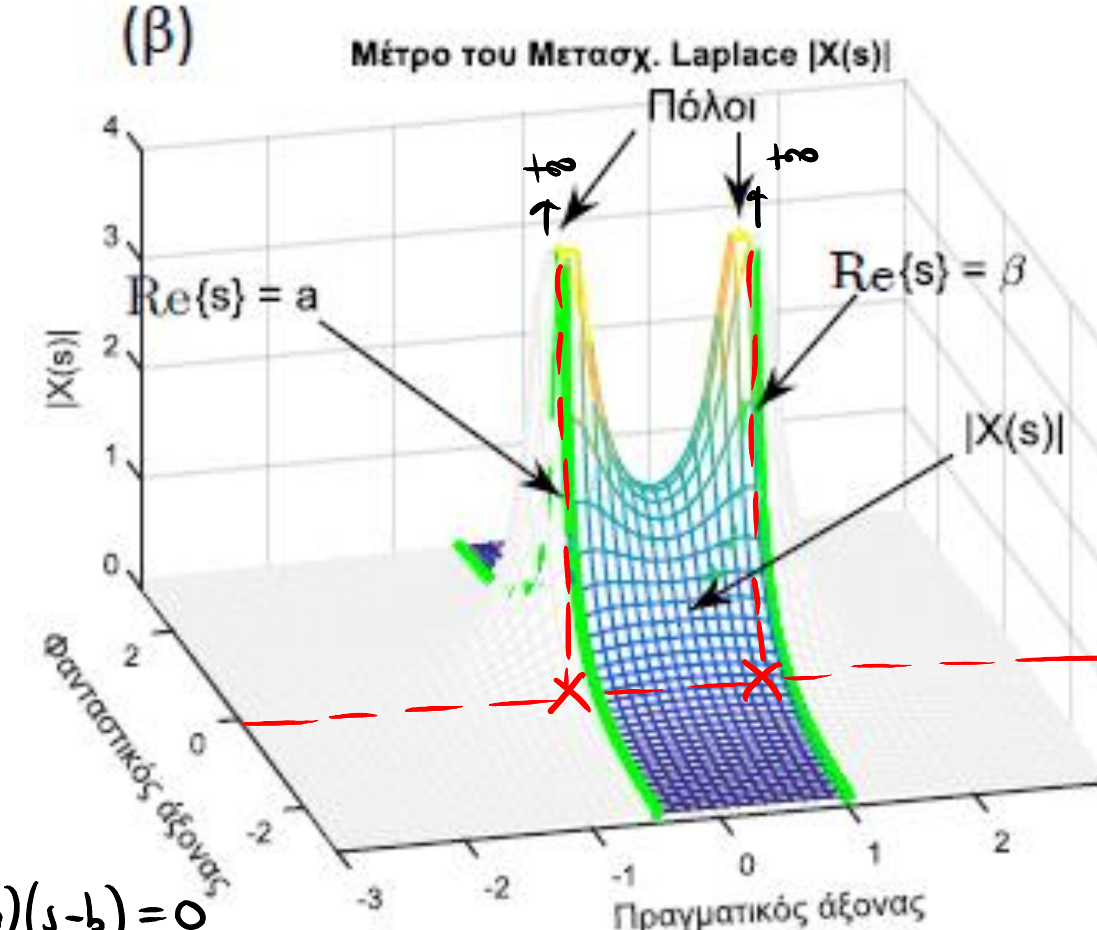
μόνον αν $a < b$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

$a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{3}{4} \sim \underbrace{e^{-\frac{1}{2}t}u(t) - e^{\frac{3}{4}t}u(-t)}$

$X(s) = \dfrac{2s - (a+b)}{(s-a)(s-b)}$





Πόλοι: $(s-a)(s-b) = 0$

$s = a, \quad s = b$

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t)$$

Έχουμε

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big]_{t=0} = e^{0} = 1$$

Άρα

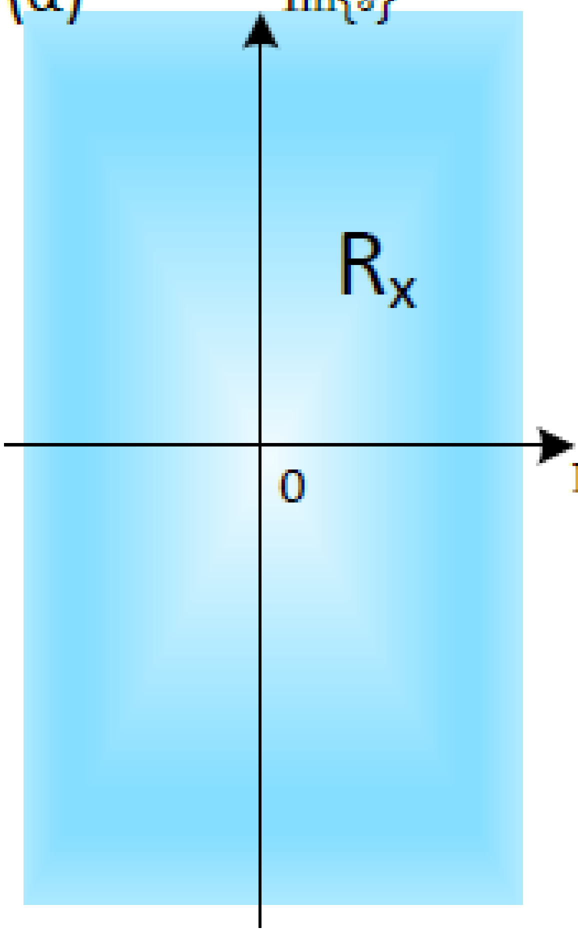
$$\delta(t) \xleftrightarrow{L} 1 \ , \ \forall \ s$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**

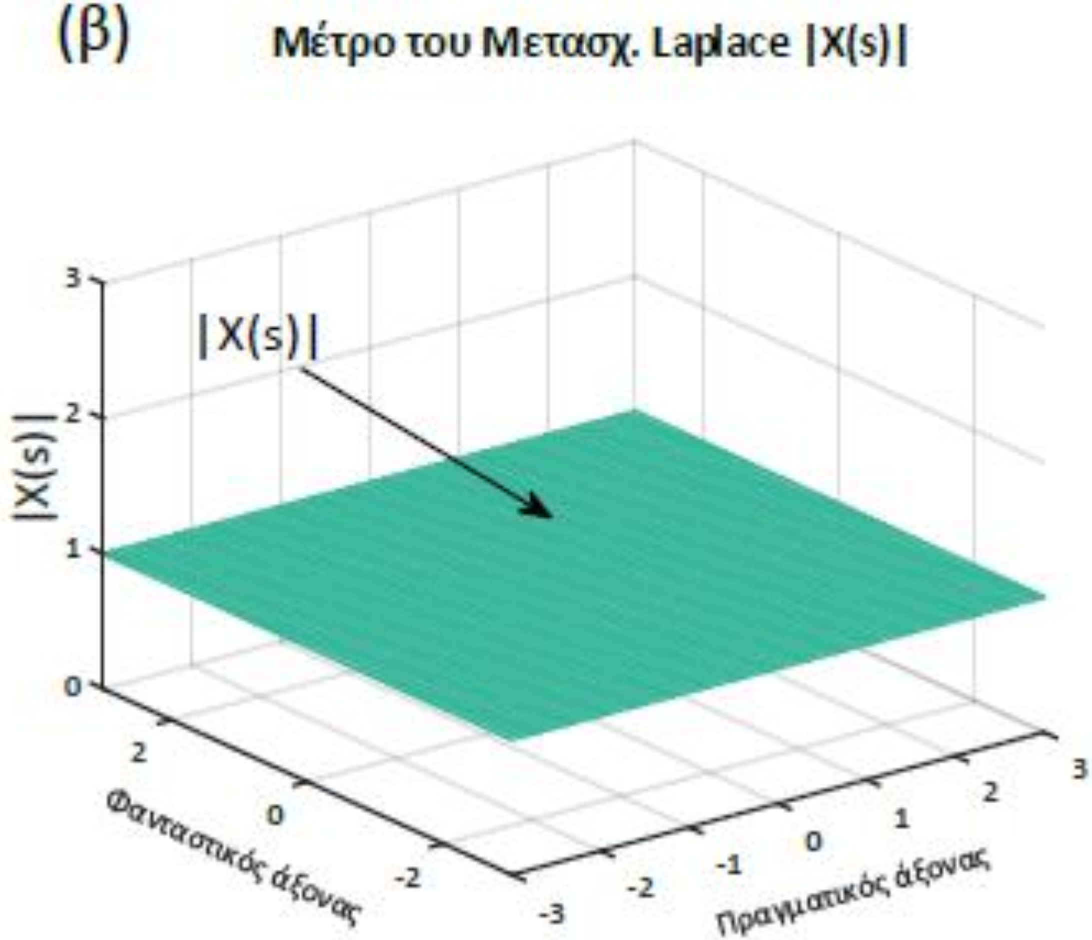
$f(t) \xleftrightarrow{L} 1$

- Παράδειγμα:

(α)



(β)



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ