ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14Η

- Συστήματα στο χώρο του Fourier

Η διάλεξη αυτή περιέχει Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}, \quad A > 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = A\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau)+\varphi)}d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = AH(f_0)e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}$$

$$= H(f_0)x(t)$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού
- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνοτική απόκριση** (frequency response)
- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

- **Απόκριση πλάτους** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου*
- Η απόκριση φάσης περιγράφει *πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου*
- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

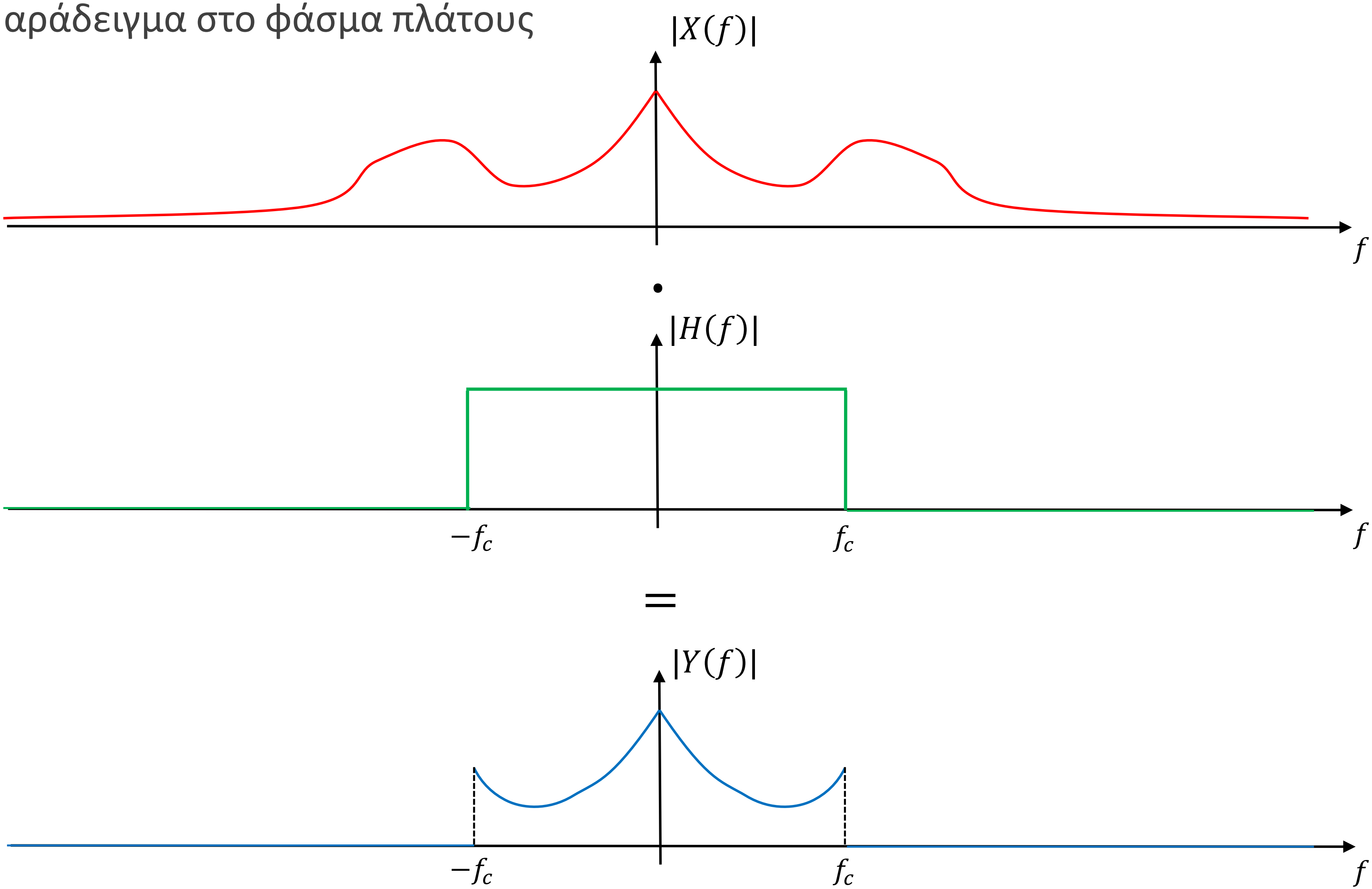
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

$$\boxed{\begin{aligned} |Y(f)| &= |X(f)||H(f)| \\ \phi_y(f) &= \phi_x(f) + \phi_h(f) \end{aligned}}$$

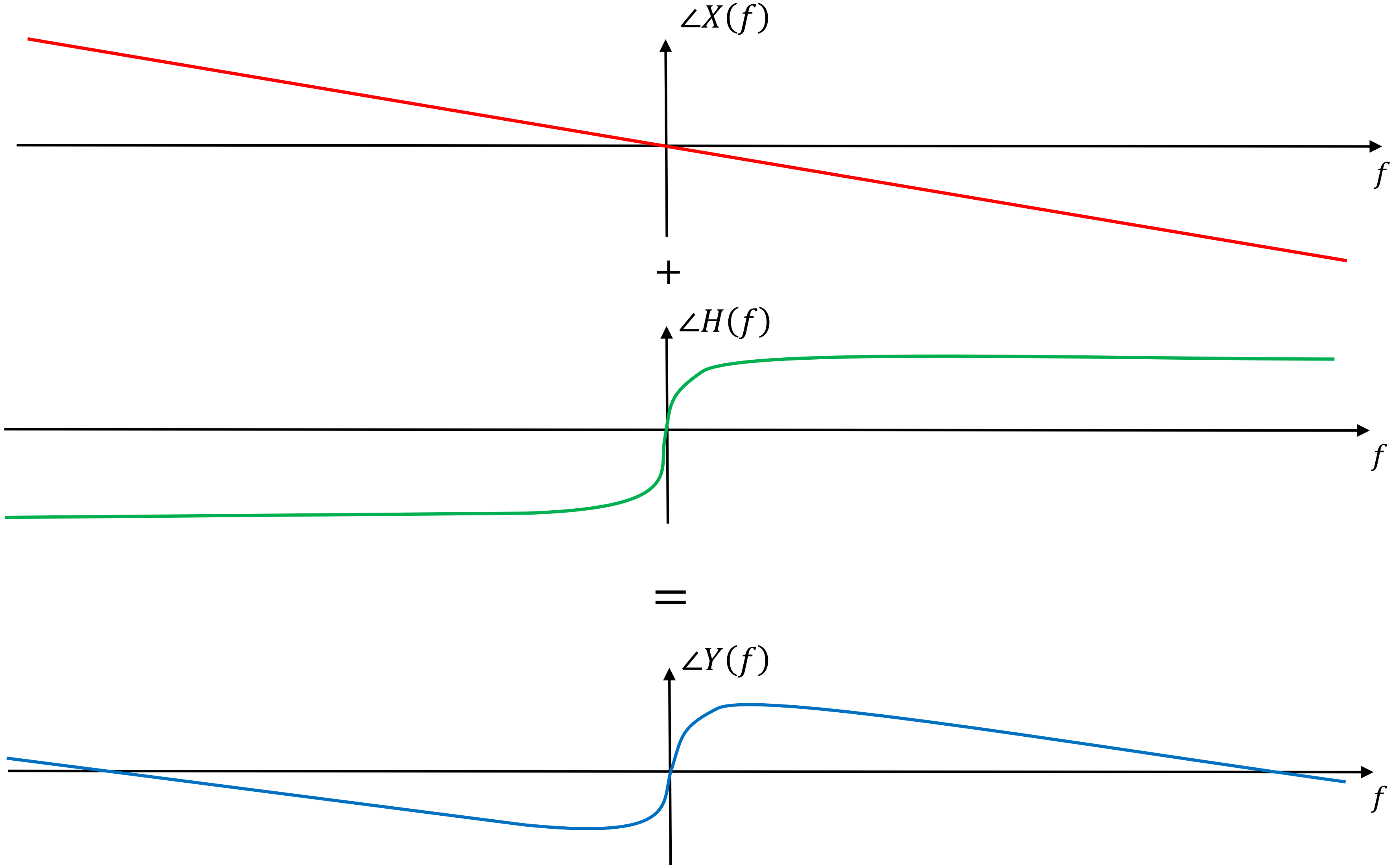
- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**

- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
  - **Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους**
  - **Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης**

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας
  - ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^{M} (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμα του $(j2\pi f)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Εφαρμόζουμε την ιδιότητα της παραγώγισης στο χρονο:

$$F\left\{\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t)\right\} = F\left\{3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)\right\}$$

$$j2\pi f\,Y(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6\cdot j2\pi f\,X(f)$$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6j2\pi f)$$

$$H(f) = Y(f)/X(f) = \frac{3 - 6j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

Απόκριση σε Συχνότητα

$$z'(t) \xleftrightarrow{F} j2\pi f Z(f)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα: $H(f) = \dfrac{3-6j2\pi f}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t) = ?$

$$Z(f)\cdot j2\pi f$$

$$H(f) = \underbrace{\frac{3}{2+j2\pi f}}_{\updownarrow F^{-1} \; 3e^{-2t}u(t)} - 6\underbrace{\frac{j2\pi f}{2+j2\pi f}}_{?} = \frac{3}{2+j2\pi f} - 6\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2+j2\pi f}\, j2\pi f}^{Z(f)\cdot j2\pi f}}_{\frac{d}{dt}F^{-1}\left\{\frac{6}{2+j2\pi f}\right\}}$$

$$\frac{d}{dt}F^{-1}\left\{\frac{6}{2+j2\pi f}\right\} = \frac{d}{dt}\left(6e^{-2t}u(t)\right)$$

Άρα

$$h(t) = 3e^{-2t}u(t) - \frac{d}{dt}6e^{-2t}u(t)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\left((e^{-2t})'u(t) + e^{-2t}u'(t)\right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6\left(-2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\delta(t)\right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t) = h(t)$$

κρουστική Απόκριση

Αλλιώς:

$$H(f) = \frac{3-6j2\pi f}{2+j2\pi f} \rightarrow \begin{array}{c|c} 3-6j2\pi f & 2+j2\pi f \\ \hline & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{r|l} 3-6x & 2+x \\ \cline{2-2} -(-12-6x) & -6 \\ \hline 15+0x & \end{array}$$

Άρα

$$H(f) = -6 + \frac{15}{2+j2\pi f} \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t) = -6\delta(t) + 15e^{-2t}u(t)$$

- **Συστήματα και Σειρές Fourier**
- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του ΓΧΑ συστήματος! ☺
- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(kf_0)|X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(kf_0)||X_k| \cos\left(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(kf_0)\right)$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2\cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$4t \rightarrow 2\pi \frac{2}{\pi} t \rightarrow f_0 = \frac{2}{\pi}$ Hz

Η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y(t) = 3 \cdot H(0) + 2\left|H\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right| \cdot \cos\left(2\pi\frac{2}{\pi}t + \frac{\pi}{3} + \varphi_H\left(\tfrac{2}{\pi}\right)\right)$$

Χρειαζόμαστε την απόκριση σε συχνότητα του ΓΧΑ συστήματος, $H(f)$

Έχουμε :

$$F\left\{\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t)\right\} = F\{x(t)\}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα:

$zz^* = |z|^2$

$$= j2\pi f\, Y(f) + 3Y(f) = X(f) \Leftrightarrow Y(f)(3 + j2\pi f) = X(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$$: απόκριση σε συχνότητα

$$\rightarrow H(0) = \frac{1}{3 + j2\pi 0} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{3 + j\cancel{2\pi}\frac{2}{\cancel{\pi}}} = \frac{1}{3 + j4}$$

$$\left|H\left(\frac{2}{\pi}\right)\right| = \frac{1}{|3 + j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3 + j4} = \frac{3 - j4}{|3 + j4|^2} = \frac{3 - j4}{25} =$$

$$= \frac{3}{25} + j\frac{-4}{25} \Rightarrow \varphi_H\left(\frac{2}{\pi}\right) = \tan^{-1}\frac{-\frac{4}{25}}{\frac{3}{25}}$$

$$= \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \cong -0.92$$

Άρα

$$y(t) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.92\right)$$

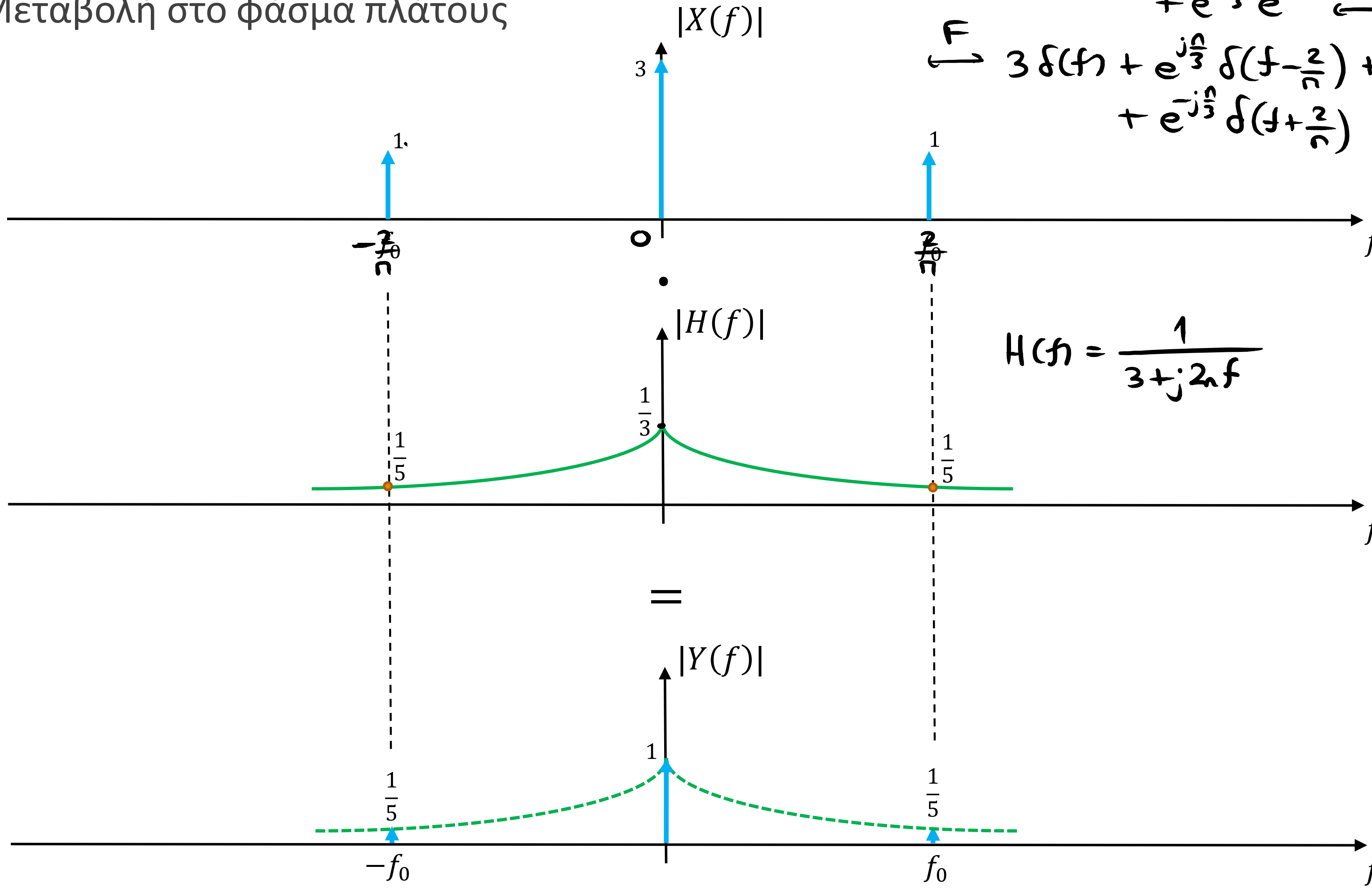
$$= 1 + \frac{2}{5}\cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0.92\right)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{j\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta}$$

$$-\tan^{-1}\frac{4}{3}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Μεταβολή στο φάσμα πλάτους

$$3 + 2\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right) = 3 + e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j4t} + e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j4t} \xleftrightarrow{F} 3\delta(f) + e^{j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f-\frac{2}{\pi}\right) + e^{-j\frac{\pi}{3}}\delta\left(f+\frac{2}{\pi}\right)$$



$$H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**
- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
  - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση

Συνέλιξη στο χρόνο ⟷ Γινόμενο στη συχνότητα

- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις του $j2\pi f$, τότε

$$Y(f) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{l=0}^{K} d_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^{L} c_i (j2\pi f)^i}$$

$$= \frac{\prod_{l=1}^{M} (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^{N} (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{l=1}^{K} (j2\pi f + m_l)}{\prod_{i=1}^{L} (j2\pi f + q_i)}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- **Παράδειγμα:**

- Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

Γνωρίζουμε ότι $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = X(f)H(f)$

- $H(f) = F\{h(t)\} = \dfrac{1}{3+j2\pi f}$
- $X(f) = F\{x(t)\} = \dfrac{2}{1+j2\pi f} + \dfrac{1}{2+j2\pi f}$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{3+j2\pi f}\cdot\left(\frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f}\right) = \frac{5+3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}$$

Άρα

$$Y(f) = \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f} + \frac{\Gamma}{3+j2\pi f}$$

$$\to A = \left.\frac{5+3j2\pi f}{\cancel{(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f)(3+j2\pi f)}\cancel{(1+j2\pi f)}\right]_{j2\pi f := -1} = 1$$

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Όμοια, $B = 1$, $\Gamma = -2$

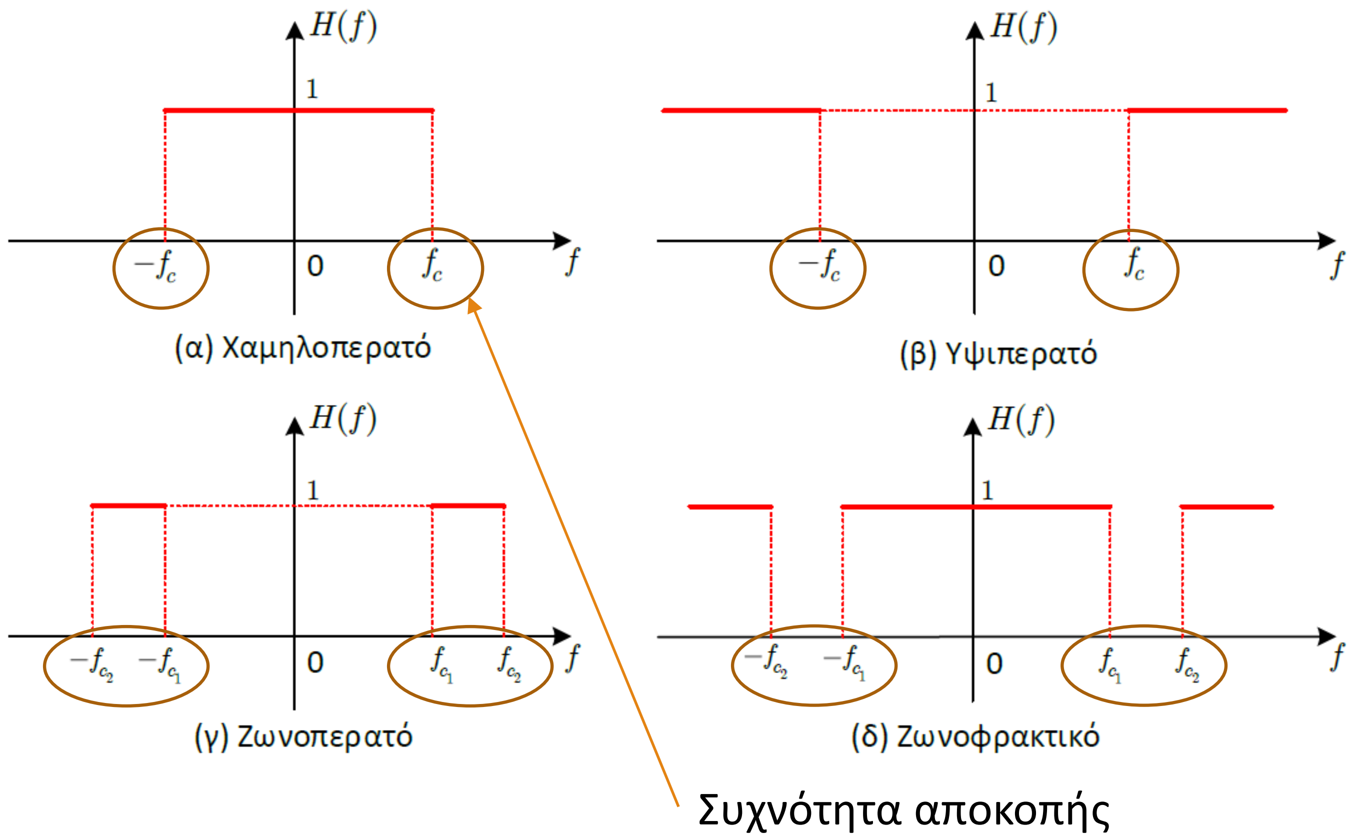
Άρα $$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{-2}{3+j2\pi f}$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}^{-1}$$

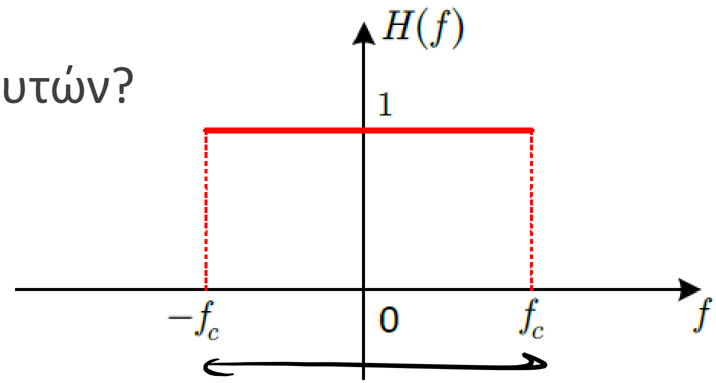
$$y(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) - 2e^{-3t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} + e^{-2t} - 2e^{-3t}\right)u(t)$$

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
- Θα μελετήσουμε τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (μηδενικής φάσης)
  - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)
- Τέσσερις κατηγορίες
- **Χαμηλοπερατό φίλτρο**
- **Υψιπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοπερατό φίλτρο**
- **Ζωνοφρακτικό φίλτρο**



- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο



(α) Χαμηλοπερατό

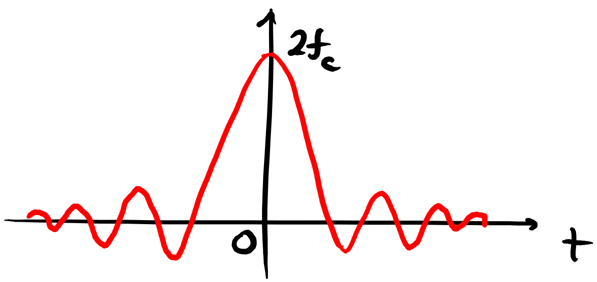
Είναι

$$H_{LP}(f) = 1 \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$\updownarrow F^{-1}$$

$$h_{LP}(t) = 2f_c \cdot \mathrm{sinc}(2f_c t)$$

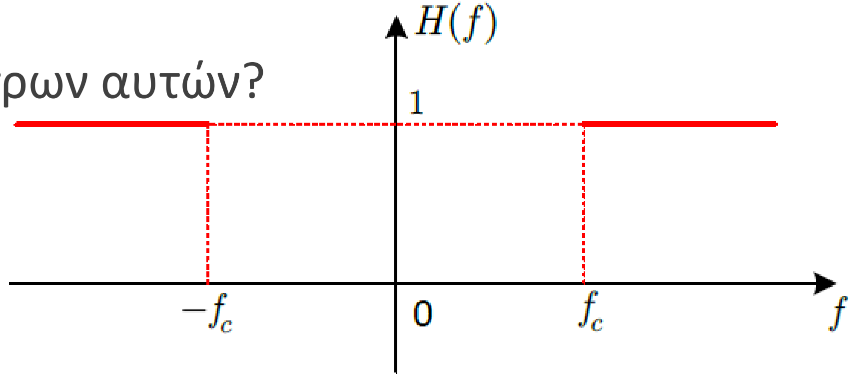
Αιτιατό : $h(t) = 0 \ , \ t<0$



Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?
- Ας πάρουμε το υψιπερατό φίλτρο



(β) Υψιπερατό

$$H_{HP}(f) = 1 - H_{LP}(f)$$

$$= 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$\Big\updownarrow F^{-1}$$

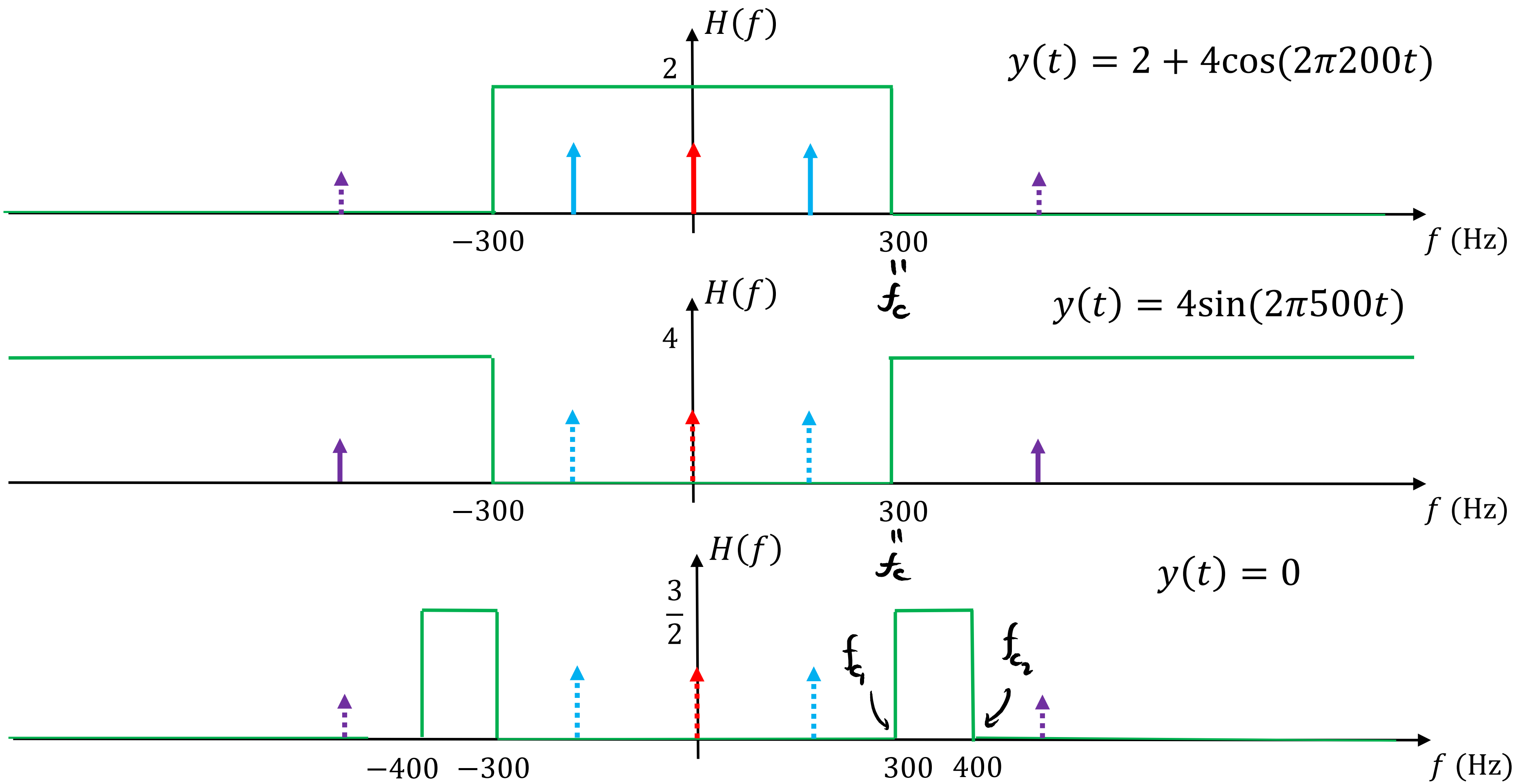
$$h_{HP}(t) = \delta(t) - 2f_c \cdot \text{sinc}(2f_c t)$$

Κρουστική απόκριση

- Άπειρης διάρκειας
- Περιλαμβάνει αρνητικούς χρόνους (μη αιτιατή)

- **Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων**
- **Παράδειγμα**: $X(f) = \delta(f) + \delta(f-200) + \delta(f+200) + \frac{1}{2j}\delta(f-500) - \frac{1}{2j}\delta(f+500)$

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200 t) + \sin(2\pi 500 t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ