

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13^Η

- Μετασχηματισμός Fourier σημάτων ισχύος
- Αντίστροφος Μετασχ. Fourier

Η διάλεξη αυτή
περιέχει Ε.ΒΑ.



Ε.ΒΑ



- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Μ.Φ. ενός απλού ημιτόνου $\cos(2\pi f_0 t)$

- Θα είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{2} F\{e^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2} F\{e^{-j2\pi f_0 t}\} \end{aligned}$$

- Τα παραπάνω ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται

- Όμως ξέρουμε ότι $e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \mp f_0)$

- Οπότε

$$X(f) = \frac{1}{2} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \delta(f + f_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

- Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, και αφού μπορούμε να περιγράψουμε κάθε περιοδικό σήμα ως μια Σειρά Fourier, θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

$\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \leftarrow$
 \leftarrow

- Όμως πάλι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το X_k για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω

- Κάτι που είναι «επίπονο»... 😊

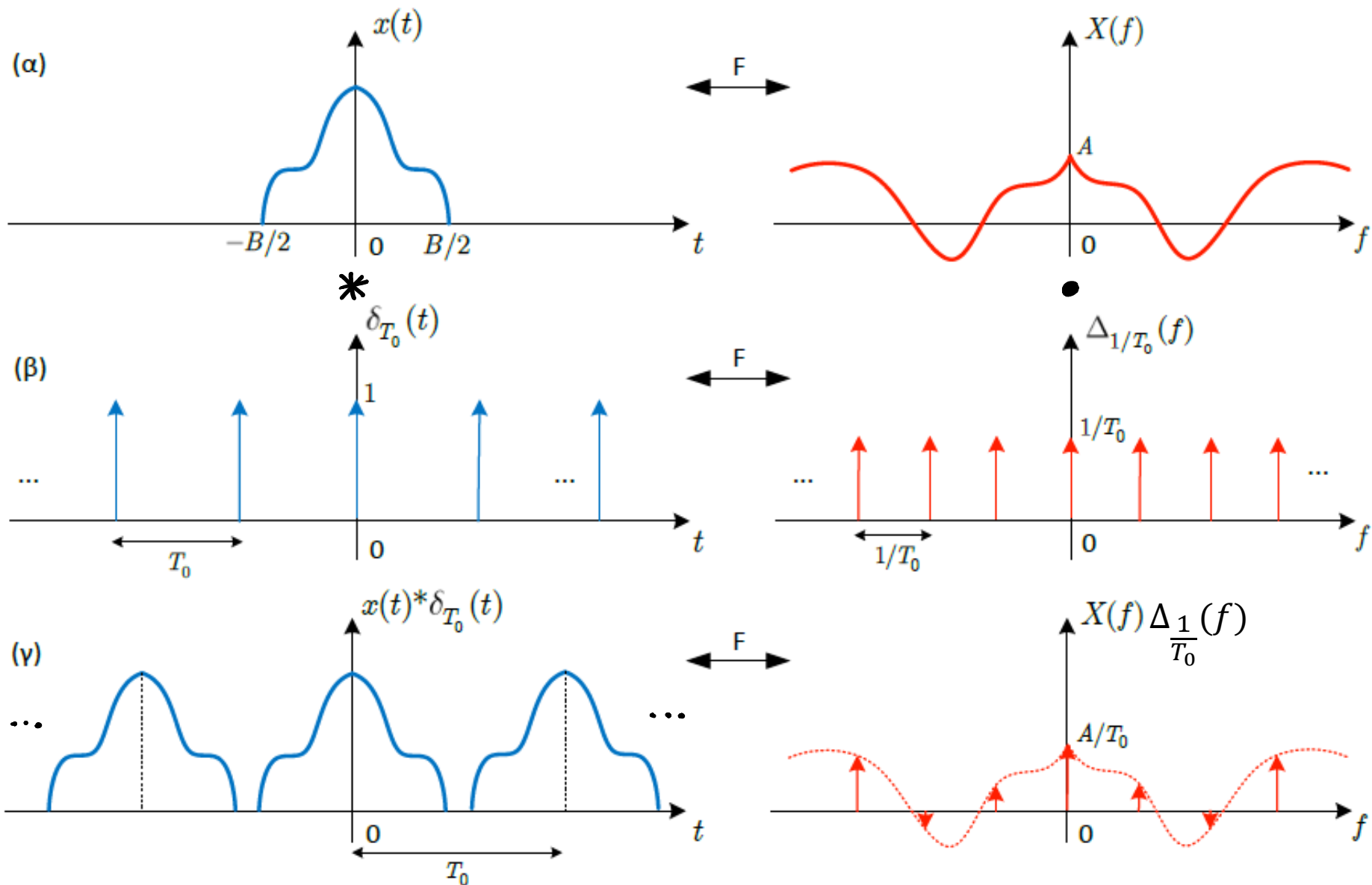
- Μπορούμε άραγε να βρούμε τους συντελεστές Fourier πιο εύκολα?
 - Μέσω του Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος ίσως?

- Στο παραπάνω θα μας βοηθήσει η γνωστή μας σχέση

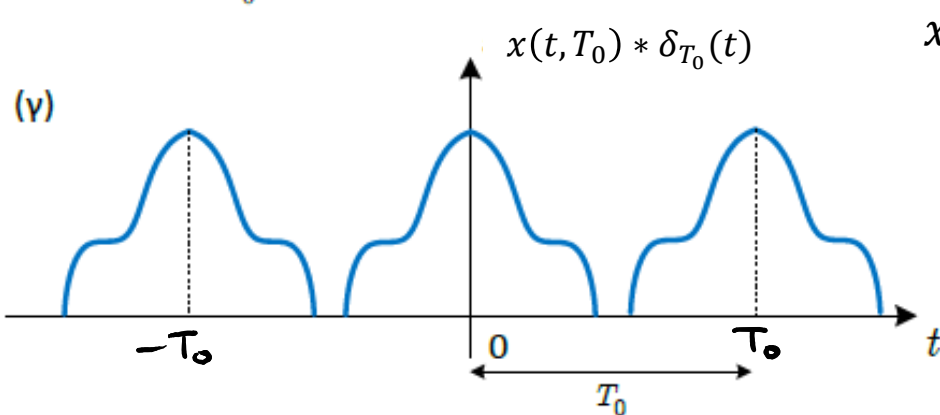
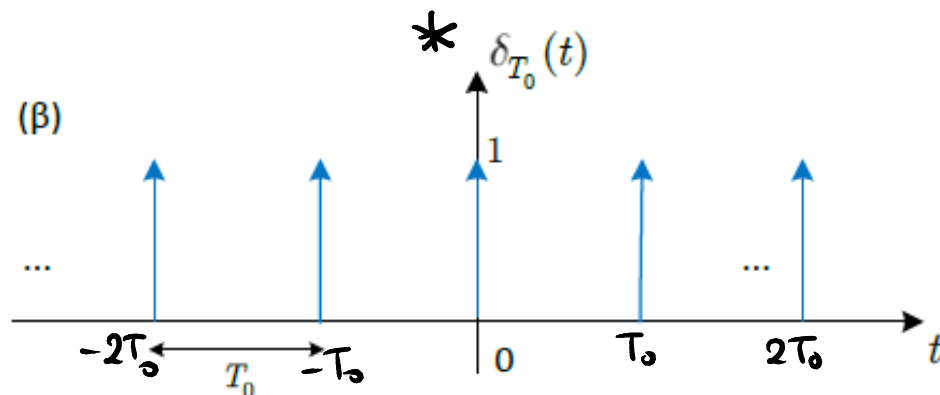
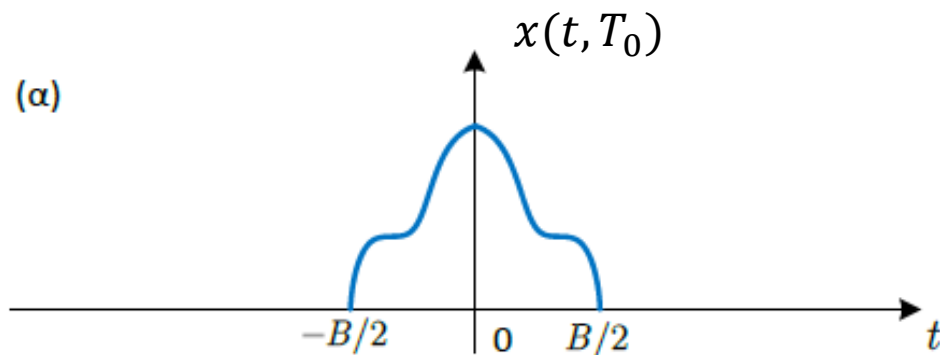
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \right) e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k f_0)$$

$\frac{1}{T_0}$
 $\frac{1}{T_0}$

Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα



Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα



$$x(t, T_0)$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$x(t, T_0) * \delta_{T_0}(t) = x(t, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t, T_0) * \delta(t - kT_0)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0, T_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

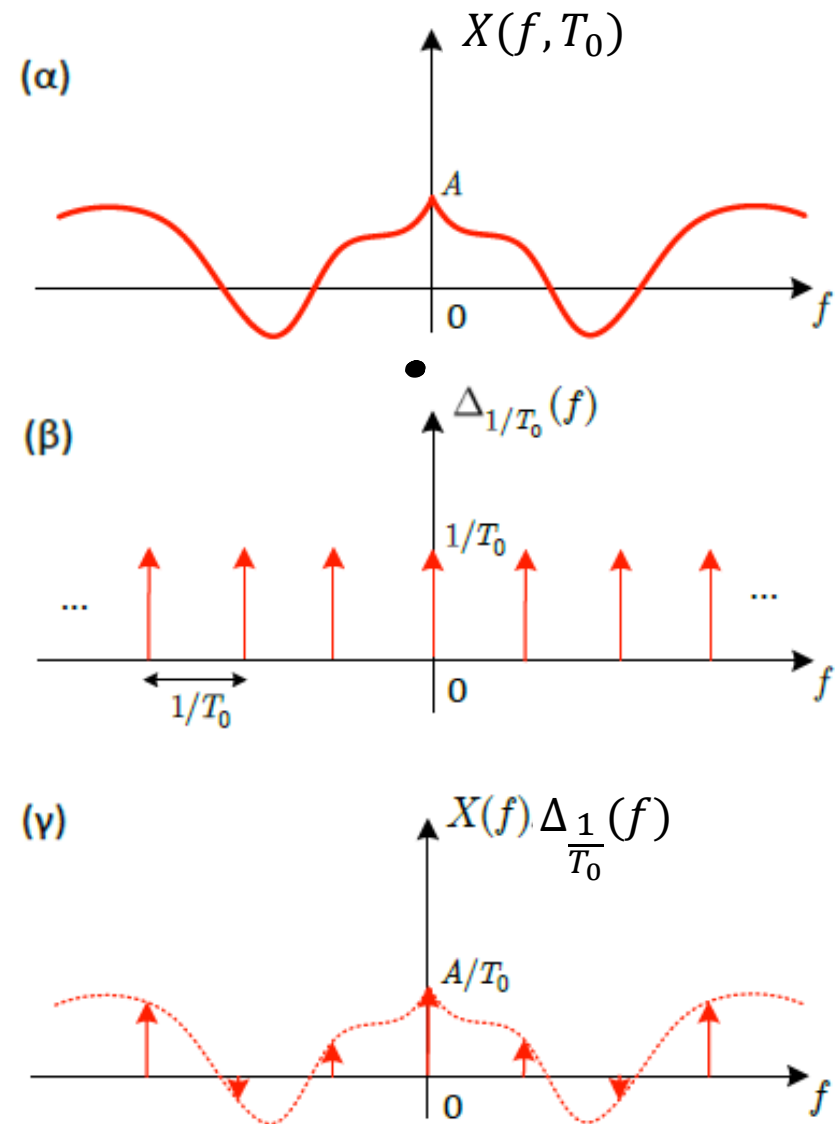
$$X(f, T_0)$$

$$\Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$

$$X(f, T_0) \Delta_{\frac{1}{T_0}}(f) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(k \frac{1}{T_0}, T_0\right) \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$



• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

• Άρα αφού

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \leftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - k f_0)$$

και

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_0, T_0) \leftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X\left(k \frac{1}{T_0}, T_0\right) \delta\left(f - k \frac{1}{T_0}\right)$$

οι συντελεστές Fourier μπορούν να προκύψουν από το Μετασχ. Fourier από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}, T_0\right)$$

δηλ. αρκεί να δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ανά $\frac{k}{T_0}$ και ό,τι προκύψει να το πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{T_0}$!!!!

• Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Συνοψίζοντας:

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε μια περίοδο του σήματος $x_{T_0}(t)$ (σαν σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = kf_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Γνωρίζουμε ότι τα σήματα ισχύος δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα, οπότε δεν έχουν Μετασχ. Fourier
- Μπορούμε άραγε να εκμεταλλευτούμε τη χρήση «ιδιαιτέρων» συναρτήσεων όπως η συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε μια τέτοια έκφραση?
- Μπορούμε να γράψουμε ένα απεριοδικό σήμα ισχύος ως

$$x(t) = x_0 + x_z(t)$$

με

- x_0 τη μέση τιμή του σήματος (αριθμός)

$$x_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

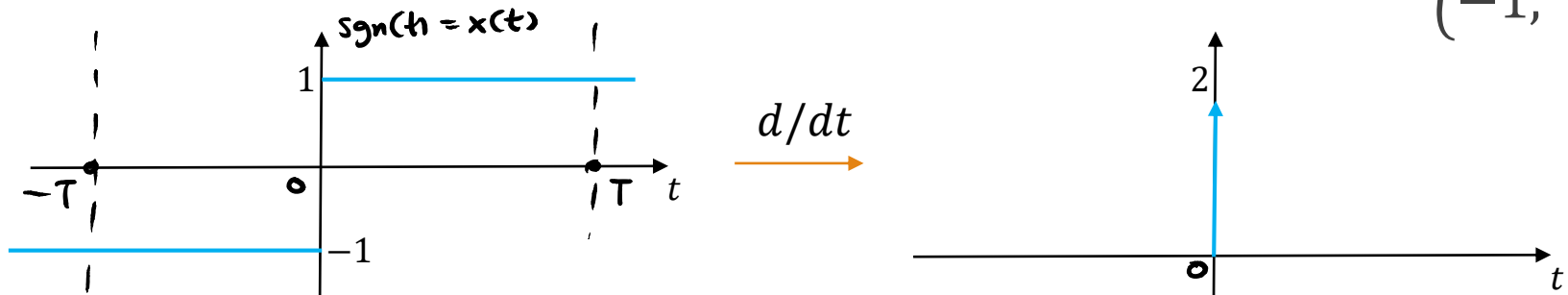
- $x_z(t)$ το υπόλοιπο σήμα μηδενικής μέσης τιμής

- Τότε

$$X(f) = x_0 \delta(f) + X_z(f)$$

- Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, για το μετασχ. Fourier του σήματος $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $x_0 = 0$

- Άρα

$$\text{sgn}(t) = x(t) = 0 + x_z(t) \leftrightarrow X(f) = 0 \cdot \delta(f) + X_z(f) = X_z(f)$$

- Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$\frac{d}{dt} x_z(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Leftrightarrow X_z(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

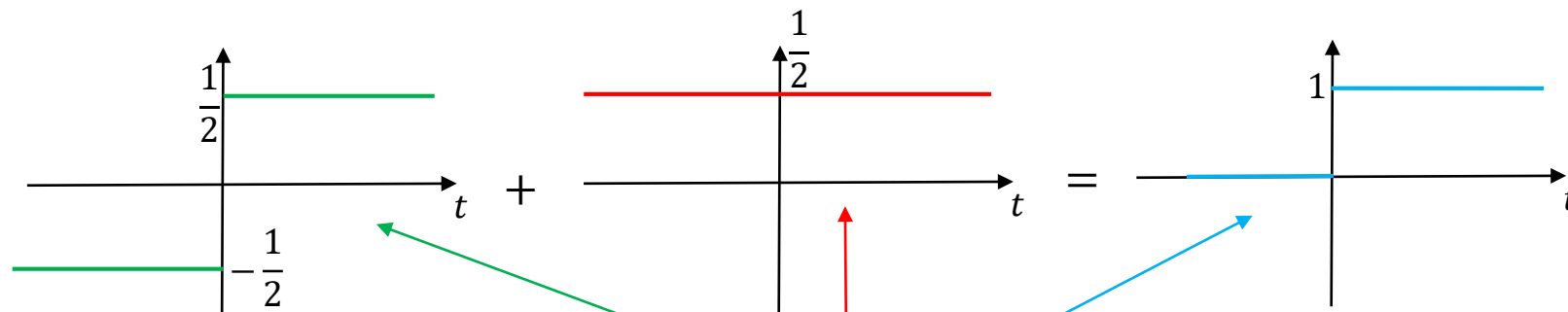
σύμφωνα με την ιδιότητα της παραγωγίσης του μετασχ. Fourier

- Οπότε

$$X(f) = X_z(f) = F\{\text{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- Το σήμα $u(t)$ γράφεται ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

- Άρα

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Οπότε

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Συνήθη ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}(fT)$
$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT\text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Για την αντίστροφη διαδικασία εύρεσης του σήματος στο χρόνο από το μετασχ. Fourier του, συνήθως ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:

○ Χρήση του ορισμού

○ Χρήση ιδιοτήτων (π.χ. δυϊκότητα)

○ Χρήση πινάκων γνωστών μετασχηματισμών

ενώ χρησιμοποιείται συχνά η τεχνική του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω ότι γνωρίζετε τα παρακάτω:

■ Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές

■ Ισχύει

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t), \quad A \in \mathbb{R}$$

■ Ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15} \quad \text{Parseval}$$

Βρείτε το $x(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{4}{15}$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Έχουμε $x(t) > 0$ και $x(t) \in \mathbb{R}$ ①

Επίσης $F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t)$, $A \in \mathbb{R}$

$$(2+j2\pi f)X(f) = F\{Ae^{-3t}u(t)\}$$

$$= \frac{A}{3+j2\pi f}$$

Άρα $X(f) = \frac{A}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \xleftrightarrow[\text{PFE}]{F^{-1}} x(t) = A(e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t))$

Είρα $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ae^{-2t}u(t) - Ae^{-3t}u(t))^2 dt = \frac{4}{15}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

- Παράδειγμα:

Λύνοντας ως προς A έχουμε $A = \pm 4$

Από ① επιλέγουμε $A = 4$, οπότε η λύση μας θα είναι:

$$x(t) = 4e^{-2t}u(t) - 4e^{-3t}u(t)$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

