ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η

- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

Η διάλεξη αυτή περιέχει Ε.ΒΑ.

E.BA

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier (review…)

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ \lvert X(f)\rvert = \lvert X(-f)\rvert, \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier (review…)

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(t) * y(t)$, τότε $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi f t} dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt}_{Y(f) e^{-j2\pi f \tau}} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(Y(f) e^{-j2\pi f \tau} \right) d\tau$$

$$= Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = Y(f) X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε την έξοδο του ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-2t}u(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t)$

Από την ιδιότητα $y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = X(f)H(f)$, έχουμε:

$$X(f) = F\{x(t)\} = F\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$H(f) = F\{h(t)\} = F\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{2+j2\pi f}$$

Άρα

$$Y(f) = H(f)X(f) = \frac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)} = \frac{A}{1+j2\pi f} + \frac{B}{2+j2\pi f}$$

με

$$A = \frac{1}{\cancel{(1+j2\pi f)}(2+j2\pi f)}\cancel{(1+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f:=-1} = 1$$

$$B = \frac{1}{(1+j2\pi f)\cancel{(2+j2\pi f)}}\cancel{(2+j2\pi f)}\Big]_{j2\pi f:=-2} = -1$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

Άρα

$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}$$

Από γνωστά ζεύγη

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+j2\pi f}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+j2\pi f}\right\}$$

$$= e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$

Απόδειξη:

Είναι

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \\ u = -t \end{array}\right\} \Rightarrow x(-u) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-j2\pi f u} df$$

$$u \longleftrightarrow f$$

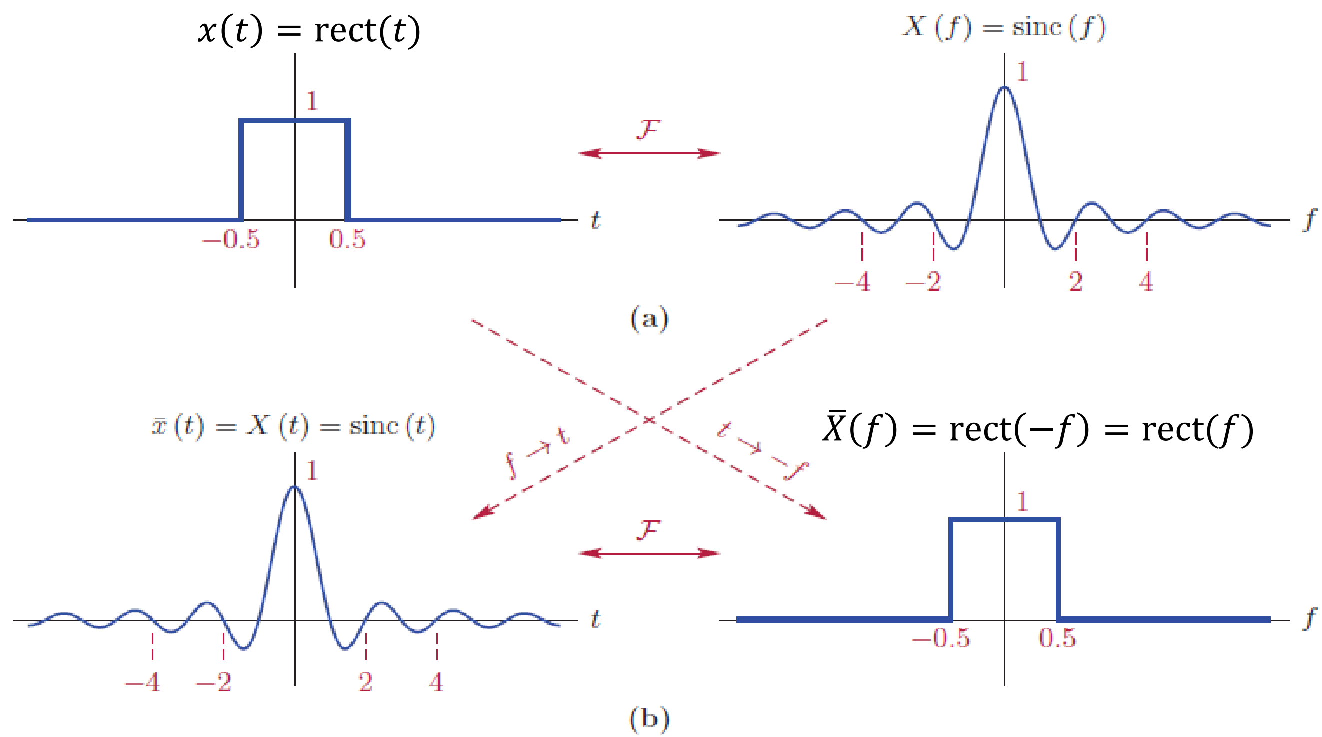
$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-j2\pi f u} du = F\{X(t)\}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Γνωρίζαμε ότι

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$T\,\mathrm{sinc}(tT) \overset{F}{\longleftrightarrow} \mathrm{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{F} Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)e^{j2\pi ut}\,du \right)}_{x(t)} y(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi(f-u)t}\,dt}_{Y(f-u)}\,du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(u)Y(f-u)\,du = X(f) * Y(f)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

  - Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = 2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$

Είναι

$$X(f) = \mathcal{F}\left\{2\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} * \mathcal{F}\left\{\cos(2\pi f_0 t)\right\}$$

$$= 2T\,\mathrm{sinc}(fT) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right)$$

$$= T\,\mathrm{sinc}\left((f-f_0)T\right) + T\,\mathrm{sinc}\left((f+f_0)T\right)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$

Απόδειξη:

Έστω $z(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, τότε $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j2\pi ft} dt$

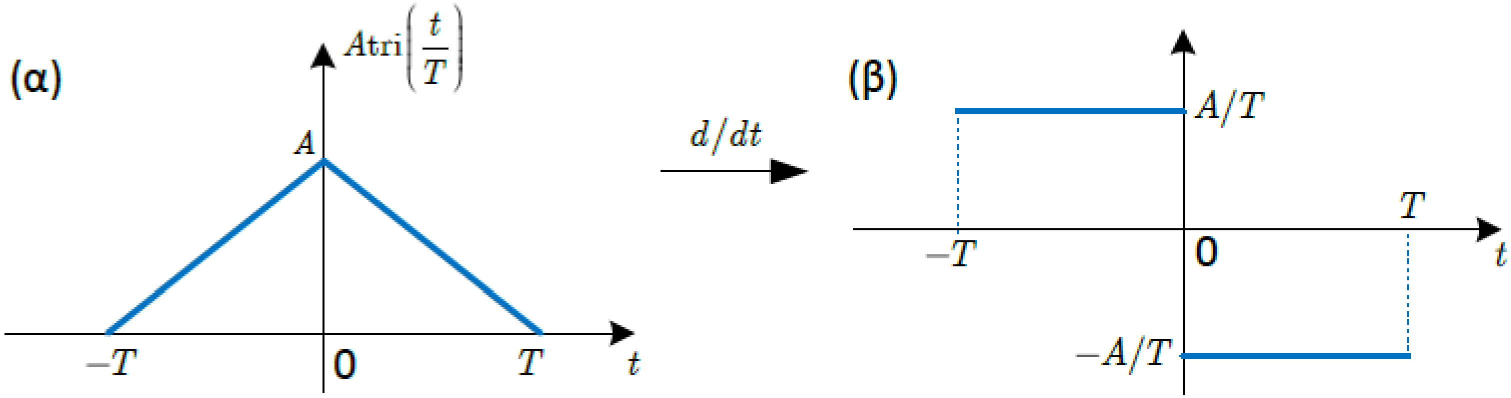
$$= x(t)e^{-j2\pi ft}\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left(e^{-j2\pi ft}\right)' dt \qquad \frac{x(+\infty)=0}{x(-\infty)=0}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j2\pi f)e^{-j2\pi ft}dt = j2\pi f \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}_{X(f)}$$

$$= j2\pi f X(f)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού $x(t) = A\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$



$$F\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = F\left\{\frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)\right\} - F\left\{\frac{A}{T}\text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)\right\}$$

$$= \frac{A}{\cancel{T}}\cancel{T}\text{sinc}(fT)e^{j2\pi f\frac{T}{2}} - \frac{A}{\cancel{T}}\cancel{T}\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi f\frac{T}{2}}$$

$$= A\,\text{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)$$

$$= A\,\text{sinc}(fT)\,2j\sin(\pi fT)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Οπότε

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = \cancel{j}2A\,\mathrm{sinc}(fT)\,\sin(\pi f T) \overset{\text{ιδιότητα}}{=\!=} \cancel{j}2\pi f\,X(f)$$

Άρα

$$X(f) = \frac{A}{\pi f}\,\mathrm{sinc}(fT)\,\sin(\pi f T)$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f)\rvert^2 df$

Απόδειξη:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X(u)^* e^{-j2\pi ut} du \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f-u)t} dt}_{\delta(f-u)}\, du\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) X^*(u)\, \delta(f-u)\, du\, df$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(u)\, \delta(f-u)\, du}_{X^*(f)}\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

  - Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f)df$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\underbrace{\text{sinc}(f)}_{X(f)}\Big)^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

με $x(t) = \text{rect}(t)$. Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f)\,df = \int_{-1/2}^{1/2} 1^2\,dt = t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(f)\,df = 1$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ