

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η

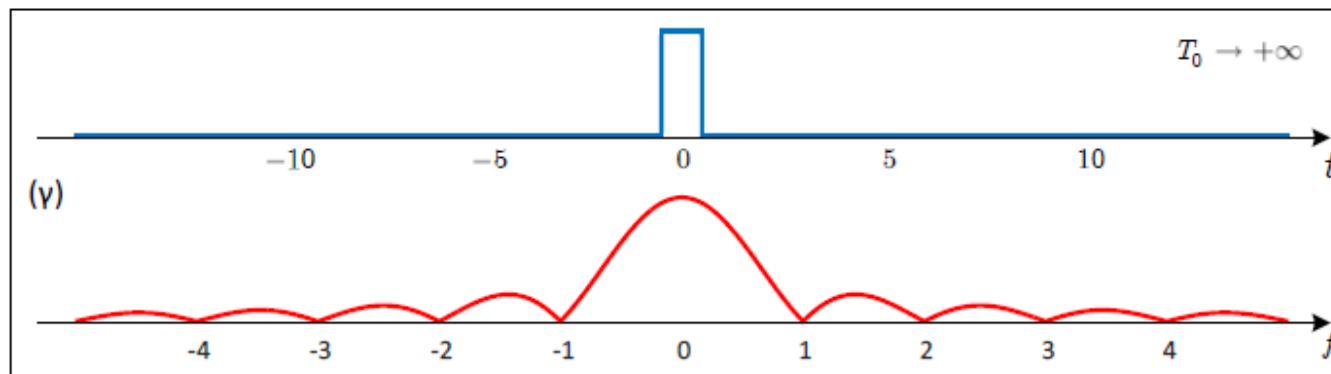
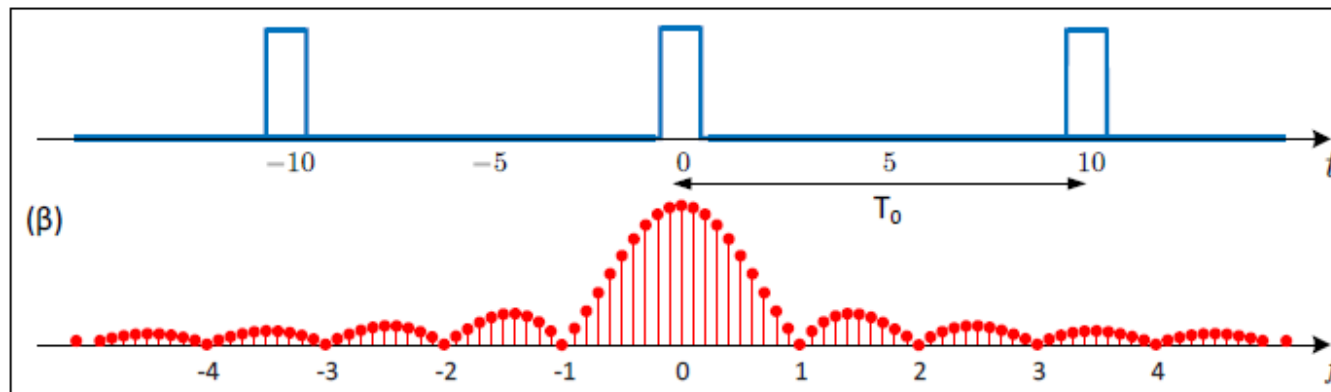
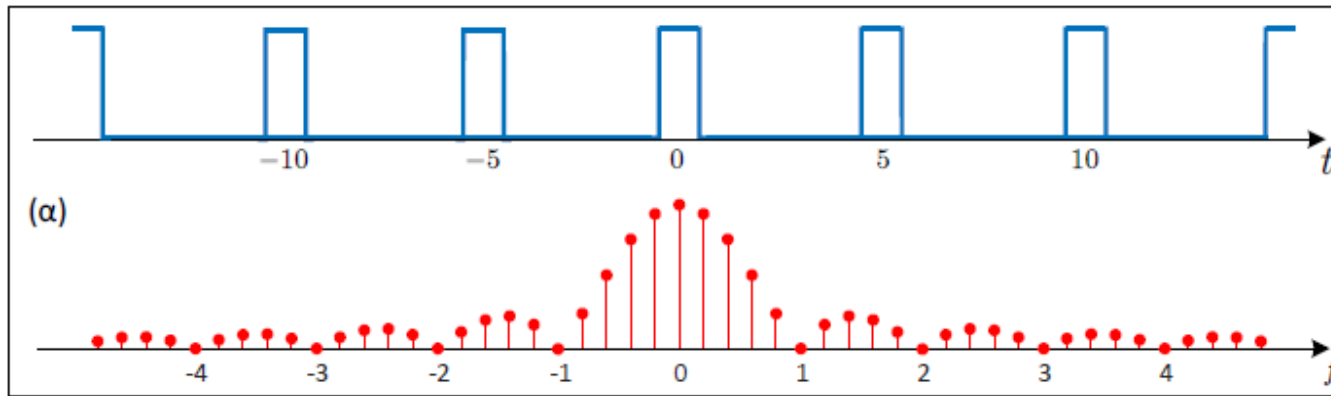
- Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες

Η διάλεξη αυτή
περιέχει 4 Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ



• Μετασχηματισμός Fourier (**review...**)



• Μετασχηματισμός Fourier (**review...**)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt,$$

$$X_I(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)},$$

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

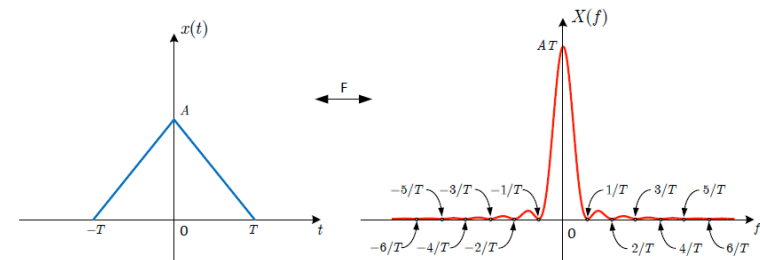
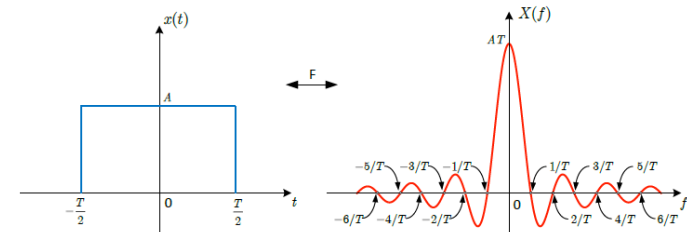
$$X(f) = |X(f)| e^{j\phi_x(f)}$$

• Για **πραγματικά** σήματα

$$X(f) = X^*(-f)$$

• **Ζεύγη:**

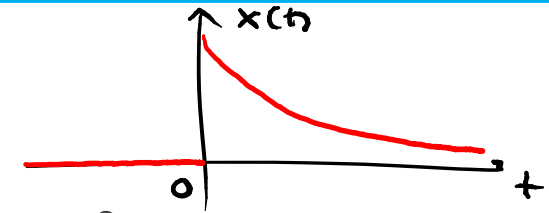
- $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}(fT)$
- $x(t) = A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow X(f) = AT \text{sinc}^2(fT)$



- Μετασχηματισμός Fourier (**review...**)

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$



Είναι

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \end{matrix} \\
 &= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

Πρέπει να βρούμε το

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft}$$

• Μετασχηματισμός Fourier (review...)

• Παράδειγμα:

Δεν μπορούμε να πούμε ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$ αρα $a+j2\pi f > 0$
 γιατί οι μυαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη!

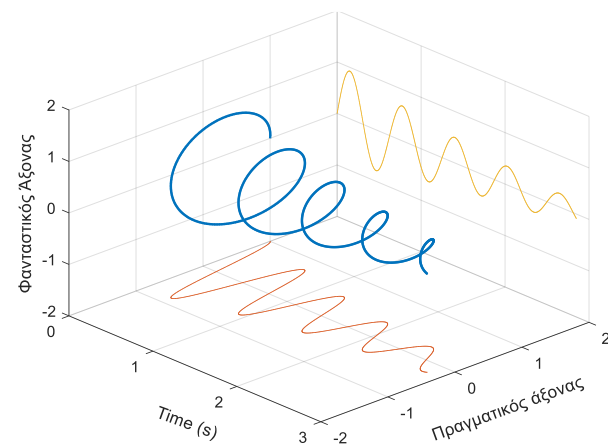
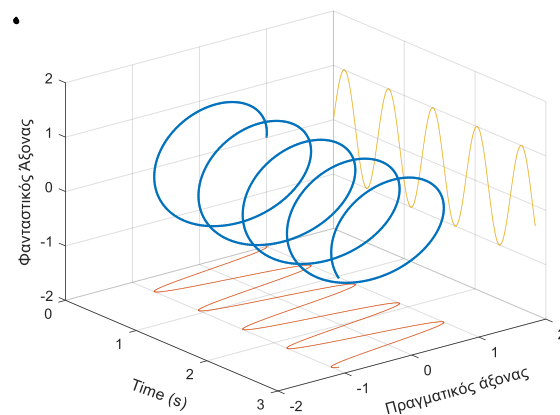
Όμως ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{-j2\pi ft}$
 έχει τη μορφή: $\longrightarrow$

Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή της με
 e^{-at} , $a > 0$, τότε θα πάρουμε: $\longrightarrow$

Ξεκινάει, το όριο της στο $+\infty$ παίρνει
 την τιμή 0.

Οότε

$$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}.$$



• Μετασχηματισμός Fourier

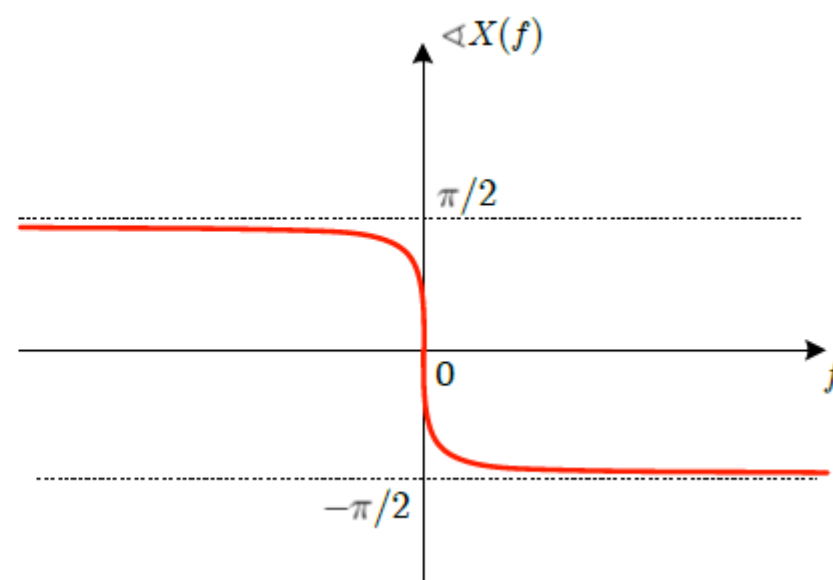
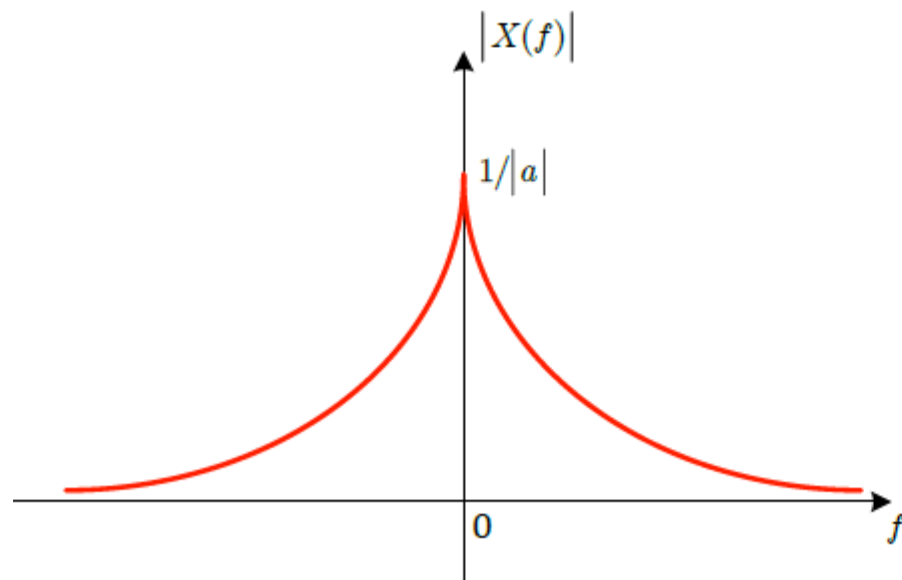
• Παράδειγμα:

Μέτρο: $|X(f)| = \frac{1}{|a + j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$

$\swarrow$ $X_2(f)$ $\swarrow$ $X_1(f)$

Φάση: $X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{a - j2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} = \frac{a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} + j \frac{-2\pi f}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \Rightarrow \varphi(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)}$

Άρα $\varphi(f) = \tan^{-1} \frac{-2\pi f}{a}$.



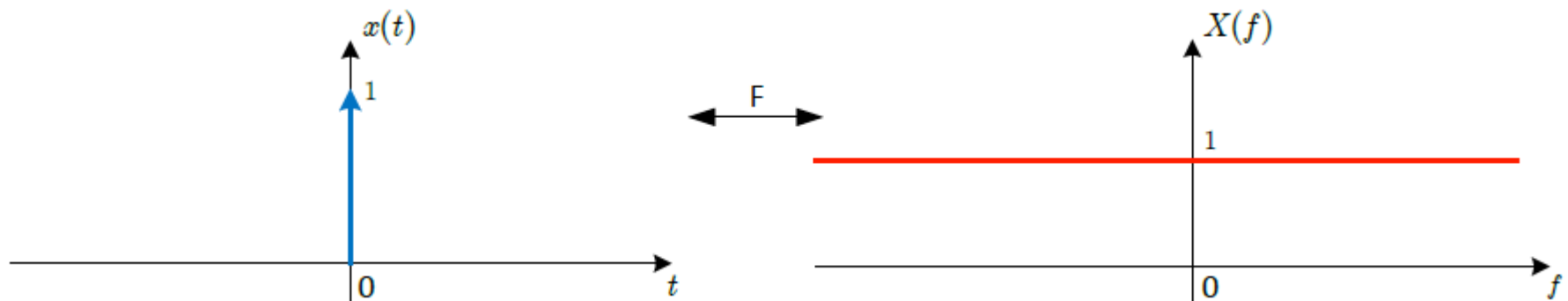
- Μετασχηματισμός Fourier

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

Είναι
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = 1$$

Άρα
$$x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = 1 \quad \forall f$$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Ε.ΒΑ

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$

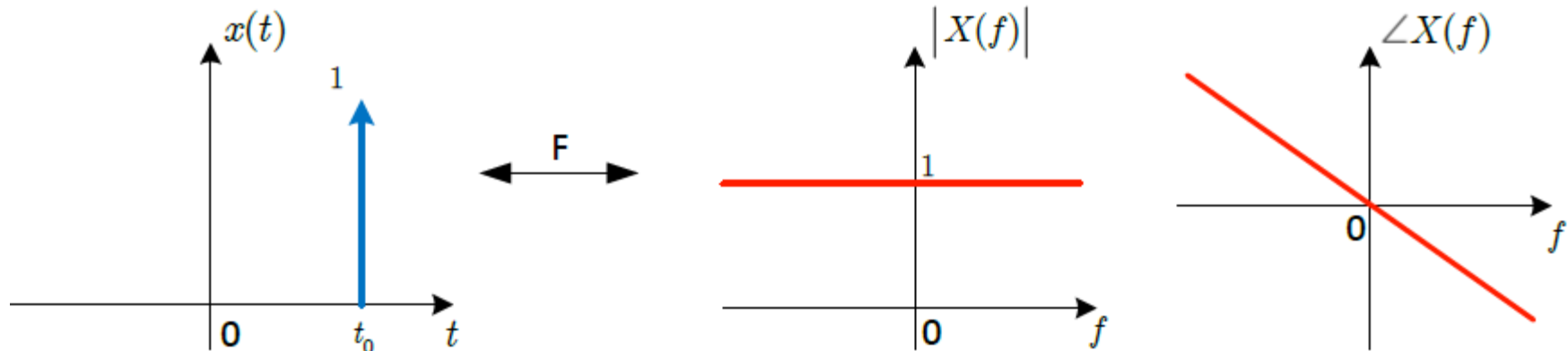
Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0}$$

ή

$$x(t) = \delta(t - t_0) \xleftrightarrow{F} X(f) = e^{-j2\pi ft_0}$$

$|X(f)| = 1$
 $\varphi(f) = -2\pi ft_0$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

E.BA

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, καθώς και του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$

Είναι

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi ft} \Big|_{f=0} = 1$$

Άρα

$$x(t) = 1 \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f)$$

Όφαια

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t}$$

Άρα

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f - f_0)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi ft_0}x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Διαικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγωγή στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ X(f) = X(-f) , \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 \text{Λ} \quad z(t) = Ax(t) + By(t) &\xrightarrow{F} Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + B \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= AX(f) + BY(f).
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$, $\forall t$

Είναι

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt + \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t} \right) - \frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a+j2\pi f + a-j2\pi f}{(a-j2\pi f)(a+j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

αφού τα όρια τείνουν στο μηδέν.

Άρα

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$$

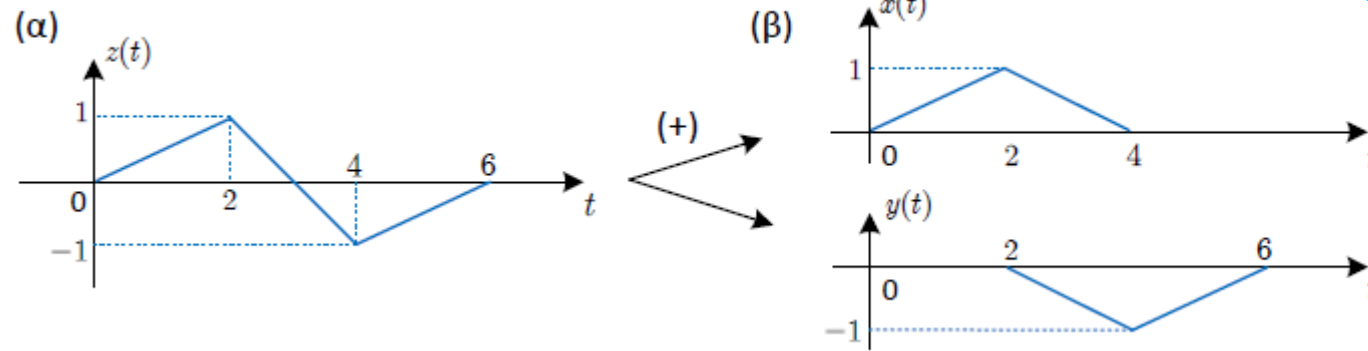
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 \text{Λν } z(t) &= x(t - t_0), \text{ τότε } Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &\quad \left. \begin{aligned} u &= t - t_0 \Rightarrow du = dt \\ t_1 &= -\infty \rightarrow u_1 = -\infty \\ t_2 &= +\infty \rightarrow u_2 = +\infty \end{aligned} \right\} = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f(u+t_0)} du = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} du = e^{-j2\pi ft_0} X(f)
 \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier



Ε.ΒΑ

Είναι $X(f) = F\{x(t)\} = F\left\{\text{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right)\right\} = 2 \text{sinc}(2f) e^{-j2\pi 2f}$

$Y(f) = F\{y(t)\} = F\left\{-\text{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right)\right\} = -2 \text{sinc}(2f) e^{-j2\pi 4f}$

Λόρα $Z(f) = X(f) + Y(f) = 2 \text{sinc}(2f) (e^{-j2\pi 2f} - e^{-j2\pi 4f})$

$$= 2 \text{sinc}(2f) e^{-j2\pi 3f} (e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f})$$

$$= 2 \text{sinc}(2f) 2j \sin(2\pi f) e^{-j2\pi 3f}$$

$$= j 4 \text{sinc}(2f) \cdot \sin(2\pi f) e^{-j6\pi f}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f - f_0)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \text{Είναι } Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi (f-f_0) t} dt \\ &= X(f-f_0) \end{aligned}$$

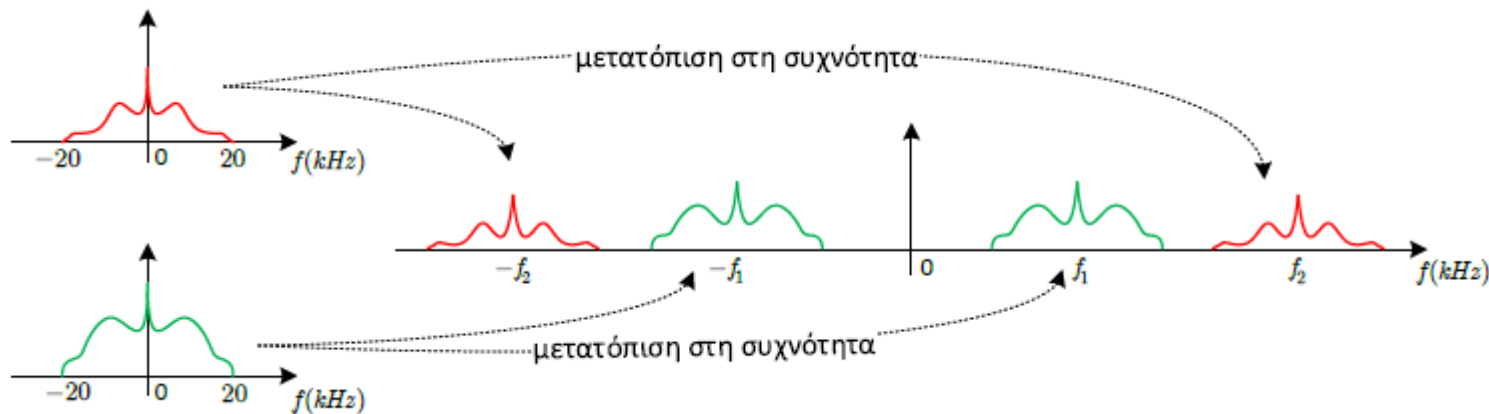
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t) \cos(2\pi f_0 t)$

Είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= 2x(t) \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \right) \\ &= x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t} \\ &\quad \updownarrow F \end{aligned}$$

$$Y(f) = X(f + f_0) + X(f - f_0)$$



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$

Απόδειξη:

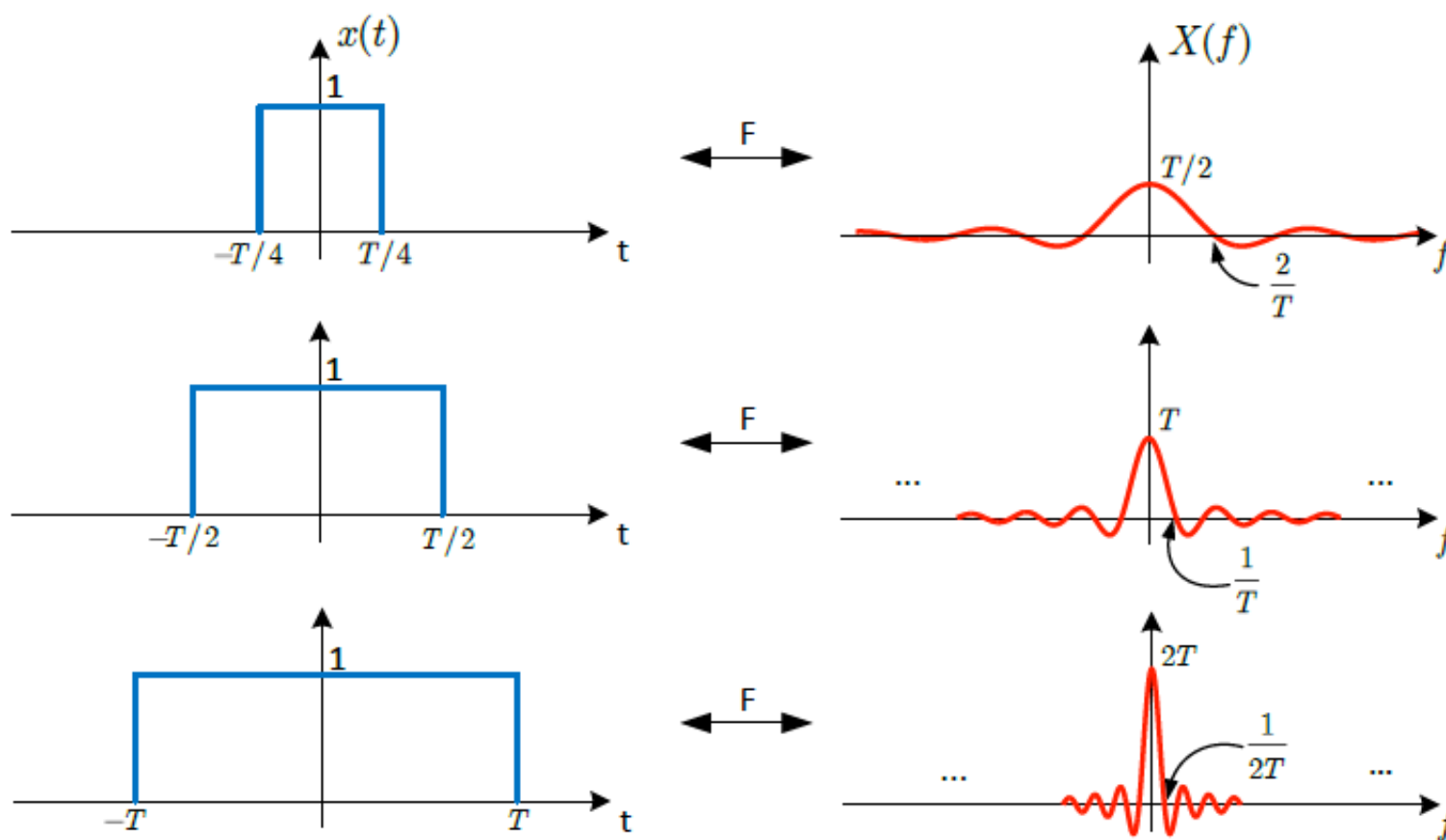
$$\begin{aligned} \text{Έστω } a > 0 : \quad z(t) = x(at), \quad \text{τότε } Z(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j2\pi ft} dt \\ &\quad \left. \begin{aligned} u = at &\Rightarrow du = a dt \\ t_1 = -\infty &\Rightarrow u_1 = -\infty \\ t_2 = +\infty &\Rightarrow u_2 = +\infty \end{aligned} \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f \frac{u}{a}} \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi \frac{f}{a} u} du = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Όμοια για } a < 0, \quad Z(f) = \frac{1}{-a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$\text{Συνολικά} \quad x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T \text{sinc}(fT)$$



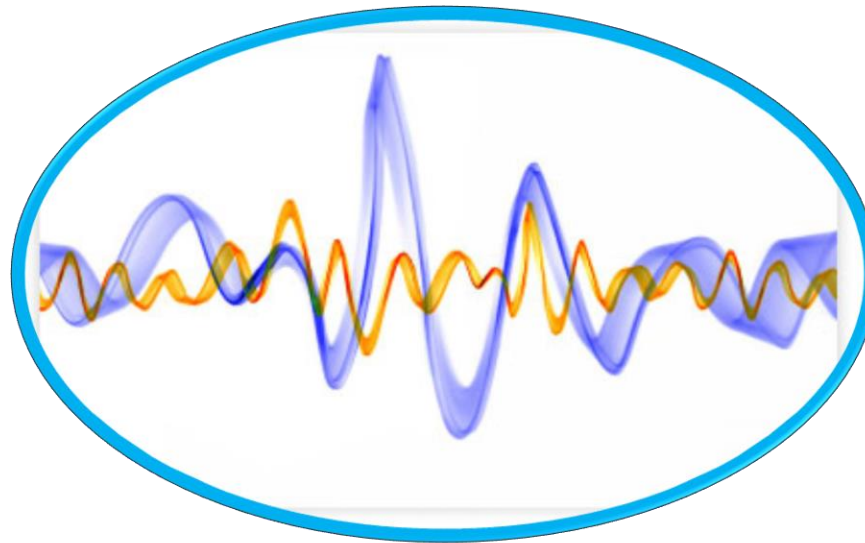
• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 \text{Έστω } z(t) &= x(t) * y(t), \text{ τότε } Z(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt}_{Y(f) e^{-j2\pi f\tau}} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(Y(f) e^{-j2\pi f\tau} \right) d\tau \\
 &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f) X(f)
 \end{aligned}$$

Συνεχίζεται... 😊



E.BA.

AM: 4256

AM: 4220

AM: 4264

AM: 4731 (Φ)