ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10Η

- Μετασχηματισμός Fourier

Η διάλεξη αυτή περιέχει 5 Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ

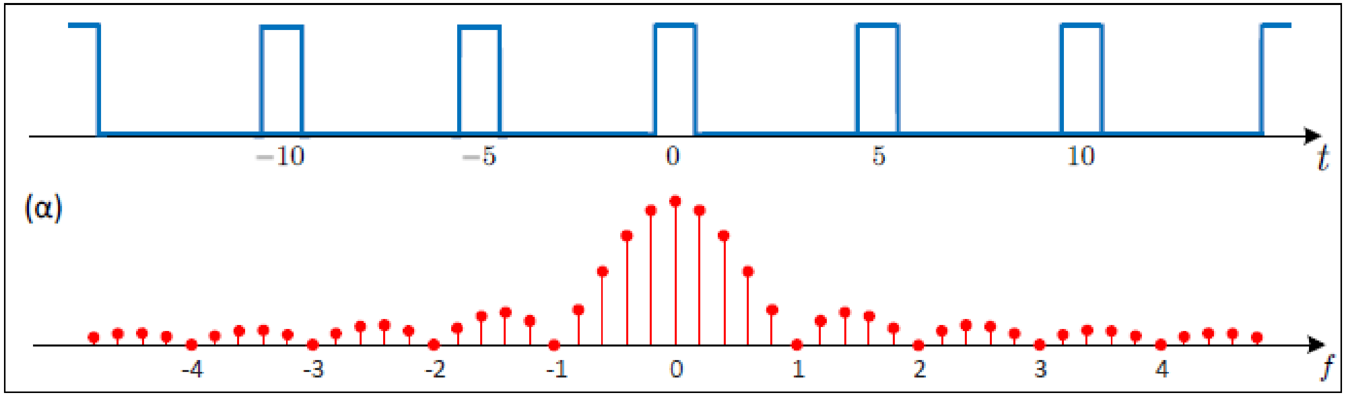
- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

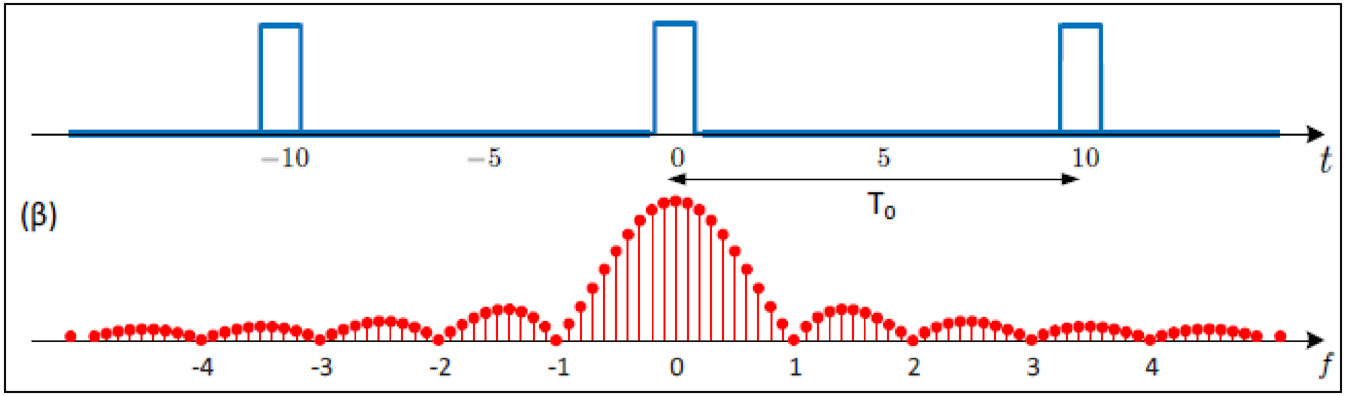
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

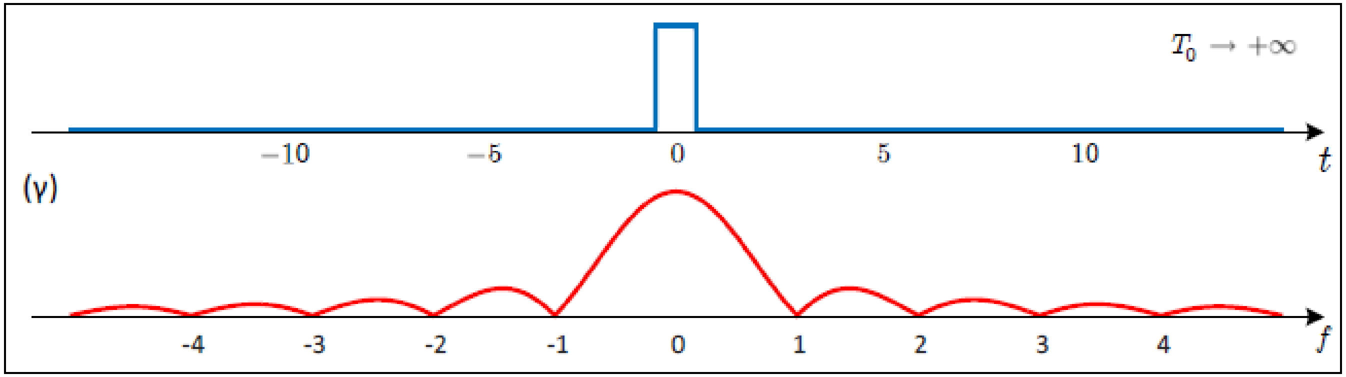
η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \to +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

- **Προς το μετασχ. Fourier…**







- **Προς το μετασχ. Fourier…**
- Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Bigg(\overbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}^{X_k} \Bigg) e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Όταν $T_0 \to +\infty$, τότε $\frac{1}{T_0} \to df$ και $kf_0 \to f$

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει) του f
  - Έχει μέτρο και φάση
  - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\, dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi f t) dt$$

$$X_I(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi f t)\, dt$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Μέτρο:

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση:

$$\phi_x(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι για πραγματικά σήματα

$$X(f) = X(-f)^*$$

- Η συζυγής συμμετρία δηλώνει ότι το μέτρο του μετασχηματισμού (**φάσμα πλάτους**) είναι άρτια συνάρτηση του f, ενώ η φάση (**φάσμα φάσης**) είναι περιττή συνάρτηση του f

- Αναμενόμενο, αφού ο μετασχ. Fourier ορίστηκε ως μια γενίκευση των συντελεστών Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**

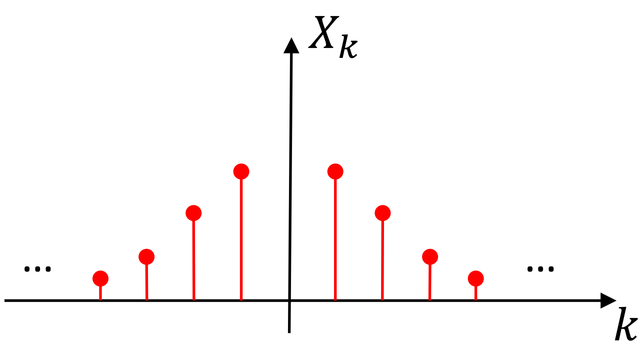
- Ο μετασχ. Fourier κάνει την ίδια δουλειά με τους συντελεστές Fourier αλλά για *απεριοδικά* σήματα

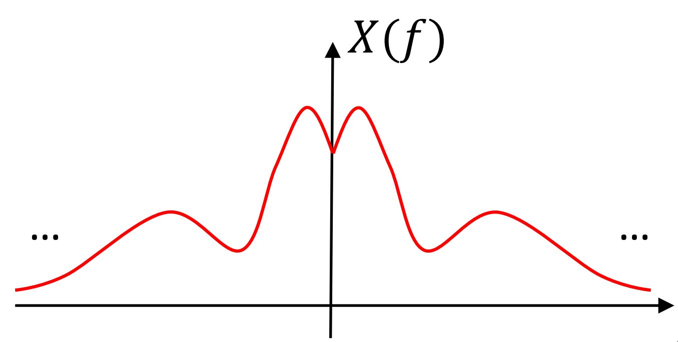
- Η σειρά Fourier αναπτύσσει ένα **περιοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) άθροισμα *μετρήσιμων* διακριτών συχνοτήτων kf_0, με πλάτη $2|X_k|$ και φάσεις φ_k:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- Ο μετασχ. Fourier αναπτύσσει ένα **απεριοδικό** σήμα σε ένα άπειρο (εν γένει) *μη μετρήσιμο* άθροισμα ***κάθε*** συχνότητας f, με πλάτη $2|X(f)|$ και φάσεις $\angle X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|X(f)|\cos\big(2\pi f t + \angle X(f)\big)\, df$$





- **Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη**
- Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < +\infty$$

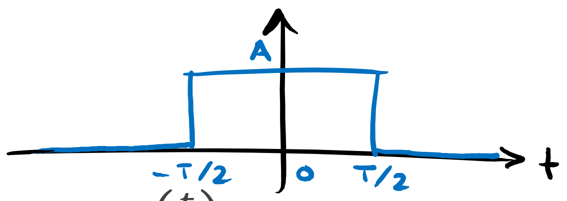
  - Το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
    - Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
  - Δεν είναι αναγκαία συνθήκη
- Επίσης αν

$$\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}^{E_x} < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

- Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετασχ. Fourier

- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j2\pi f t}\, dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overbrace{e^{-j2\pi f t}}^{e^{-at}}\, dt =$$

$$= A \frac{1}{-j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big]_{t=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{A}{j2\pi f}\left(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f}\left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}\right) = \frac{A}{\cancel{j2}\pi f}\, \cancel{2j} \sin(\pi f T)$$

$$= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T) = A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = AT \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} =$$

$$= AT\, \mathrm{sinc}(fT) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \mathrm{sinc}(x)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Βρήκαμε ότι $x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)$

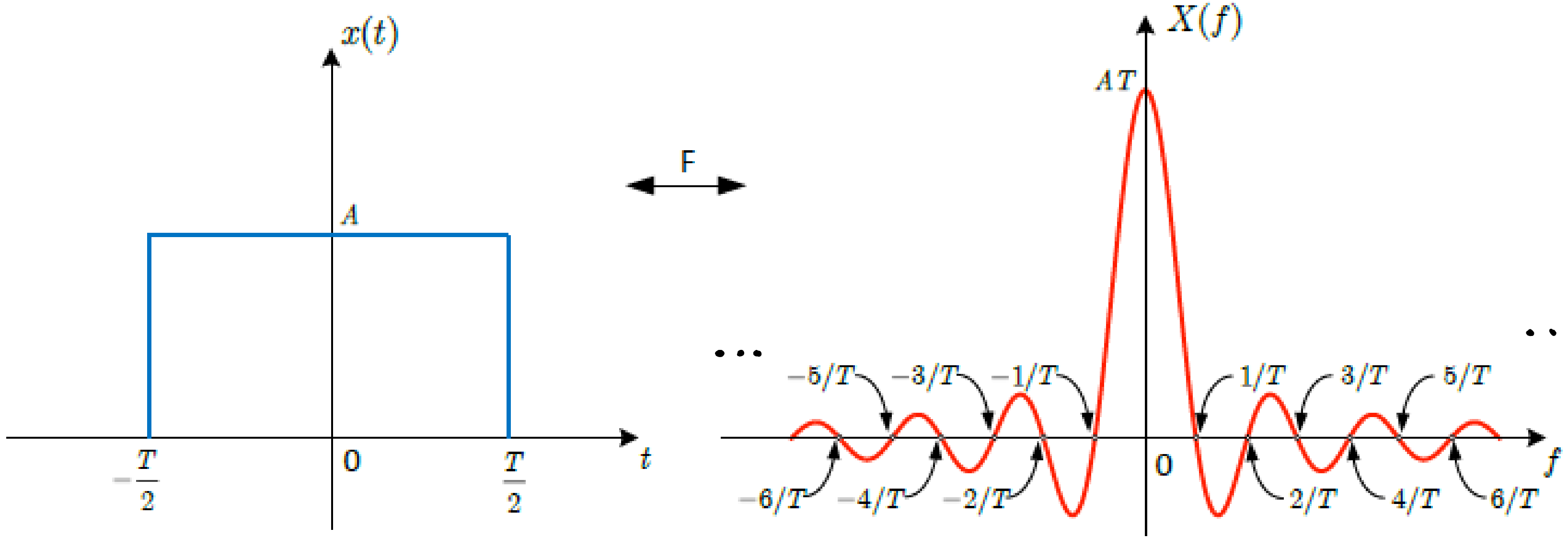
Σημεία μηδενισμού: $AT\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = 0 \Rightarrow \sin(\pi f T) = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow \pi f T = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = \dfrac{k}{T},\ k \in \mathbb{Z}.$

Επίσης:

$X_R(f) = \mathrm{Re}\{X(f)\} = AT\,\mathrm{sinc}(fT) \leftarrow$ πραγματικό μέρος

$X_I(f) = \mathrm{Im}\{X(f)\} = \emptyset \quad (!) \leftarrow$ φανταστικό μέρος



- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

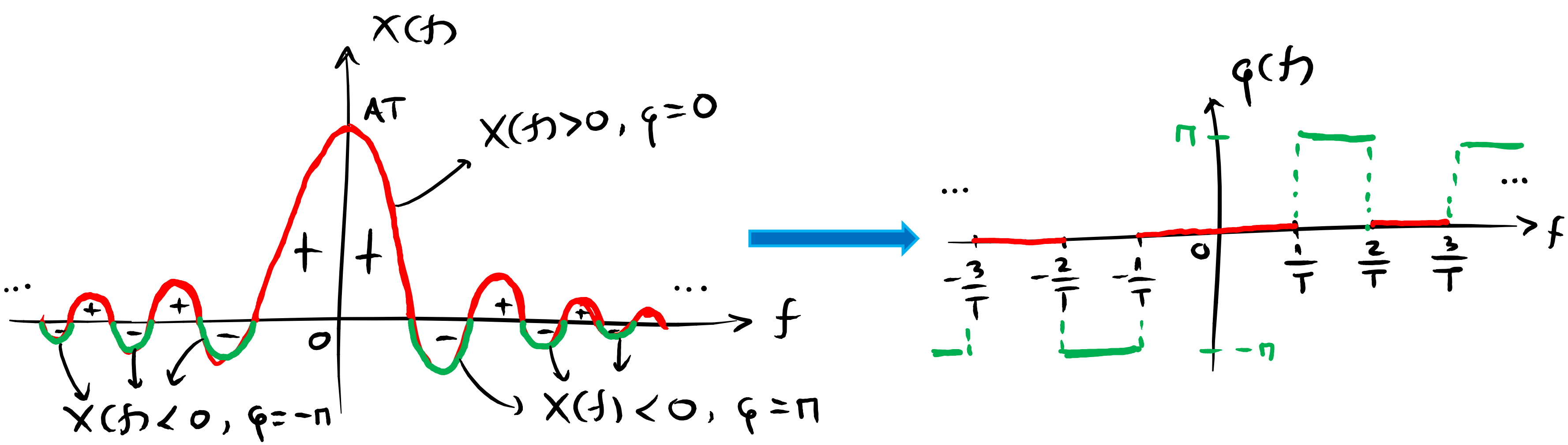
Ζητάμε το $X(f)$ σε πολική μορφή : $X(f) = |X(f)|e^{j\varphi(f)}$

$= AT\,\mathrm{sinc}(fT) \in \mathbb{R}$

- $|X(f)| = |AT\,\mathrm{sinc}(fT)| \geq 0$

- $\measuredangle X(f) = \varphi(f) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\dfrac{0}{AT\,\mathrm{sinc}(fT)} = \tan^{-1} 0 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Άρα έχουμε τρεις επιλογές για τη φάση : $0, \pi, -\pi$, εφόσον βλέπουμε τη φάση στο διάστημα από $-\pi$ ως π.

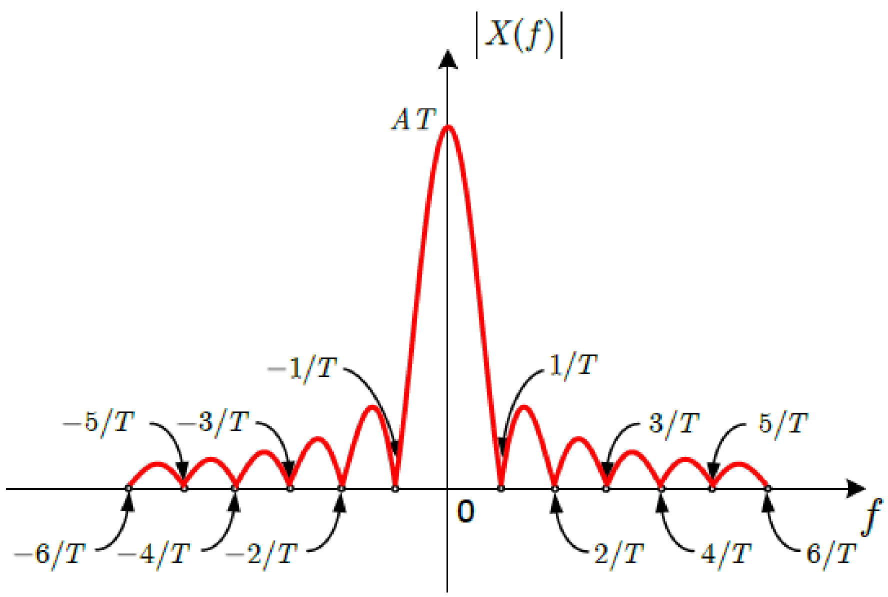


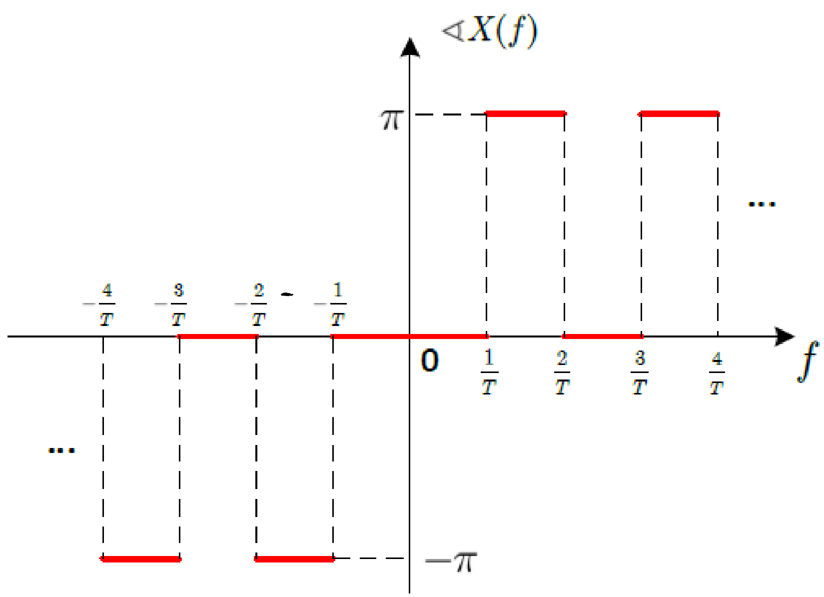
- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

$$|X(f)| = A\,T\left|\mathrm{sinc}(fT)\right|$$

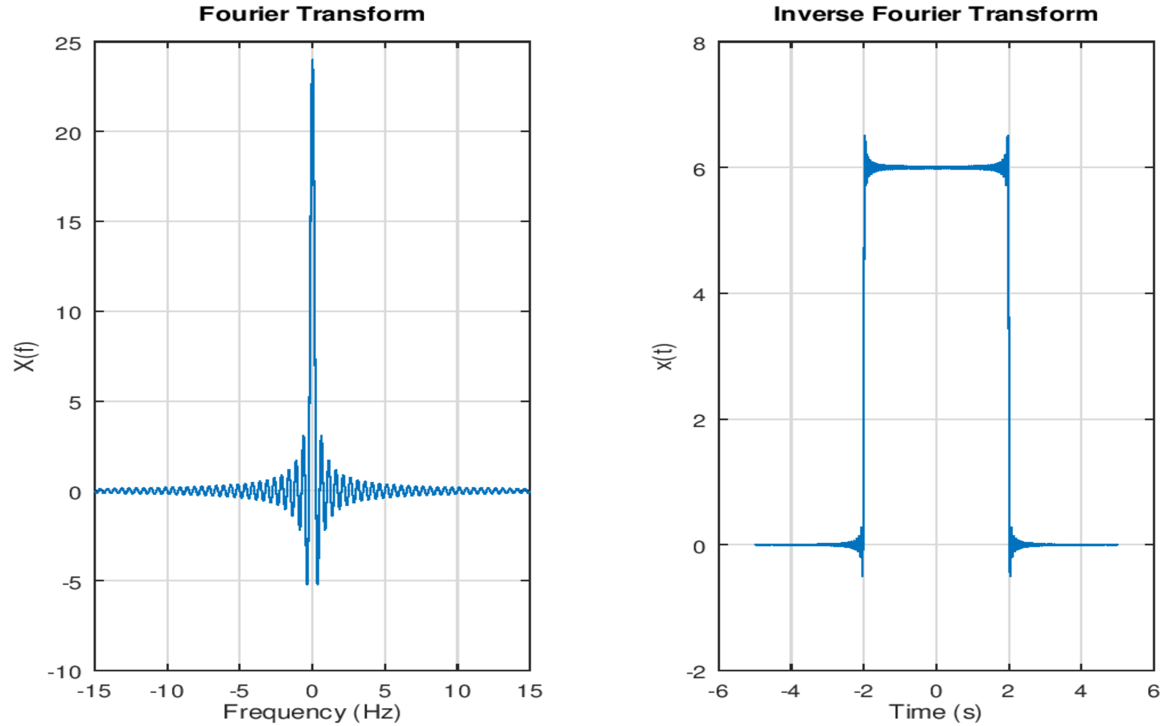
$$\sphericalangle X(f) = \begin{cases} \pi, & \frac{(1+l)}{T} < f < \frac{(2+l)}{T}, \\ -\pi, & -\frac{(2+l)}{T} < f < -\frac{(1+l)}{T}, \\ 0, & \frac{l}{T} < |f| < \frac{(l+1)}{T} \end{cases}$$





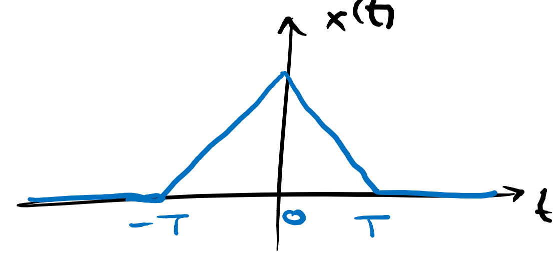
- **Μετασχηματισμός Fourier**
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```
% Πλάτος παλμού
A = 6;
% Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
T = 4;
% Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01;
% Άξονας του χρόνου
t = -5:dt:5;
% Βήμα στη συχνότητα
df = 0.01;
% Άξονας συχνοτήτων (από -15 ως 15 Hz)
f = -15:df:15;
% Μετασχηματισμός Fourier
X = A*T*sinc(f*T);
% Αρχικοποίηση
x = zeros(size(t));
% Βρόχος επανάληψης
for i = 1:length(f)
  % Αντίστροφος μετασχ. Fourier
  x = x + X(i) .* exp(j*2*pi*f(i)*t);
end
% Κλιμάκωση (για λόγους που θα δείτε στη σειρά ασκήσεων :) )
x = df*x;
```




```
% Γράφημα
subplot(121);
plot(f, X);
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('X(f)');
title('Fourier Transform');
subplot(122);
plot(t, x);
xlabel('Time (s)');
ylabel('x(t)');
title('Inverse Fourier Transform');
```

- **Μετασχηματισμός Fourier**
- **Παράδειγμα:**



○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = A\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

Είναι $$A\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & -T < t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$X(f) = \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j2\pi f t}\, dt = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$ (πράξεις - πράξεις)

$$= AT\,\text{sinc}^2(fT)$$

Άρα

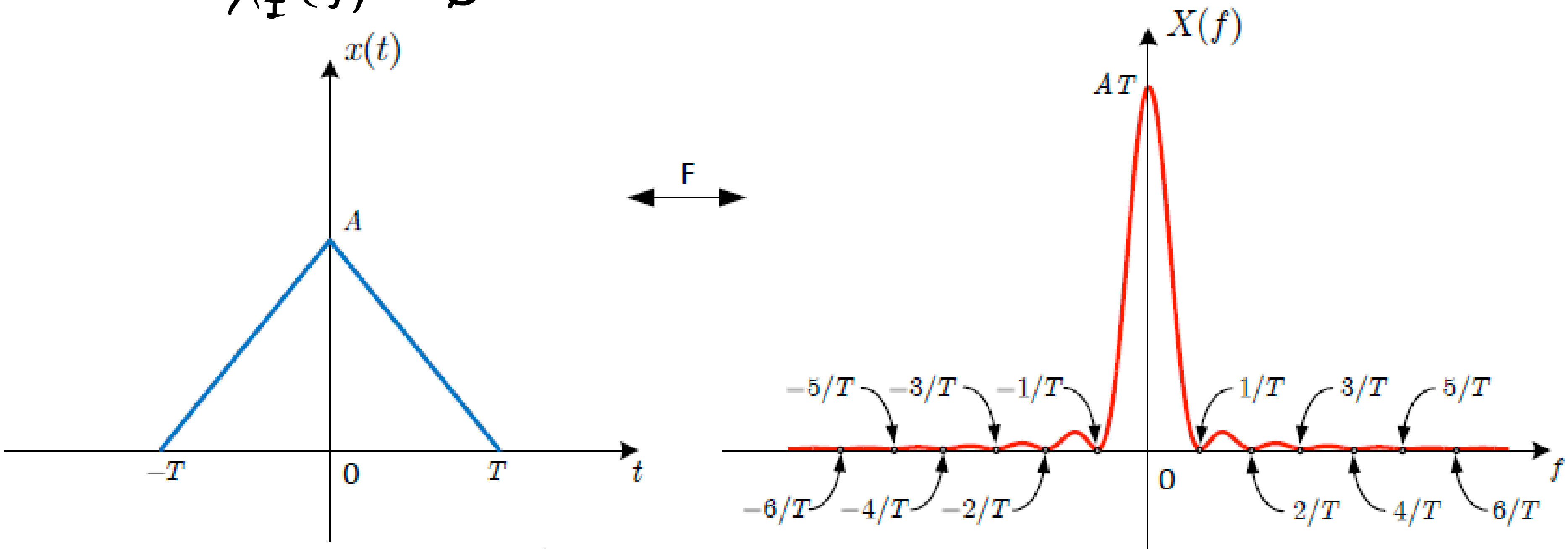
$$x(t) = A\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} X(f) = AT\,\text{sinc}^2(fT) \geq 0$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:

Είναι $X_R(f) = AT\,\text{sinc}^2(fT)$

$X_I(f) = 0$

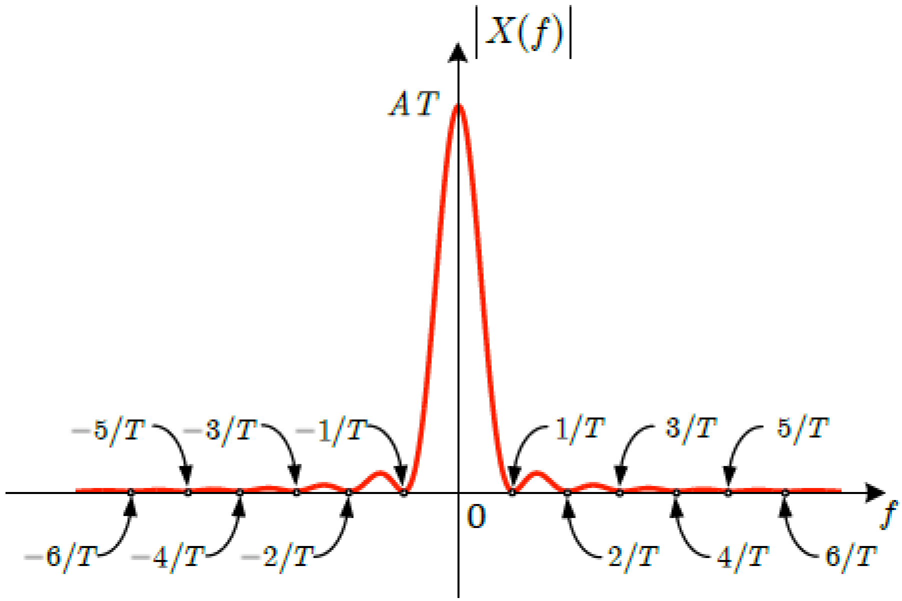


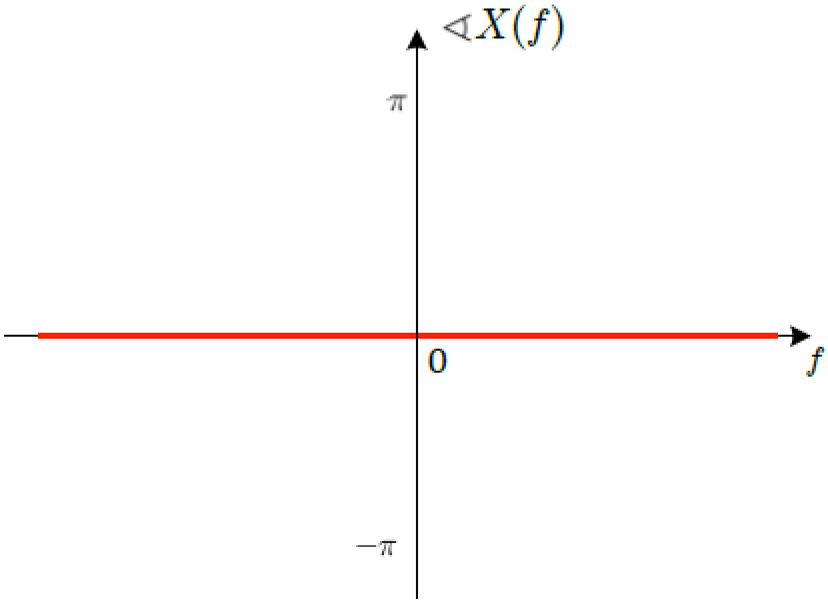
$$|X(f)| = |AT\,\text{sinc}^2(fT)| = |A|\,T\,\text{sinc}^2(fT)$$

$$\varphi(f) = \tan^{-1}\frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1}\frac{0}{\cdot\cdot} = k\pi,\ k\in\mathbb{Z} = 0\ \forall f$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα:



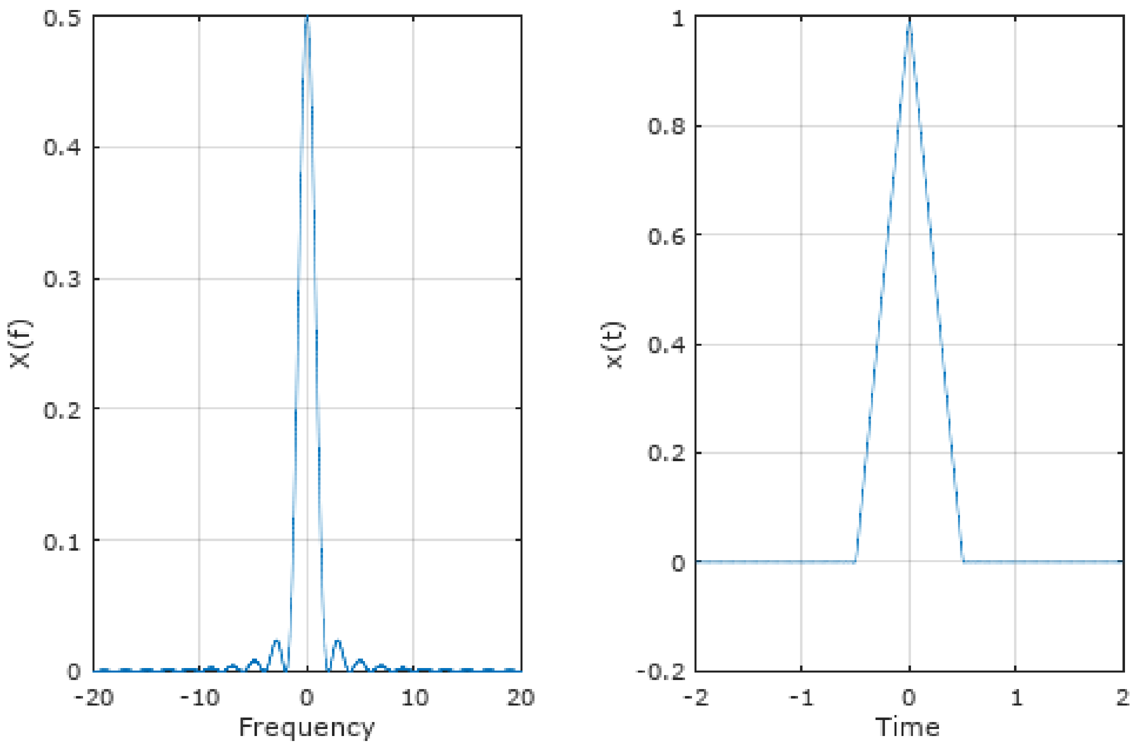


- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

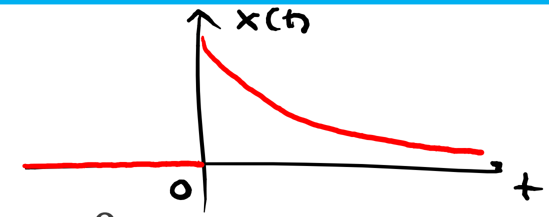
```
% Fourier Transform
% Triangular pulse

% Time axis
dt = 0.01;
t = -2:dt:2;
% Frequency axis
df = 0.01;
f = -20:df:20;
% Parameters
A = 1;
T = 0.5;
% Fourier Transform
X = A*T*sinc(f*T).^2;
subplot(121); plot(f, X); grid;
xlabel('Frequency');
ylabel('X(f)');
% Initialization
x = zeros(size(t));
% Synthesis of x(t) from X(f)
for i=1:length(f)
  x = x + X(i)*exp(j*2*pi*f(i)*t);
end
% Normalization
x = df*x;
% Plots
subplot(122); plot(t, x);
grid; xlabel('Time');
ylabel('x(t)');
```



Το παράδειγμα που κάναμε στην τάξη

- **Μετασχηματισμός Fourier**



- **Παράδειγμα:**

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \underbrace{u(t)}_{\begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}} e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt$$

$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{-(a+j2\pi f)} \left(\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right) \quad (1)$$

Πρέπει να βρούμε το

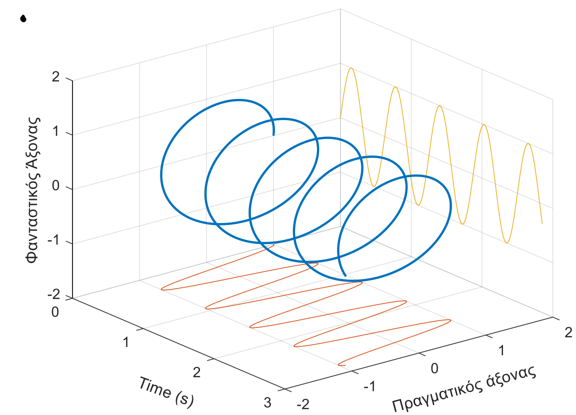
$$\lim_{t\to+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft}.$$

• Μετασχηματισμός Fourier

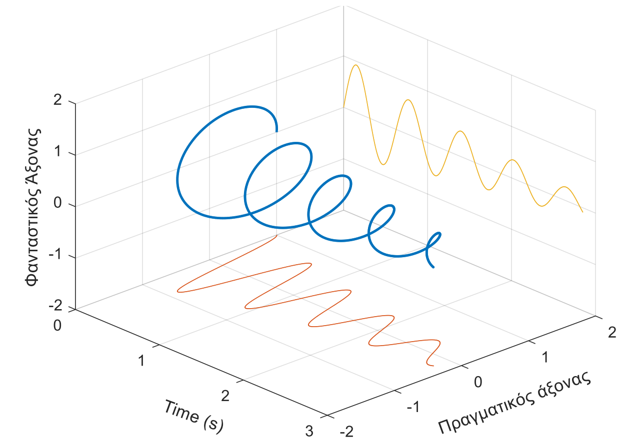
• Παράδειγμα:

Δεν μπορούμε να πούμε ότι $\lim_{t \to +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} = 0$ αφού $a+j2\pi f > 0$ γιατί οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν διάταξη!

Όμως ξέρουμε ότι η συνάρτηση $e^{-j2\pi ft}$ έχει τη μορφή: →



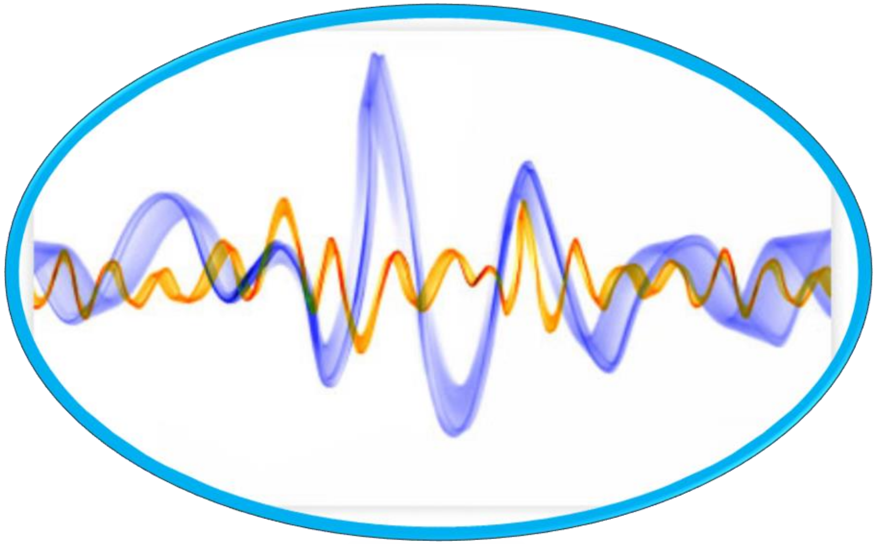
Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή της με e^{-at}, $a>0$, τότε θα πάρουμε: →



Ξεκάθαρα, το όριο της στο $+\infty$ παίρνει την τιμή 0.

Οπότε $$X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}.$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 4254

AM: 4166

AM: 4192

AM: 4242

AM: 3918