HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 9Η

- Σειρές Fourier - Ιδιότητες

Η διάλεξη αυτή περιέχει 5 Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ

- **Σειρές Fourier (review…)**

- **Εκθετική Σειρά Fourier**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- X_k **: συντελεστές Fourier**

$$X_k = \frac{1}{T_0}\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) dt$$

- Για **πραγματικά** σήματα:

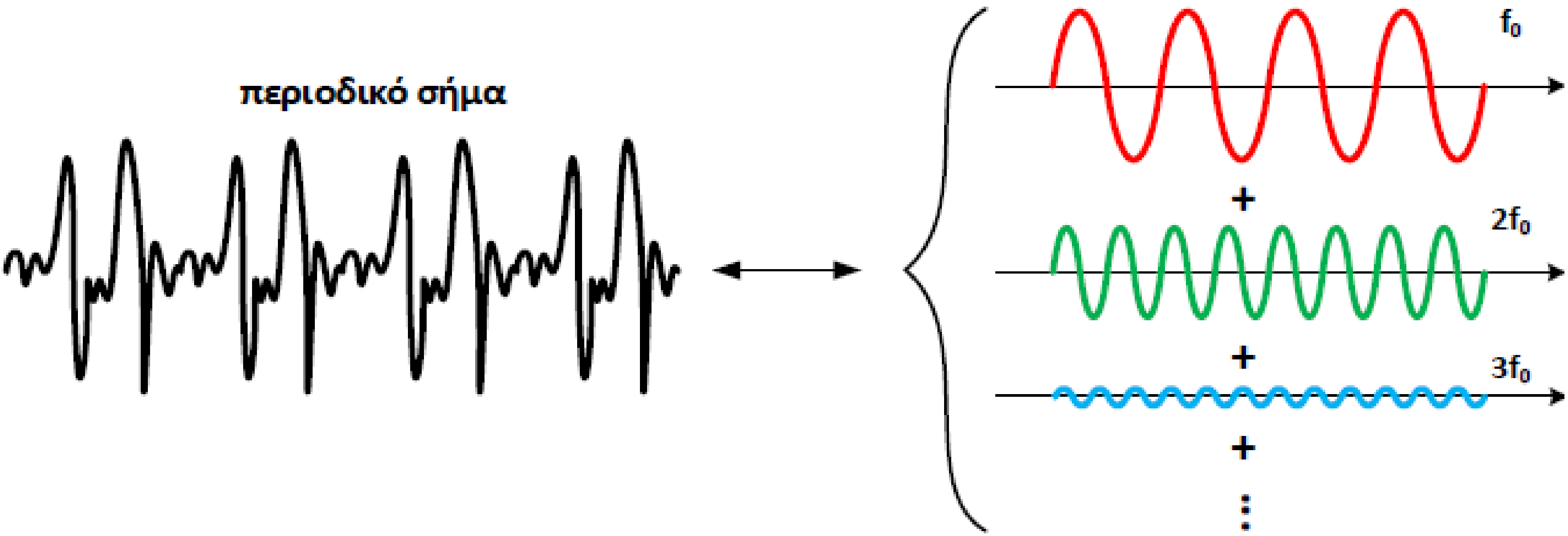
$$X_{-k} = X_k^*$$

- **Τριγωνομετρική Σειρά Fourier**

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

Ισοδύναμες για πραγματικά σήματα

- **Σειρές Fourier (review…)**



- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες kf_0

- Εναλλακτικά, αναλύει ένα οποιοδήποτέ περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες kf_0

- **«Γνωστές» Σειρές Fourier**

- Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

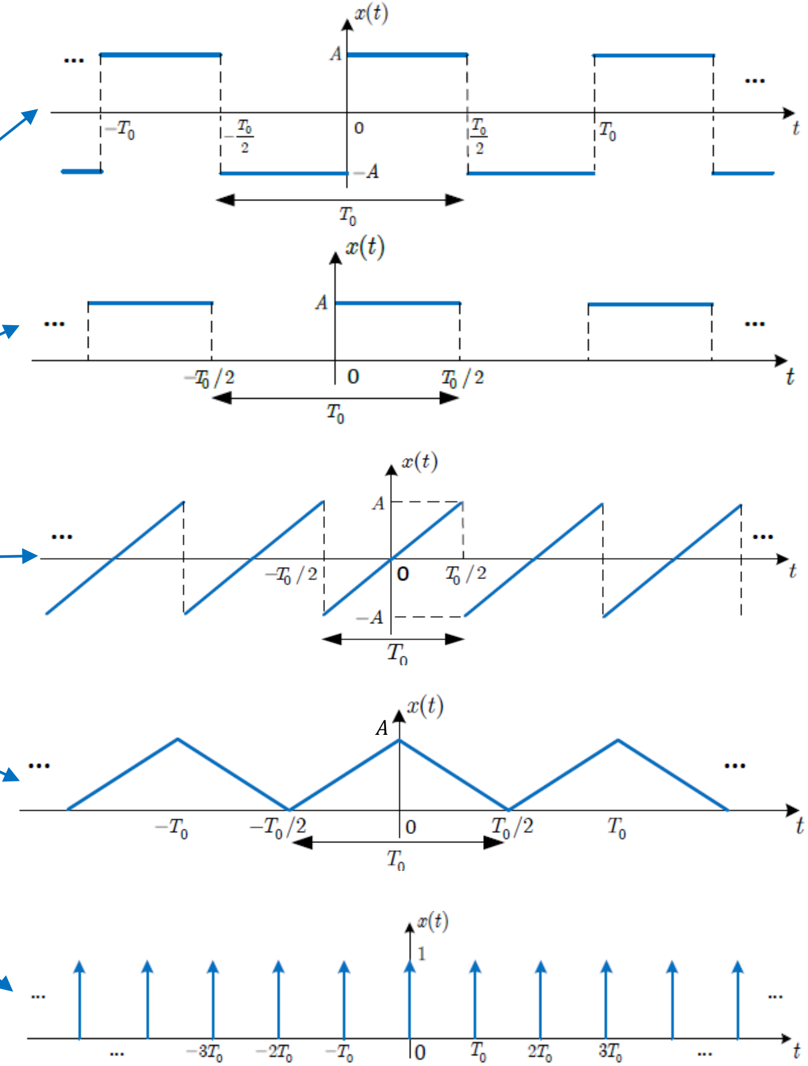
Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$	$X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\pi/2}$, k περιττά
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$	$X_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\pi/2}$, k περιττά
$x(t) = \frac{2A}{T_0} t, \ -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$	$X_k = \frac{A}{\pi k} (-1)^k e^{j\pi/2}$
$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$	$X_k = \frac{2A}{\pi^2 k^2}$, k περιττά
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$	$X_k = \frac{1}{T_0}$

• «Γνωστές» Σειρές Fourier

• Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παρακάτω σειρές Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στις ιδιότητες που ακολουθούν

Συνήθεις Σειρές Fourier

Περιοδικό σήμα
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} A, & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$
$x(t) = \frac{2A}{T_0} t, \ -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right), -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, $x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \mathrm{Ev}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \mathrm{Od}\{x(t)\}$, $x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο T_0 y(t) περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$

Απόδειξη: Έστω $z(t) = Ax(t) + By(t) \longrightarrow Z_k$?

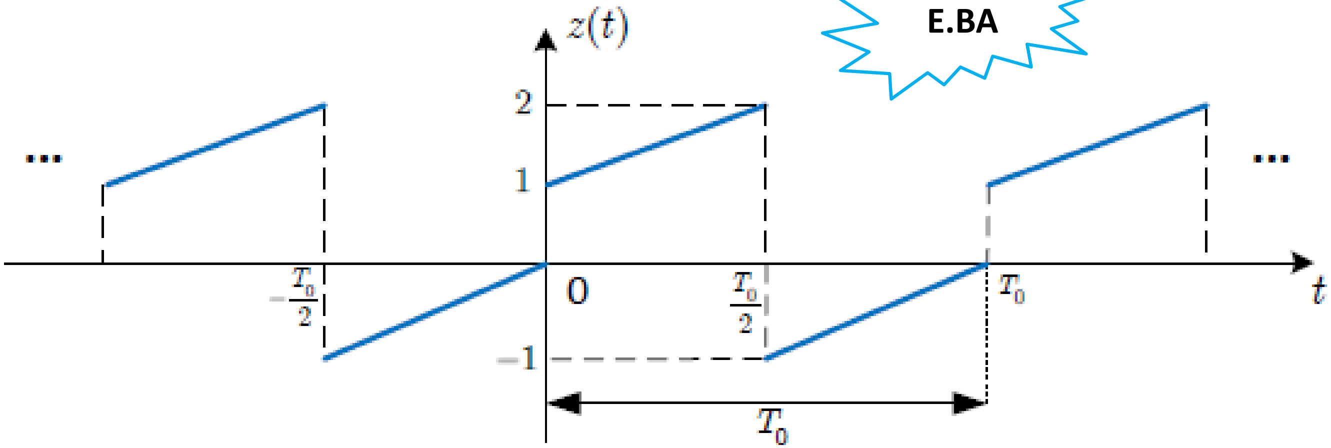
$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T_0} A \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt}_{AX_k} + \underbrace{\frac{1}{T_0} B \int_{T_0} y(t) e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt}_{BY_k}$$

$$= AX_k + BY_k.$$

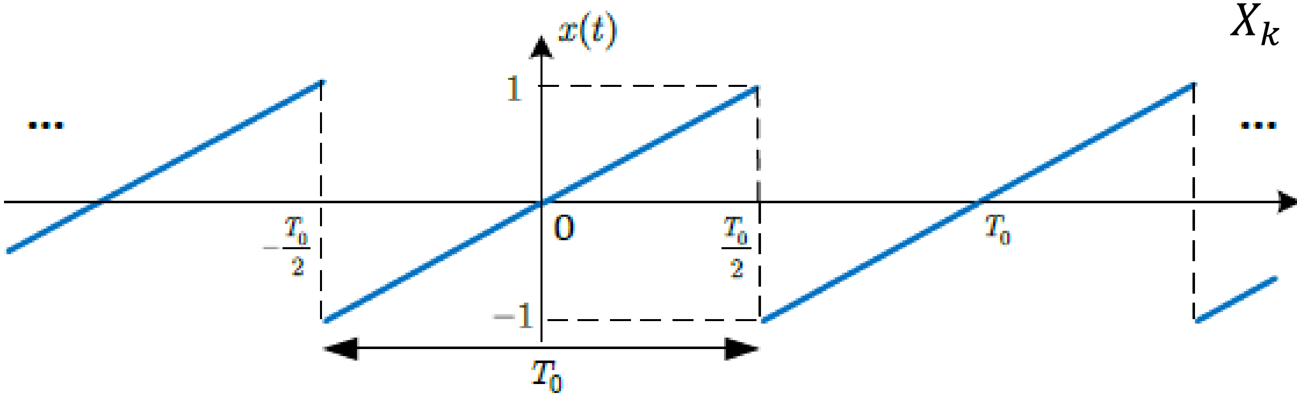
- **Ιδιότητες**

E.BA

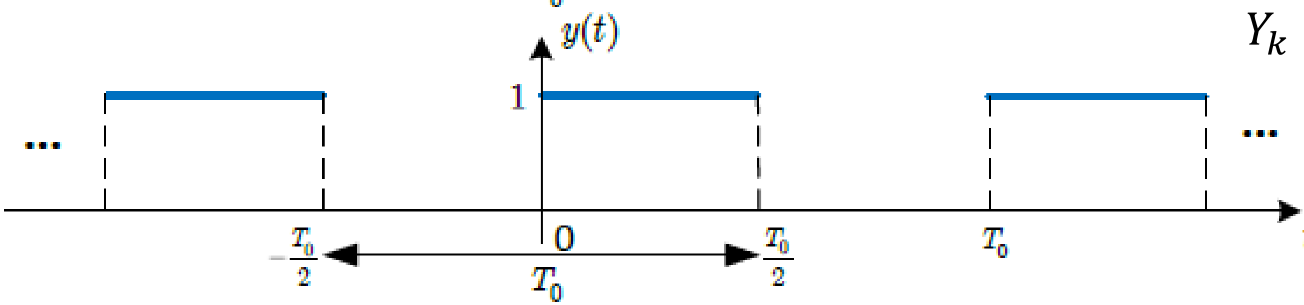


$$Z_k = ?$$

$$Z_k = X_k + Y_k$$



$$X_k = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{\frac{j\pi}{2}}$$



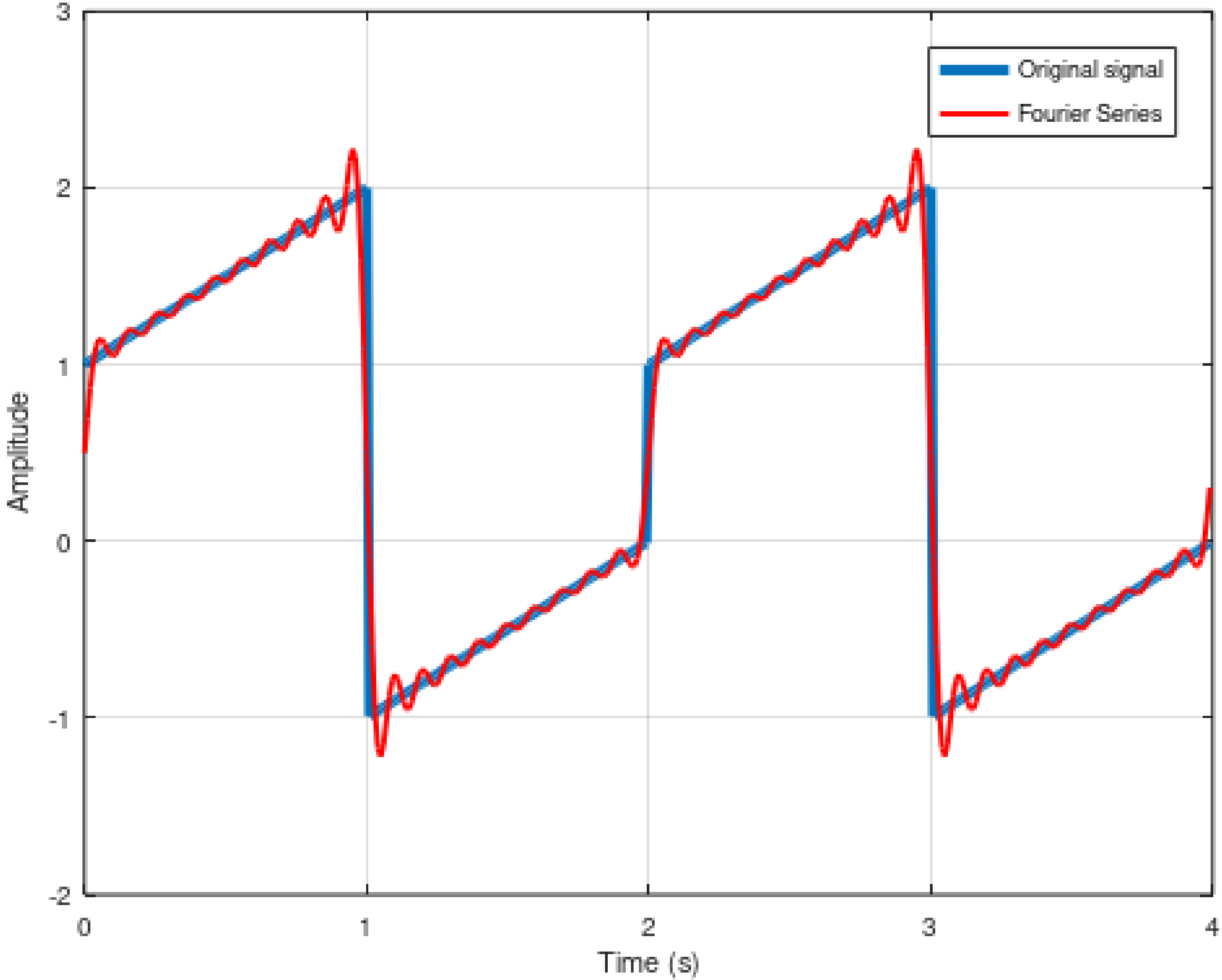
$$Y_k = \frac{1}{2\pi k}(1-(-1)^k)e^{-\frac{j\pi}{2}}$$

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Linearity property
clear;
% Parameters
T0 = 2;
f0 = 1/T0;
N = 20;
k = [-N:-1 1:N];

% Ground truth signal
dt = 0.01;
t1 = 0:dt:T0/2;
t2 = T0/2+dt:dt:T0-dt;
z1 = 1+t1;
z2 = -2+t2;
z = [z1 z2 z1 z2];
t = 0:dt:2*T0-dt;

% Plot original signal
figure; plot(t, z, "LineWidth", 4);
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```

```
% x(t)
Xk = 1./(pi.*k).*(-1).^k.*exp(j*pi/2);
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% y(t)
Yk = 1./(2*pi.*k).*(1-(-1).^k).*exp(-j*pi/2);
y = Yk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% x(t) + y(t)
z_FS = x + y;
Z0 = 1/2;
z_FS = Z0 + z_FS;

% Plot on top
hold on; plot(t, z_FS, 'r', "LineWidth", 2); grid;
legend('Original signal', 'Fourier Series');
```

- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$\mathbf{x(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$

Απόδειξη: $z(t) = x(t-t_0)$, με $x(t) \xleftrightarrow{F.S.} X_k \longrightarrow Z_k$?

$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t-t_0)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt \quad \Rightarrow \quad Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)\, e^{-j2\pi k f_0 (u+t_0)}\, du$$

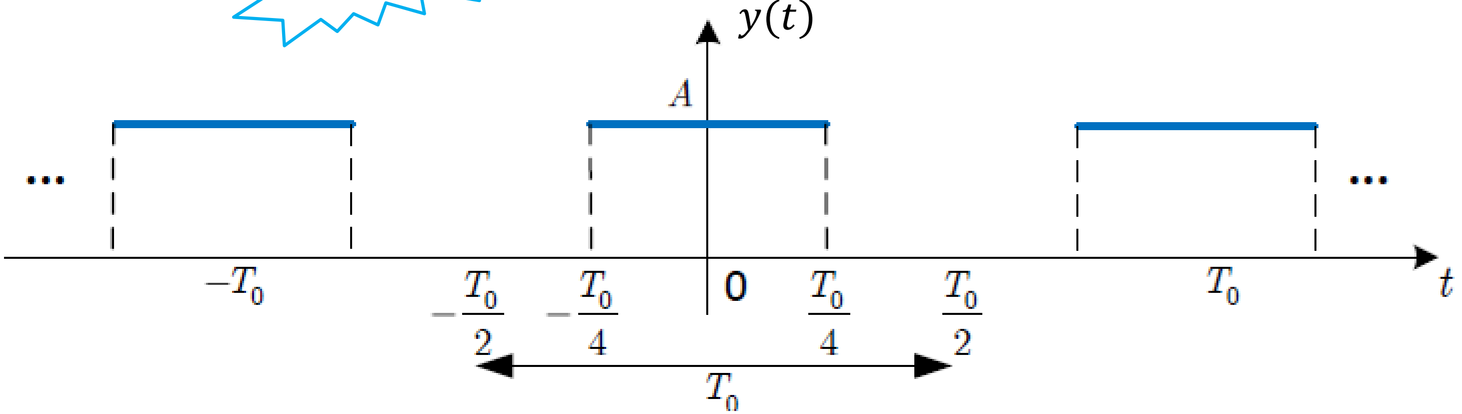
$$u = t - t_0 \Rightarrow du = dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)\, \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t_0} e^{-j2\pi k f_0 u}}\, du = e^{-j2\pi k f_0 t_0} \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(u)\, e^{-j2\pi k f_0 u}\, du}_{X_k}$$

$$= X_k\, e^{-j2\pi k f_0 t_0}$$

- **Ιδιότητες**

E.BA



Αναγνωρίζαμε ότι το $y(t)$ είναι το δεύτερο περιοδικό σήμα στη λίστα με τα "γνωστά" σήματα, άρα:

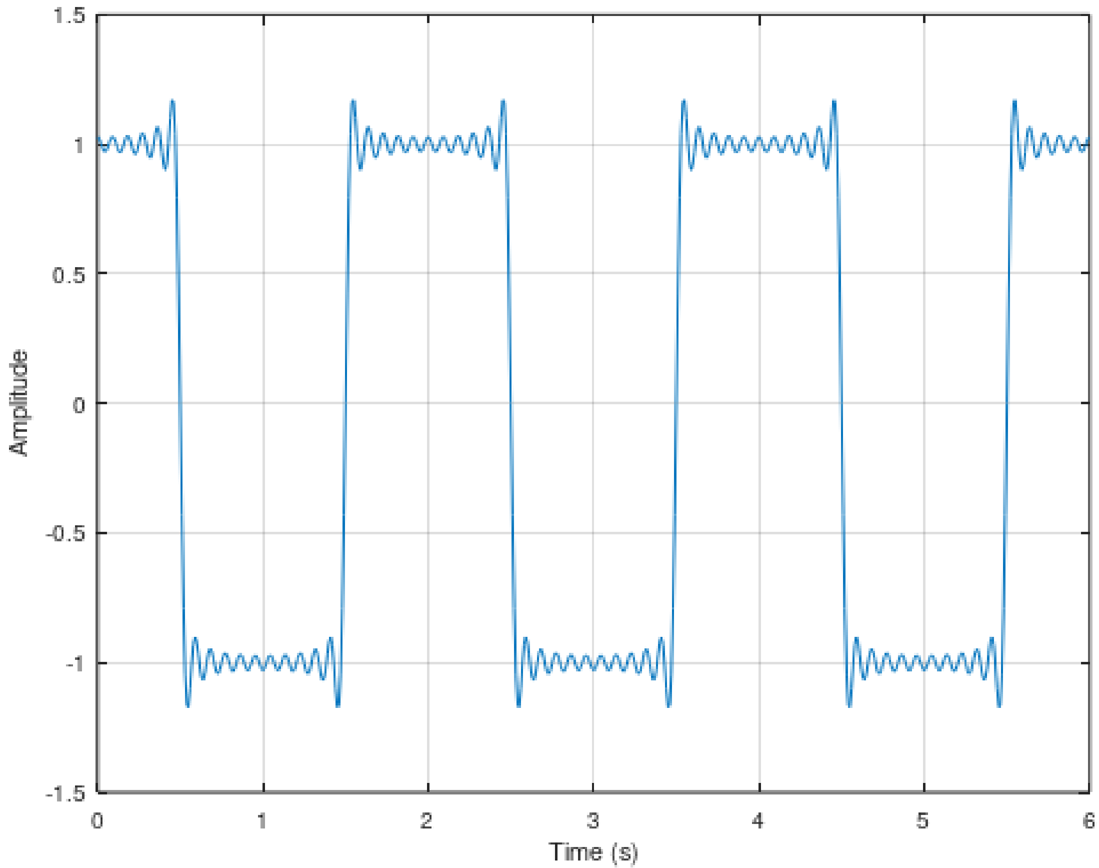
$$Y_k = X_k e^{-j2\pi k f_0 \left(-\frac{T_0}{4}\right)} = X_k e^{j2\pi k \overbrace{f_0 T_0}^{1} / 4} = X_k e^{j\frac{\pi k}{2}}$$

με

$$X_k = \frac{1}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά. Άρα } Y_k = \frac{1}{\pi k} e^{j\frac{\pi}{2}(k-1)}, \quad k \text{ περιττά}$$

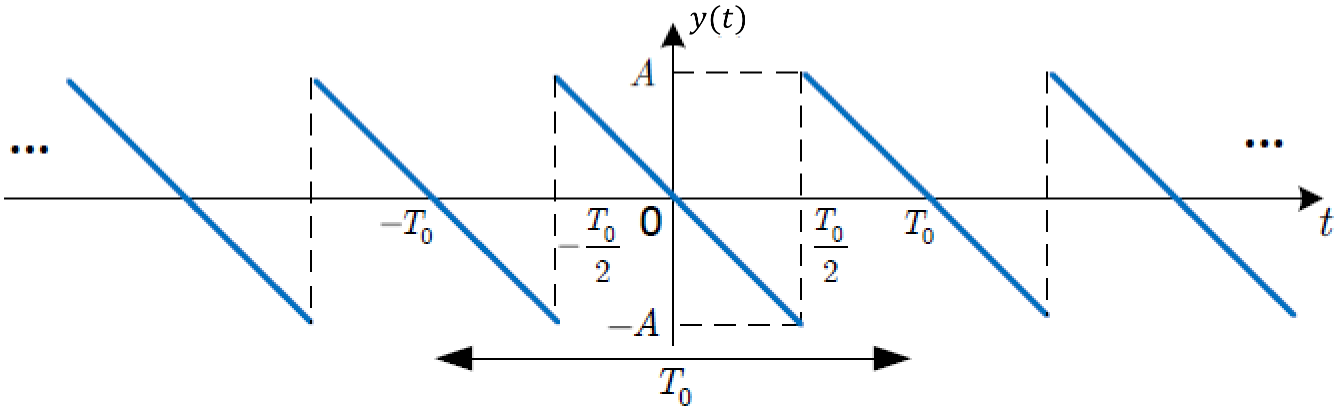
- **Ιδιότητες**
- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Time shifting
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 2;
f0 = 1/T0;
N = 21;
k = [-N:2:-1 1:2:N];
dt = 0.01;
t = 0:dt:3*T0;

% Synthesis
Xk = A./(pi.*k).*exp(j*(pi/2*(k-1)));
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% Plot
figure; plot(t, x); grid;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
```



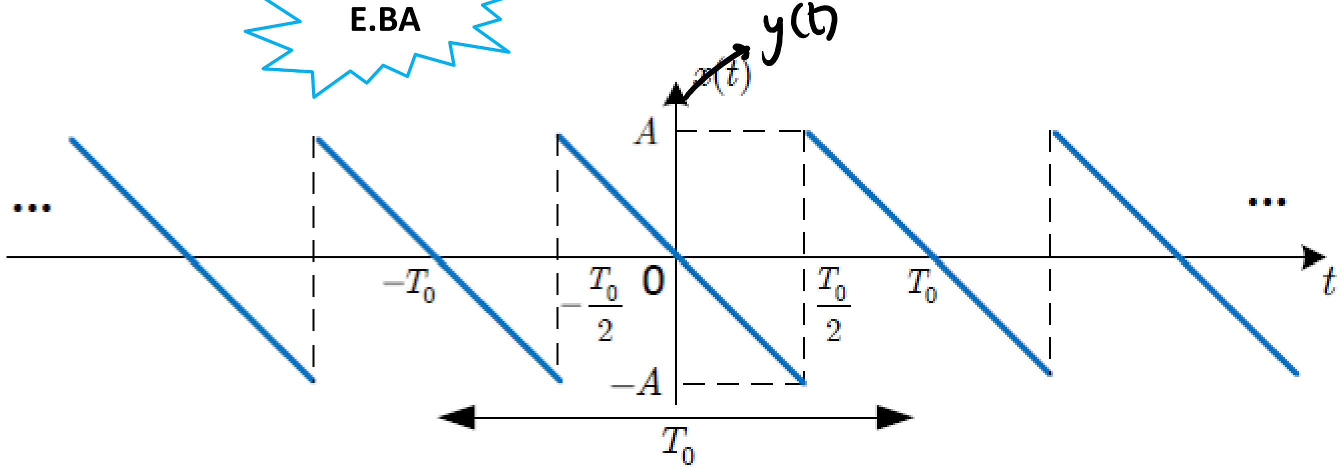
• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier		
Ιδιότητα	**Περιοδικό σήμα**	**Συντελεστές Fourier**
	$\mathbf{x(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$ $\mathbf{y(t)}$ **περιοδικό με περίοδο** $\mathbf{T_0}$	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}



- **Ιδιότητες**

E.BA



Αναγνωρίζουμε ότι το y(t) είναι ανεστραμμένο χρονικά το 3ο σήμα στη λίστα με τα "γνωστά" σήματα.

Άρα

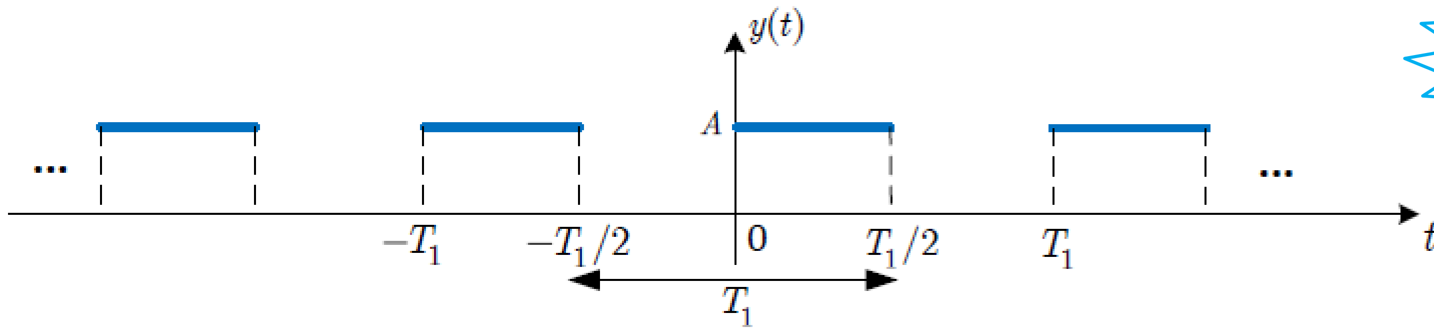
$$Y_k = X_{-k} = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}}\Big]_{k:=-k} = \frac{1}{\pi(-k)}(-1)^{-k} e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{-j\pi}\frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi k}(-1)^k e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a



E.BA

Είναι

$$Y_k = \frac{A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττό}$$

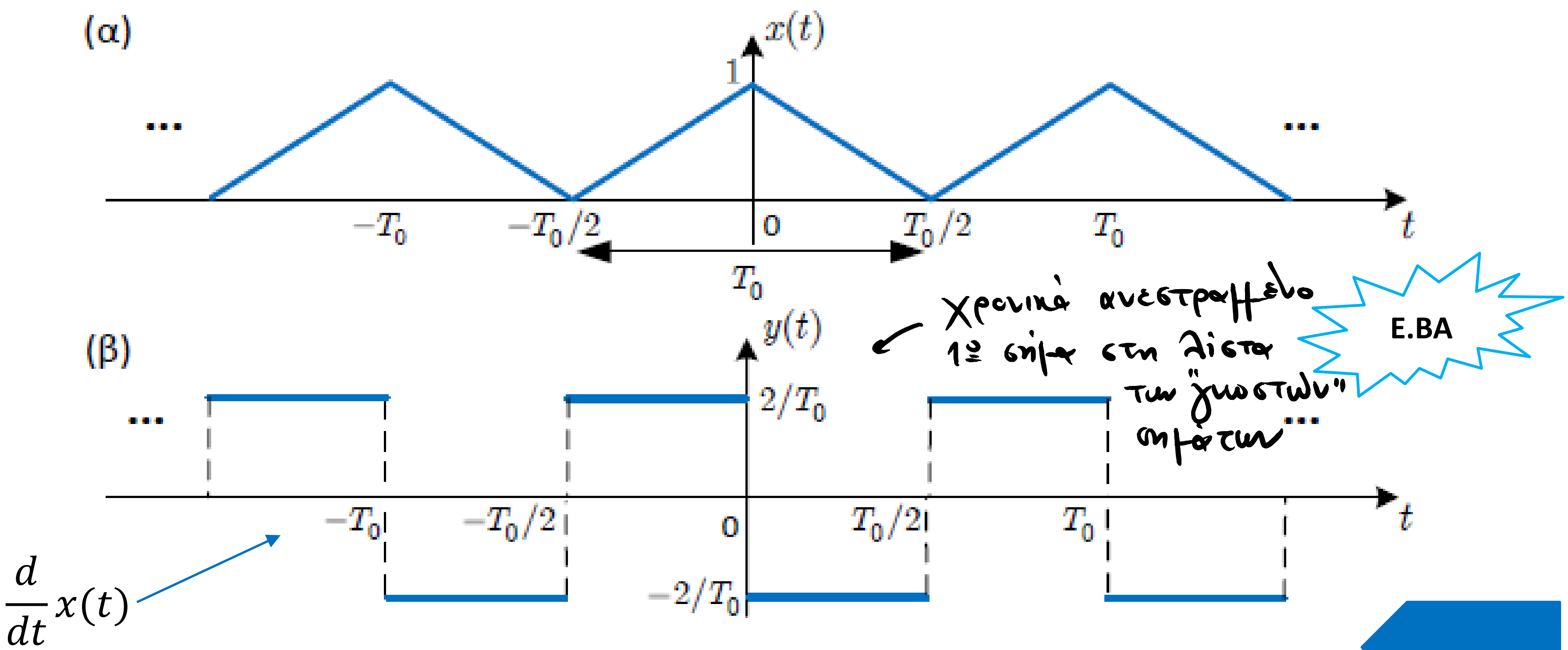
αλλά

$T_1 \neq T_0$ του 2ου σήματος της λίστας των "γνωστών" σημάτων

- **Ιδιότητες**

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$



- **Ιδιότητες**

$$f_0 T_0 = 1$$

$$-\frac{1}{j} = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Το πρώτο σήμα στη λίστα μας έχει συντελεστές

$$\frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά}$$

Η παράγωγος στο προηγ. slide θα έχει συντελεστές

$$Y_k = \frac{2\frac{2}{T_0}}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Big]_{k:=-k} = -\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά}$$

Από την ιδιότητα της παραγώγισης/ολοκλήρωσης θα έχουμε

$$Y_k = -\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\frac{\pi}{2}} = j 2\pi k f_0 X_k \Longrightarrow X_k = \frac{1}{j 2\pi k f_0}\left(-\frac{4}{\pi k T_0} e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)$$

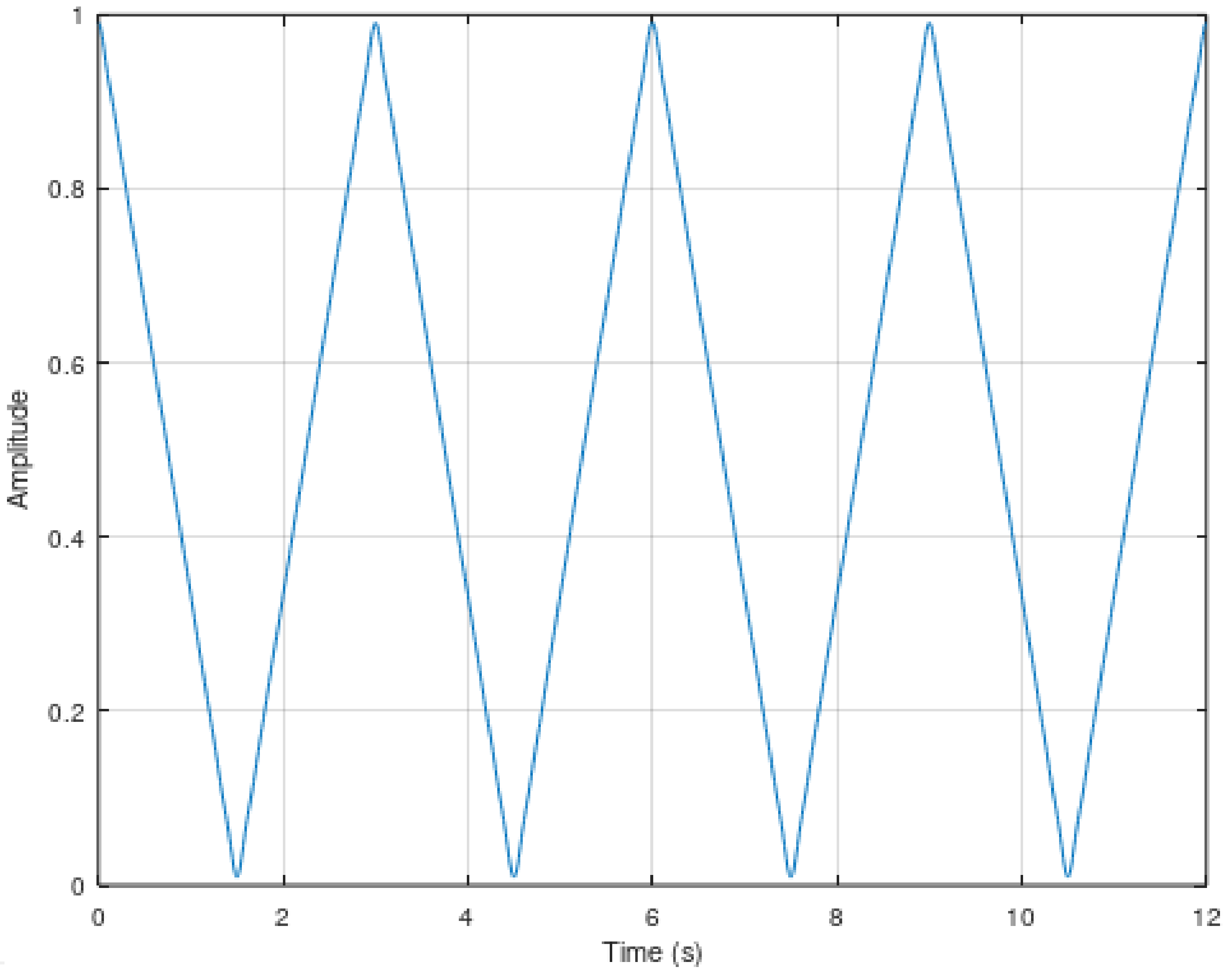
Άρα

$$X_k = \frac{-2}{j\pi^2 k^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi^2 k^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi^2 k^2}, \quad k \text{ περιττά}$$

- **Ιδιότητες**

- **MATLAB/Octave κώδικας**

```
% Derivative - Integration property
clear;
% Parameters
A = 1;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 21;
k = [-N:2:-1 1:2:N];
dt = 0.01;
t = 0:dt:4*T0;

% Synthesis
Xk = 2./(pi.^2.*k.^2);
x = Xk*exp(j*2*pi*k'*f0*t);

% X0
X0 = 1/2;
x = X0 + x;

% Plot
figure; plot(t, x); grid;
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
```



• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	$x(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0 $y(t)$ περιοδικό με περίοδο T_0	X_k Y_k
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt = P_x$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2 = P_x$

Έστω $$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{X_0} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

α) $P_x = ?$ $\quad |X_0|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|^2$ (1)

β) % κατανεμημένη στους 4 πρώτους όρους της τριγωνομετρικής Σειράς Fourier?

Hint: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$

α) $$P_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \left|\frac{2}{j\pi k}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \ \underline{\underline{\text{Hint}}}$$

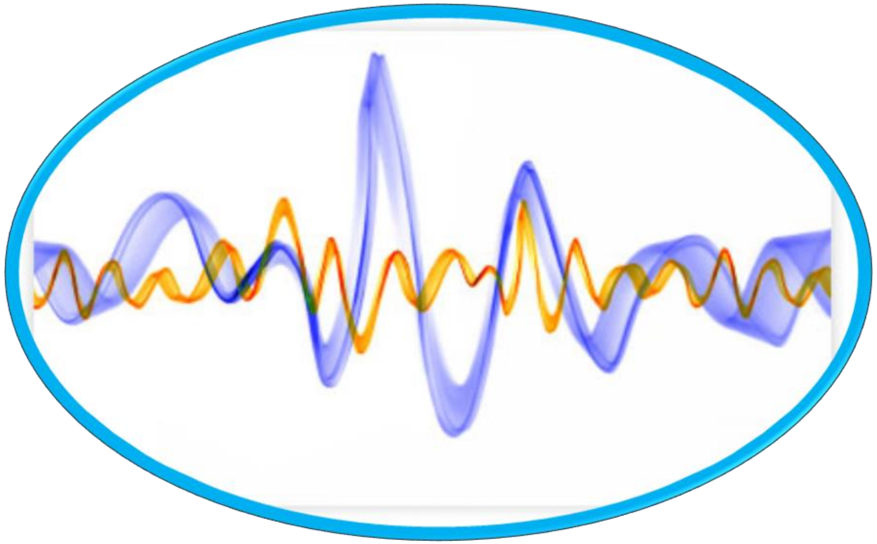
$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{\cancel{\pi^2}} \frac{\cancel{\pi^2}}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{19}{12} \simeq 1.5833$$

β) $$P_{0\to 3} \overset{(1)}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{3} 2|X_k|^2 = \frac{1}{4} + 2\left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{4\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2}\right)$$

$\simeq 1.353 \Longrightarrow 85.47\,\%$ της συνολικής ισχύος

E.BA

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 4318

AM: 4264 (1.5)

AM: 4220

AM: 4208

AM: 4253

AM: 4187 (0.5)