ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

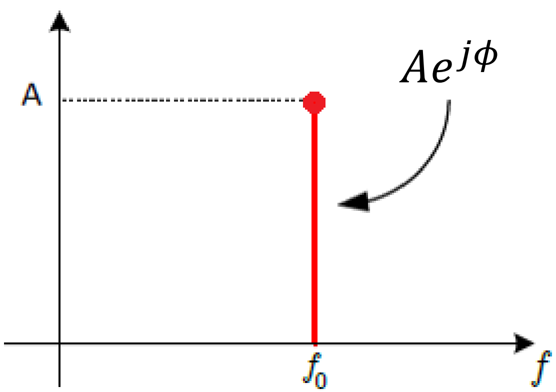
- Σειρές Fourier

Η διάλεξη αυτή περιέχει 4 Ε.ΒΑ.

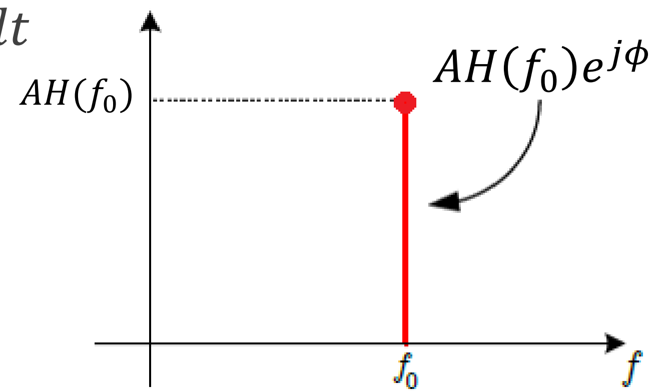
Ε.ΒΑ

- **Ο χώρος της συχνότητας (review…)**

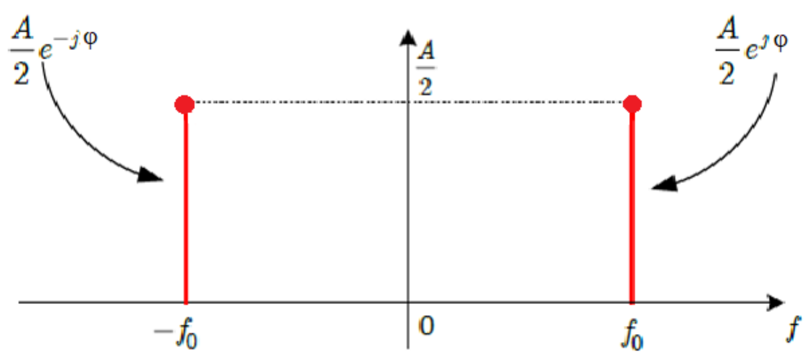
$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = H(f_0)Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$$



$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi f_0 t}dt$$



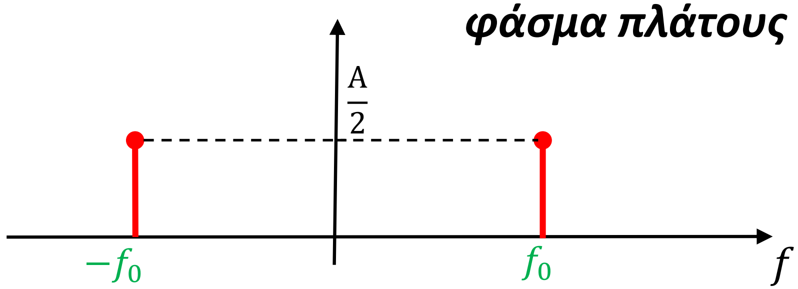
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}$$

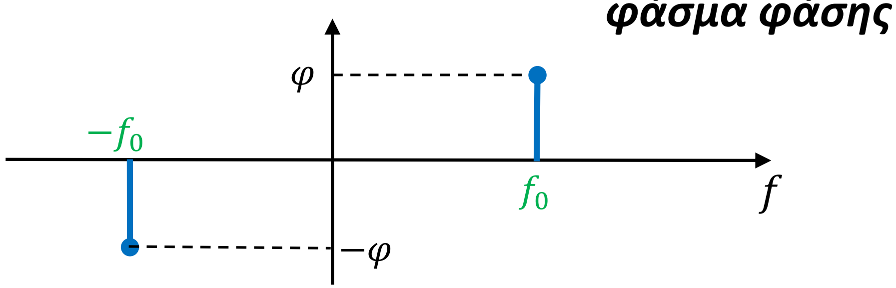


- **Ο χώρος της συχνότητας (review…)**

- Βολικότερη η αναπαράσταση σε δυο γραφήματα

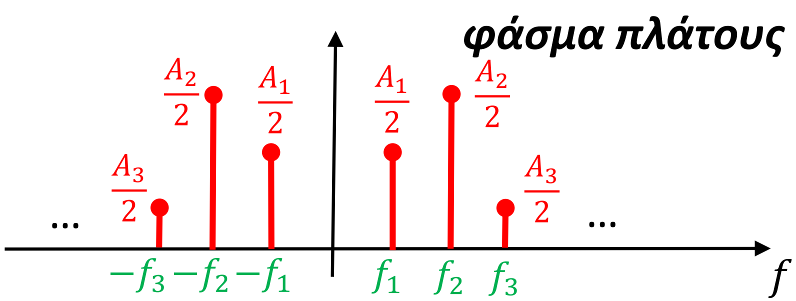
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}, \qquad A > 0$$

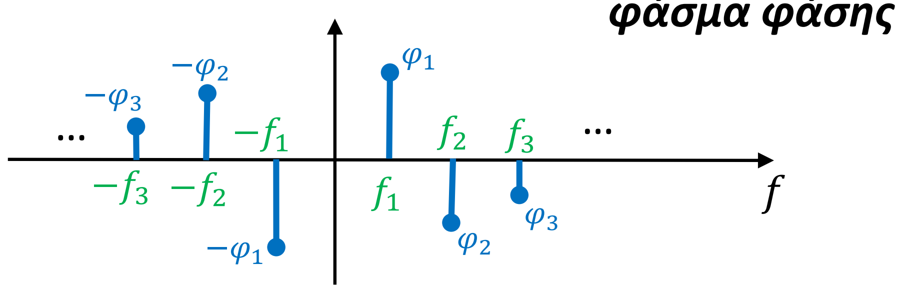




- Γενικότερα

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t} \right]$$





- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα (review…)**

- **Ερώτημα: μπορούμε να *προσεγγίσουμε* ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$,: $x(t) \approx cy(t)$

- **Συνάρτηση σφάλματος:**

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- **Ενέργεια σφάλματος:**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - cy(t)\right)^2 dt$$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization**!

- Ζητάμε το βέλτιστο δυνατό c

- Με άλλα λόγια, ζητάμε το c για το οποίο η ενέργεια σφάλματος είναι η **ελάχιστη δυνατή**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα (review…)**

- Δείξαμε ότι

$$c = \frac{1}{E_y}\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y}\langle x, y\rangle$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

και

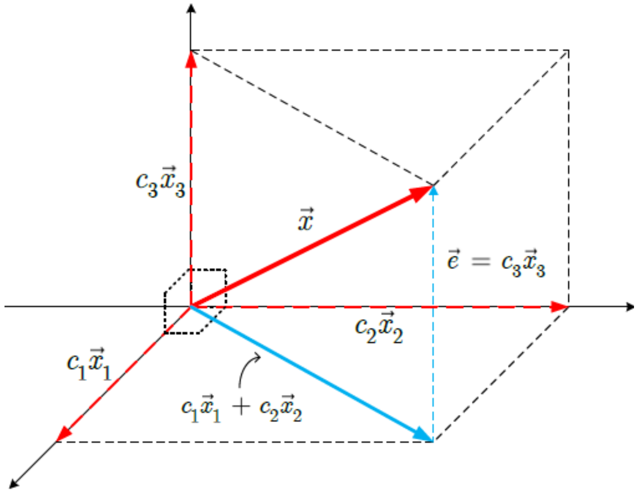
$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \langle x, y\rangle$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

- Γιατί να μη χρησιμοποιήσουμε περισσότερα σήματα σε μια προσέγγιση?

$$y(t) \approx c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_Nx_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_kx_k(t)$$

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Στον 3D χώρο, χρειαζόμαστε τρία διανύσματα για να περιγράψουμε ένα σημείο του χώρου



- **Ερώτηση**: **ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς?**
- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1,0,0], \qquad x_2 = [0,1,0], \qquad x_3 = [0,0,1]$$

  - Π.χ.

$$[3,-1,2] = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$[\alpha,\beta,\gamma] = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$$

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν <u>χωρίς σφάλμα</u>?

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Τι χαρακτηριστικά έχουν τα τρία προηγούμενα διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν <u>χωρίς σφάλμα</u>?

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

- ❑ Είναι **ορθογώνια** → το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν
  - Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται **γραμμική ανεξαρτησία**
  - Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων δυο

- ❑ Αποτελούν ένα **πλήρες** σύνολο του 3D-χώρου
  - Κανένα άλλο διάνυσμα δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο με τα τρία παραπάνω

- Οι δυο αυτές ιδιότητες (γραμμ. ανεξαρτησία & πληρότητα) μας ονοματίζουν τα τρία αυτά διανύσματα ως **βάση** του 3D-χώρου
  - Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός *όλων* των διανυσμάτων που αποτελούν τη βάση του χώρου **με μηδενικό σφάλμα**

- Πάμε στο χώρο των σημάτων τώρα... ☺

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο από $2N+1$ μιγαδικά εκθετικά σήματα

$$\mathbb{E} = \left\{e^{j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=-N}^{N} , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Ας προσεγγίσουμε ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ σε μια περίοδό του $[0, T_0)$ ως ένα άθροισμα $2N+1$ τέτοιων σημάτων:

$$x(t) \approx \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Συνάρτηση σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Ζητούνται τα X_k που δίνουν την **ελάχιστη ενέργεια σφάλματος**

- **Βελτιστοποίηση (ξανά ☺)**

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

Ορθογωνιότητα στο $\mathbb{C}$:
$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y^*(t)dt = 0$$

- Χρησιμοποιώντας διαδικασίες όπως αυτές που είδαμε, μπορεί κανείς να δείξει ότι:

1. Το σύνολο $\mathbb{E}$ έχει στοιχεία ορθογώνια μεταξύ τους:

$$\int_0^{T_0} e^{j2\pi k f_0 t} e^{-j2\pi l f_0 t} dt = \int_0^{T_0} e^{j2\pi (k-l) f_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

2. Το σύνολο $\mathbb{E}$ είναι πλήρες όταν $N \to +\infty$, υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος

- Άρα το σύνολο

$$\mathbb{E} = \left\{e^{j2\pi k f_0 t}\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

αποτελεί βάση του χώρου

- Οπότε

Ισότητα υπό την έννοια της ελάχιστης ενέργειας σφάλματος!

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

- **Σειρές Fourier**
- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία σχέση ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\left\langle x(t), e^{j2\pi k f_0 t}\right\rangle$$

- Η εκθετική σειρά Fourier μπορεί να περιγράψει και μιγαδικά περιοδικά σήματα
- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Ας το δείξουμε

- **Σειρές Fourier**

$$X_{-k} = X_k^*$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi(-k)f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \qquad (1)$$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt$$

- Όμως το σήμα στο χρόνο είναι πραγματικό, άρα $x(t) = x^*(t)$

$$X_k^* = \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt\right]^* = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x^*(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{j2\pi k f_0 t}dt \qquad (2)$$

- Από τις σημειωμένες σχέσεις, ισχύει το ζητούμενο.

- **Σειρές Fourier**

- Όταν το σήμα είναι πραγματικό, μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

με $|X_k|$ το μέτρο και ϕ_k τη φάση του k −οστού συντελεστή

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[|X_k| e^{-j\phi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k| e^{j\phi_k} e^{j2\pi k f_0 t} \right]$$

E.BA$_1$

- **Σειρές Fourier**

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[|X_k|e^{-j\phi_k}e^{-j2\pi k f_0 t} + |X_k|e^{j\phi_k}e^{j2\pi k f_0 t}\right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}|X_k|\left[e^{-j\phi_k}e^{-j2\pi k f_0 t} + e^{j\phi_k}e^{j2\pi k f_0 t}\right]$$

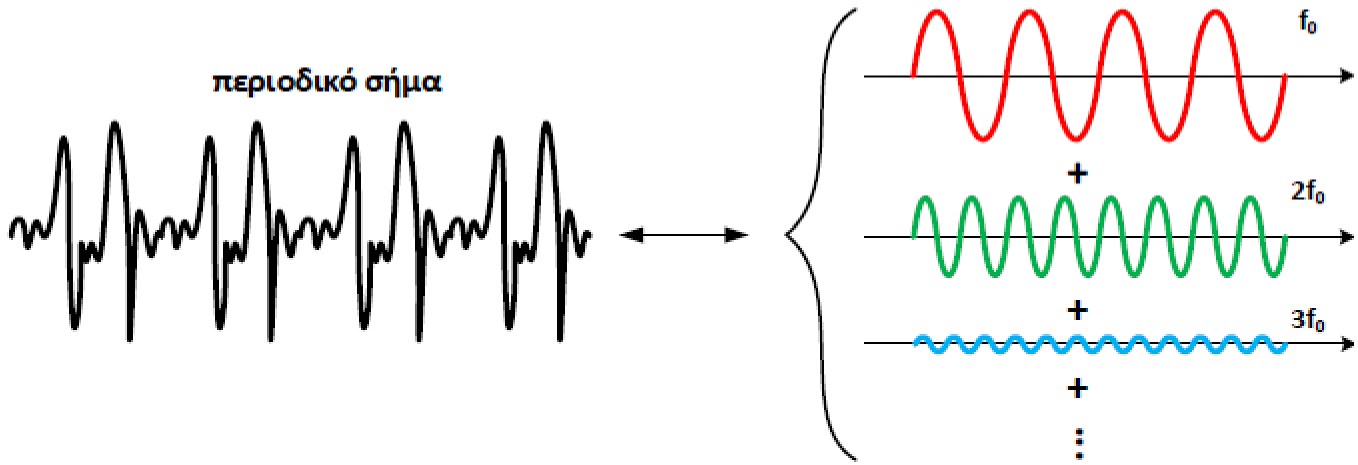
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}|X_k|\left[e^{-j2\pi k f_0 t - j\phi_k} + e^{j2\pi k f_0 t + j\phi_k}\right]$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

- **Προσοχή:** η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για πραγματικά σήματα
  - … και πολλές φορές στην πράξη δεν είναι απλό (ή και «κομψό») να εξαχθεί από την εκθετική Σειρά Fourier

- **Σειρές Fourier**

- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες kf_0



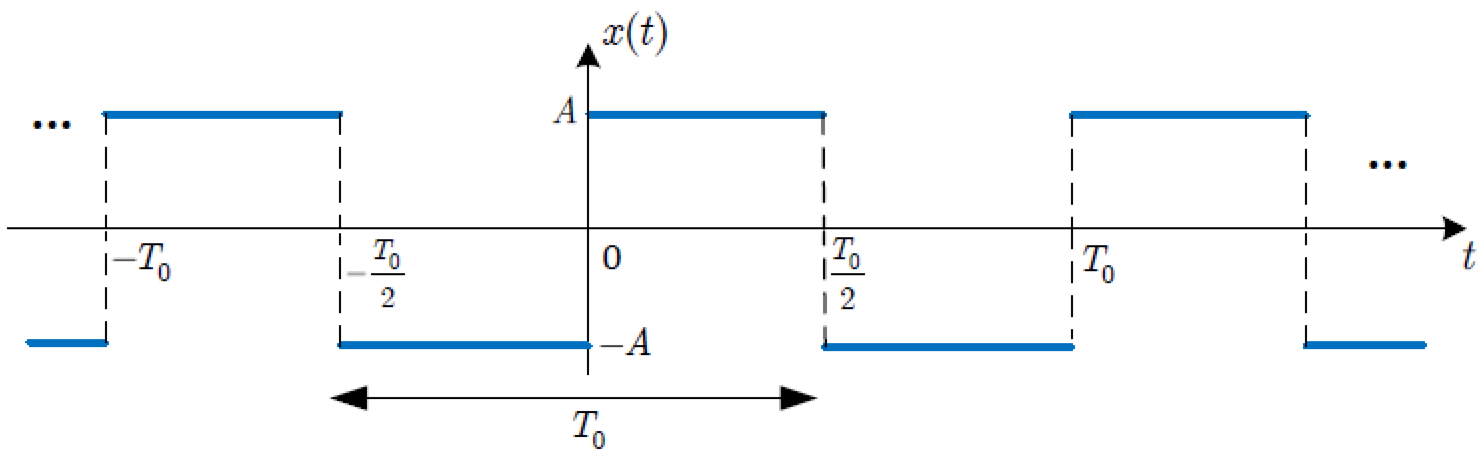
- Εναλλακτικά, αναλύει ένα οποιοδήποτέ περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες kf_0

- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

$$X_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt$$

- **Παράδειγμα:**
  - Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$



Ζητείται το $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$, $X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A\,dt + \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A)\,dt = \frac{A}{T_0} t \Big]_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{A}{T_0} t \Big]_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} = 0$$

- Παράδειγμα:

$$e^{\pm j2\pi k} = \left(e^{\pm j2\pi}\right)^k = 1^k = 1$$

$$f_0 T_0 = 1$$

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} A\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} (-A)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt - \frac{A}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_0^{\frac{T_0}{2}} - \frac{A}{T_0}\frac{1}{(-j2\pi k f_0)}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{\frac{T_0}{2}}^{T_0}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi k f_0 T_0}\left(e^{-j\cancel{2}\pi k f_0 \frac{T_0}{\cancel{2}}} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k f_0 T_0}\left(e^{-j2\pi k f_0 T_0} - e^{-j\cancel{2}\pi k f_0 \frac{T_0}{\cancel{2}}}\right)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j2\pi k} - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= -\frac{A}{j2\pi k}\left(e^{-j\pi k} - 1\right) + \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k} + 1 - e^{-j\pi k}\right) = \frac{A}{j\cancel{2}\pi k}\left(\overset{1}{\cancel{2}} - \overset{1}{\cancel{2}}\, e^{-j\pi k}\right)$$

- Παράδειγμα:

$$e^{\pm j\pi k} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^k = (-1)^k$$

$$= \frac{A}{j\pi k}\left(1 - e^{-j\pi k}\right) = \frac{A}{j\pi k}\left(1-(-1)^k\right)$$

$$\frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$= \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιο} \\ \dfrac{2A}{j\pi k}, & k \text{ περιττό} \end{cases} = \frac{2A}{j\pi k}, \; k \text{ περιττό}$$

Άρα

$$X_k = \begin{cases} 0, & k=0,\ k \text{ άρτιο} \\ \dfrac{2A}{j\pi k}, & k \text{ περιττό} \end{cases} \rightarrow x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{2A}{j\pi k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

Είναι

$$x(t) = \cancel{X_0}^{\,0} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)$$

Είναι

$$\left.\begin{aligned} |X_k| &= \frac{2A}{\pi k}, \; k \text{ θετικό, περιττό} \\ \varphi_k &= -\frac{\pi}{2}, \; \text{— '' —} \end{aligned}\right\} !$$

E.BA$_2$

E.BA$_3$

- Παράδειγμα:

Άρα $x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} 2 \cdot \frac{2A}{\pi k} \cdot \cos\left(2\pi k f_c t - \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ περιττό}}}^{+\infty} \frac{4A}{\pi k} \sin(2\pi k f_c t)$

Ας σχεδιάσουμε το φάσμα πλάτους και φάσης.

Γνωρίζουμε ότι $|X_k| = \frac{2A}{\pi k}$, k περιττό, θετικό

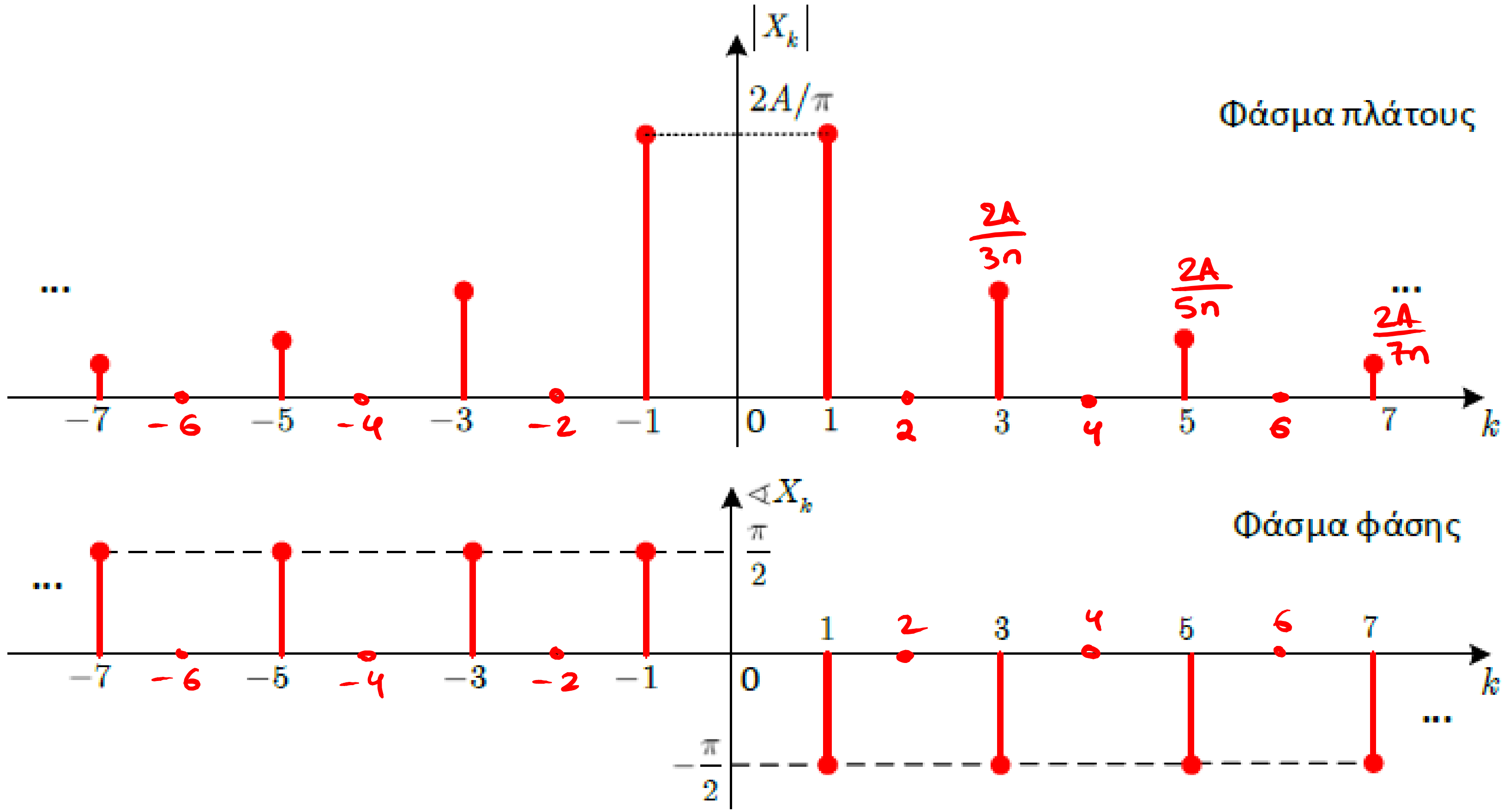
$\varphi_k = -\frac{\pi}{2}$, —— " —— " ——

1

Επειδή αναλύσαμε πραγματικό σήμα $x(t)$, οι συντελεστές X_k είναι συζυγώς συμμετρικοί, οπότε το φάσμα πλάτους είναι άρτια συμμετρικό και το φάσμα φάσης περιττώς συμμετρικό.

Σχεδιάζουμε πρώτα για $k>0$ και μετά ανάλογα τη συμμετρία, σχεδιάζουμε και τα υπόλοιπα.

- Παράδειγμα:



- Προτιμούμε να αναπαριστούμε τον οριζόντιο άξονα σε «διακριτές συχνότητες kf_0» αντί ως ένα συνεχή άξονα του f, όπως κάναμε στα αρχικά παραδείγματα (διαλ. 7η)
  - Χρησιμοποιούμε το πολλαπλάσιο k της θεμελιώδους συχνότητας για βαθμονόμηση του άξονα

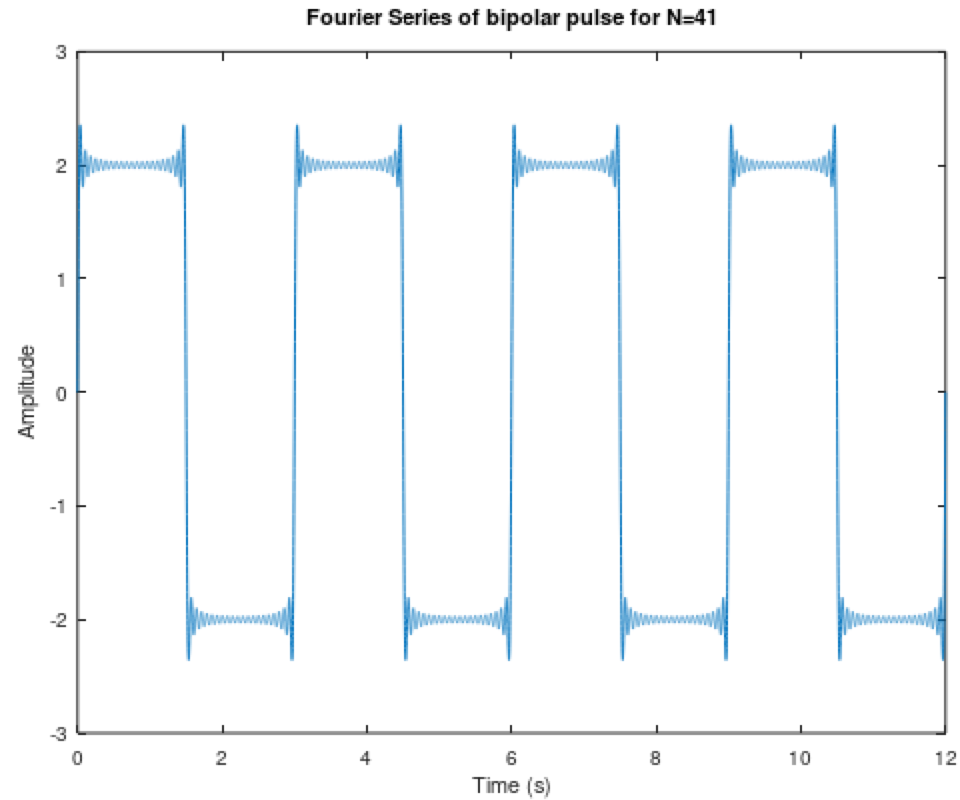
- Οι συχνότητες ονομάζονται **αρμονικές**

- **Σειρές Fourier**

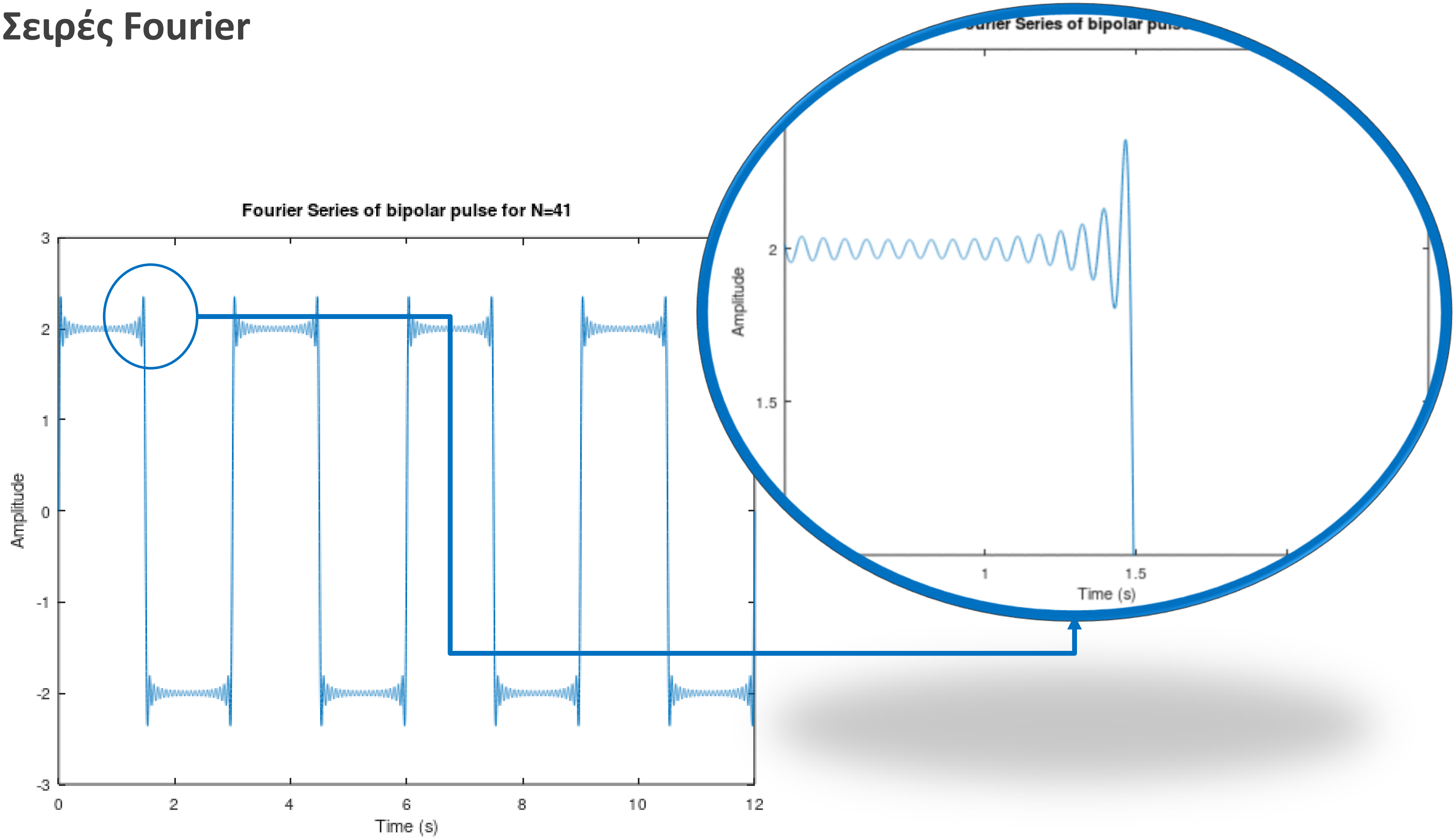
- **MATLAB/Octave code**

$$\sum_{\substack{k=-41 \\ k\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}}}^{41} X_k\, e^{j\frac{2\pi k}{3}t}$$

```
% Bipolar pulse - Fourier Series
clear;
% Parameters
A = 2;
T0 = 3;
f0 = 1/T0;
N = 41;
k = [-N:2:-1, 1:2:N];

% Time axis
dt = 0.001;
t = 0:dt:4*T0;

% Fourier Coefficients
Xk = 2*A./(pi*k).*exp(-j*pi/2);
X0 = 0;

% Synthesis equation
x = zeros(size(t));
for i=1:length(k)
  x = x + Xk(i)*exp(j*2*pi*k(i)*f0*t);
end

% Add X0 - not necessary here
x = x + X0;

% Plot
plot(t, real(x));
title('Fourier Series of bipolar pulse for N=41');
xlabel('Time (s)'); ylabel('Amplitude');
```



• **Σειρές Fourier**



• **Φαινόμενο Gibbs**

- **Σειρές Fourier**
- **Φαινόμενο Gibbs**
- Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει λόγω των ασυνεχειών του αρχικού σήματος - και μόνο παρουσία αυτών - ακόμα κι αν πράγματι η ενέργεια του σφάλματος E_e σε μια περίοδο τείνει στο μηδέν!
- Συγκεκριμένα, ο Gibbs έδειξε ότι η Σειρά Fourier συγκλίνει στην πραγματική τιμή του περιοδικού σήματος σε κάθε σημείο…
  - …εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, όπου συγκλίνει στη μέση τιμή των τιμών του περιοδικού σήματος $x(t)$ εκατέρωθεν του σημείου ασυνέχειας t_0:

$$\frac{x(t_0^-) + x(t_0^+)}{2}$$

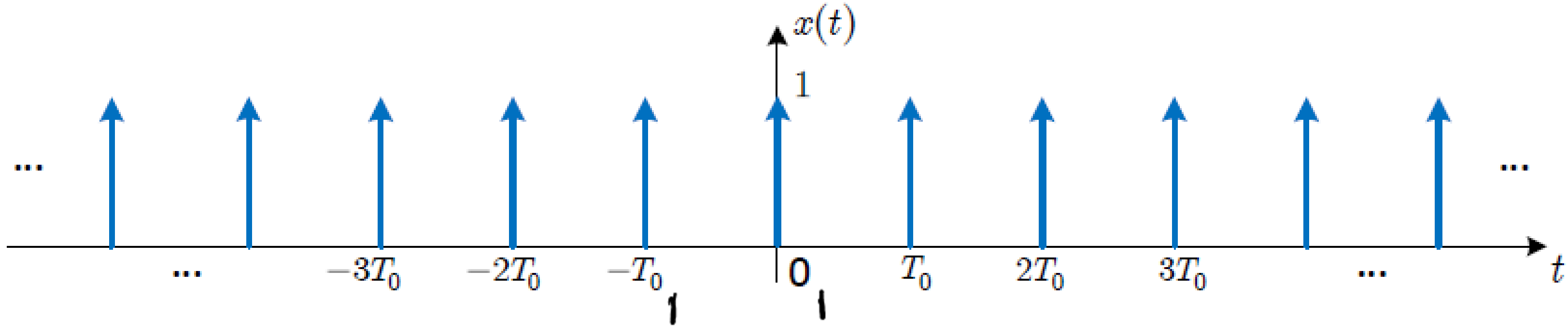
- Η Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων χωρίς ασυνέχειες λέγεται ότι συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε όλα τα σημεία της περιόδου του περιοδικού σήματος
- Ο τρόπος εύρεσης των συντελεστών Fourier επιτρέπει στην ενέργεια σφάλματος να τείνει στο μηδέν όσο αυξάνει το πλήθος των ημιτόνων, και ταυτόχρονα να υπάρχουν σημεία όπου η διαφορά της Σειράς Fourier με το περιοδικό σήμα να **μην** είναι μηδενική (μη ομοιόμορφη σύγκλιση)

- **Παράδειγμα:**

  ○ Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t \pm t_0) f(t) dt = f(\mp t_0)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t)\, \underbrace{e^{-j2\pi k f_0 t}}_{f(t)}\, dt$$

E.BA$_4$

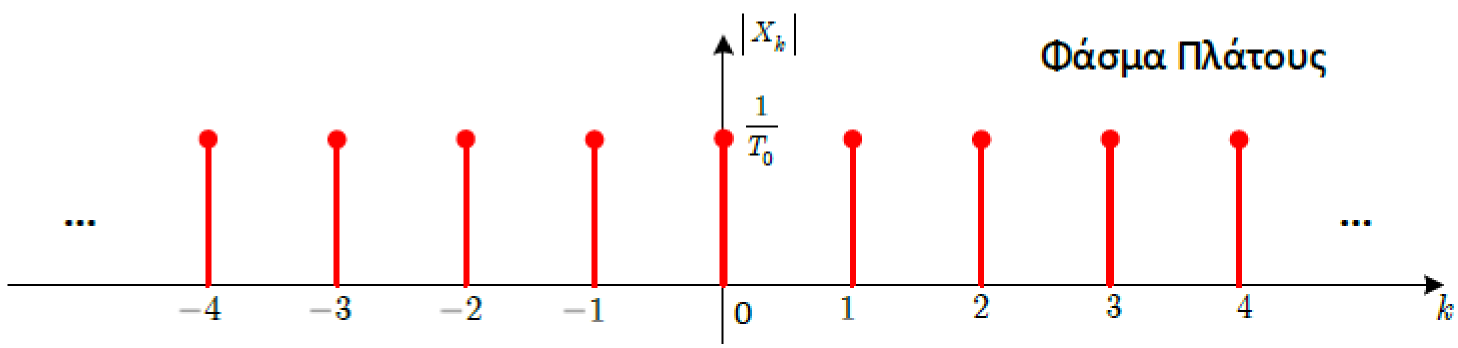
$$= \frac{1}{T_0} f(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{t=0} = \frac{1}{T_0} e^{0} = \frac{1}{T_0}$$

- Παράδειγμα:

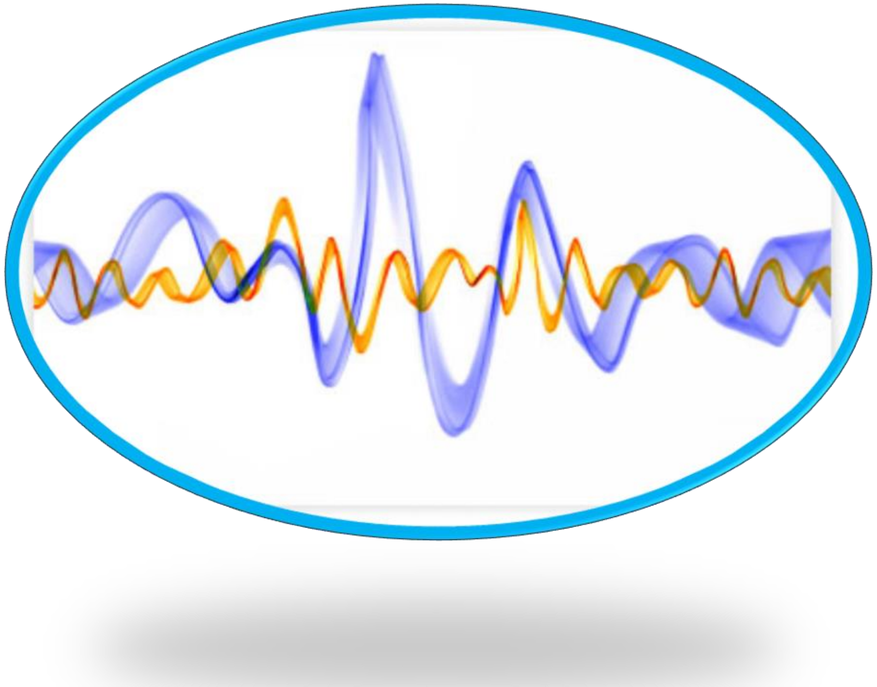
Άρα $X_k = \frac{1}{T_0} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Επειδή προφανώς $X_k \in \mathbb{R}_+$, το φάσμα φάσης θα είναι μηδέν για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, ενώ το φάσμα πλάτους θα είναι οι ίδιοι οι συντελεστές.

Ας σχεδιάσαμε μόνο το φάσμα πλάτους:



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



Ε.ΒΑ.

ΑΜ: 4731 (Φ)

ΑΜ: 4242

ΑΜ: 4000