ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η

- Ο χώρος της συχνότητας

Η διάλεξη αυτή περιέχει 2 Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ

- Έχουμε μια πολύ καλή εικόνα για το πώς λειτουργούν τα συστήματα στο πεδίο του χρόνου
- Παρ’ όλα αυτά, θέλουμε περισσότερα! ☺
- Δεν ξέρουμε **γιατί** τα συστήματα συμπεριφέρονται έτσι
  - Δηλ. δεν ξέρουμε γιατί μια δεδομένη είσοδος παράγει τη συγκεκριμένη έξοδο
  - Ναι, ξέρουμε ότι αυτό γίνεται μέσω της συνέλιξης με την κρουστική απόκριση αλλά **τι** πραγματικά κάνει η κρουστική απόκριση στο σήμα εισόδου?
- Δεν μπορούμε να **σχεδιάσουμε** συστήματα που να συμπεριφέρονται όπως θέλουμε εμείς
- Βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση μπορούν να γίνουν αν στρέψουμε την προσοχή μας στο **χώρο της συχνότητας**
- Στην προσπάθειά μας αυτή, θα ξεφύγουμε από την αναπαραστάσεις πλάτους-χρόνου που έχουμε δει ως τώρα…
- Θα περάσουμε σε αναπαραστάσεις **πλάτους-συχνότητας**!
- Ποιες είναι αυτές οι αναπαραστάσεις? Θα το δούμε άμεσα…

- Όπως η συνάρτηση Δέλτα έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των συστημάτων στο χώρο του χρόνου...
- ...έτσι και το μιγαδικό εκθετικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}, \quad A > 0$ θα παίξει καθοριστικό ρόλο στο χώρο της συχνότητας
- Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0 (t-\tau)+\phi)}\, d\tau$$

$$= Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

$$= H(f_0)\left(Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\right)$$

$$= H(f_0) x(t)$$

με

$$\boxed{H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau}$$

ένα σταθερό μιγαδικό αριθμό που εξαρτάται από το f_0, δηλ. από τη συχνότητα εισόδου

- Το αποτέλεσμα

$$y(t) = H(f_0)x(t)$$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ και

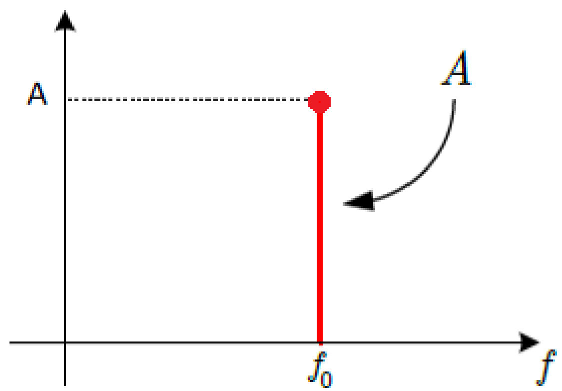
$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

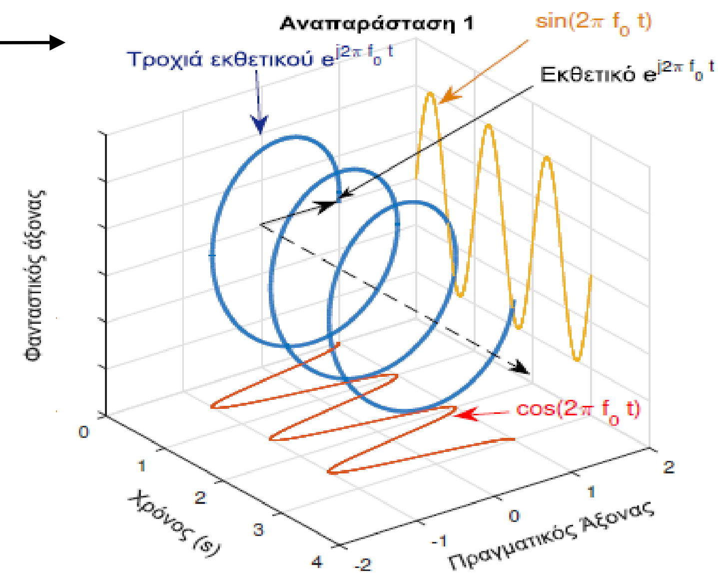
$$\cos\theta = \frac{1}{2}e^{j\theta} + \frac{1}{2}e^{-j\theta}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2j}e^{j\theta} - \frac{1}{2j}e^{-j\theta}$$

είναι πολύ σημαντικό!

- Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της μορφής $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά $H(f_0)$!
  - Η οποία βέβαια μπορεί να αλλάζει το πλάτος και τη φάση της εισόδου! ☺
- Ξέρουμε ότι τέτοια σήματα σχετίζονται στενά με ημιτονοειδή σήματα
  - Μέσω της σχέσης του Euler
- Και για μη ημιτονοειδή σήματα?
- Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε **κάθε** σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων?
  - Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!!
- Ας ξεκινήσουμε μελετώντας αρχικά μόνο <u>περιοδικά</u> σήματα

- Έστω το γνωστό μας σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t},\ A \in \Re_+$
- Το μιγαδικό αυτό σήμα αποτελείται από μια μόνο συχνότητα f_0 και περίοδο T_0
- Θυμηθείτε:
- Οπότε:





- Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\,, \qquad A > 0, \qquad \phi \in (-\pi, \pi]$$

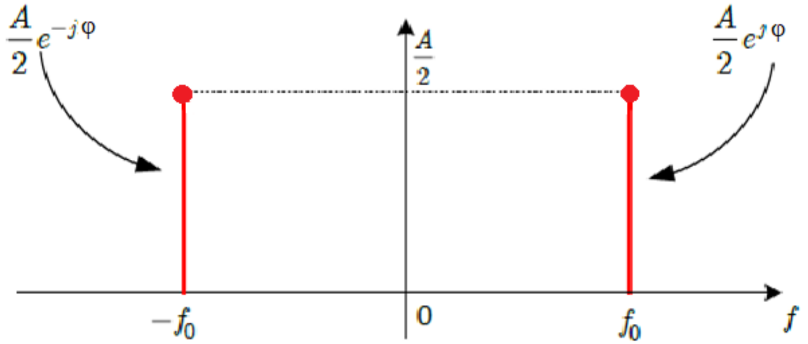
το οποίο γράφεται (Euler) ως:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}e^{-j2\pi f_0 t}$$

- Οπότε η αναπαράστασή του

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j2\pi f_0 t}$$

θα είναι



- Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$x(t) = X_1 e^{j2\pi f_0 t} + X_1^* e^{-j2\pi f_0 t}$$

με τους συντελεστές $X_1 = \frac{A}{2}e^{j\phi},\ \ X_1^* = \frac{A}{2}e^{-j\phi}, A > 0$ να ονομάζονται **phasors** (φάσορες)

  - … οι οποίοι είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί για πραγματικά σήματα (όπως το $\cos(\cdot)$)

- Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται **φάσμα (spectrum)**

- Είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη
  - **Στο *φάσμα πλάτους* σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα**
  - **…και στο *φάσμα φάσης* τη φάση του φάσορα**

- **Παράδειγμα**

$$\pm\frac{1}{j} = \mp j = e^{\mp\frac{j\pi}{2}}$$

- Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του σήματος

$$x(t) = 3 - 2\cos\left(2\pi 10t + \frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(2\pi 15t - \frac{\pi}{6}\right)$$

αφού ελέγξετε αν είναι περιοδικό → για να είναι περιοδικό πρέπει ο λόγος των συχνοτήτων να είναι λόγος ακεραίων : ✓

Είναι $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{10, 15\} = 5\ Hz$

$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{5} = 0.2\ sec$

Είναι

$$x(t) = 3 - \underbrace{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}} e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} + \frac{1}{\cancel{2}} e^{-j\frac{\pi}{9}} \cdot e^{-j2\pi 10t}\right)} + \left(\frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j2\pi 15t} - \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 15t}\right)$$

$$= 3 - e^{+j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} - \frac{1}{2} \cdot j \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} j\, e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 15t}$$

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} e^{-j2\pi 15t}$$

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

- **Παράδειγμα**

$$= 3 - e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi 10t} - e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

$$-1 = e^{\pm j\pi}$$

$$= 3 + e^{-j\pi} e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi 10t} + e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j2\pi 10t} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

$$\phi \in (-\pi, \pi]$$

$$= 3 + e^{-j\frac{8\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} + e^{+j\frac{8\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \cdots$$

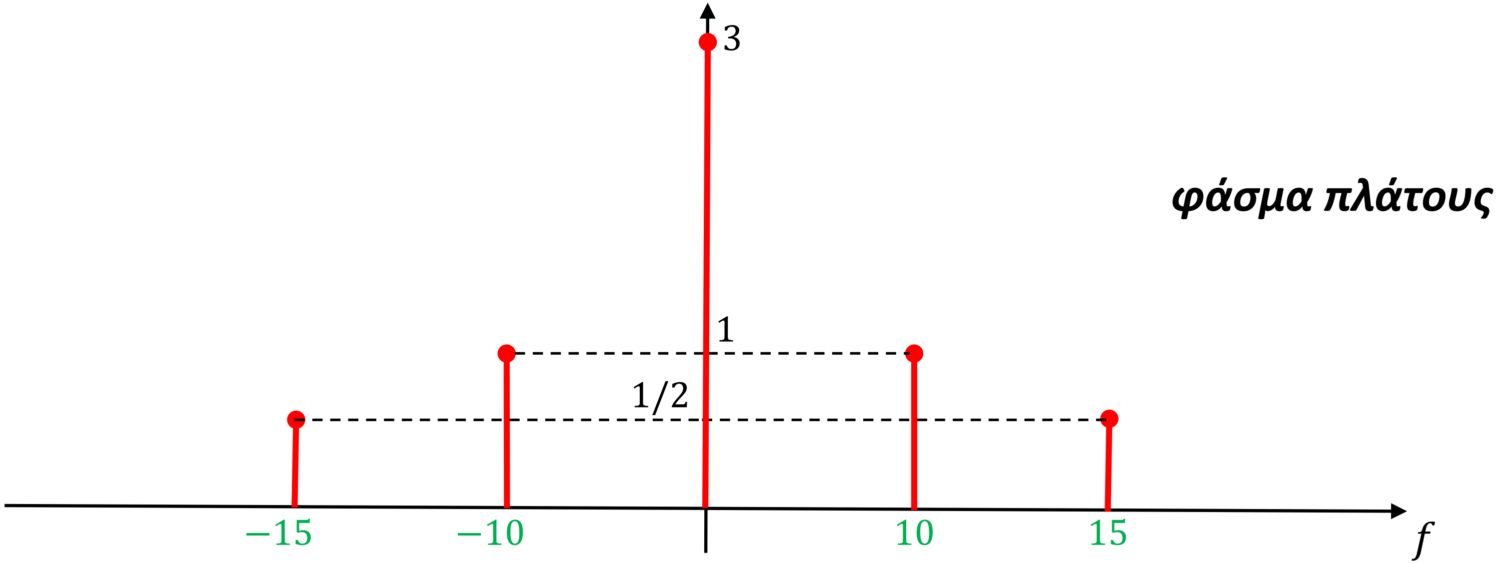
$$+ \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

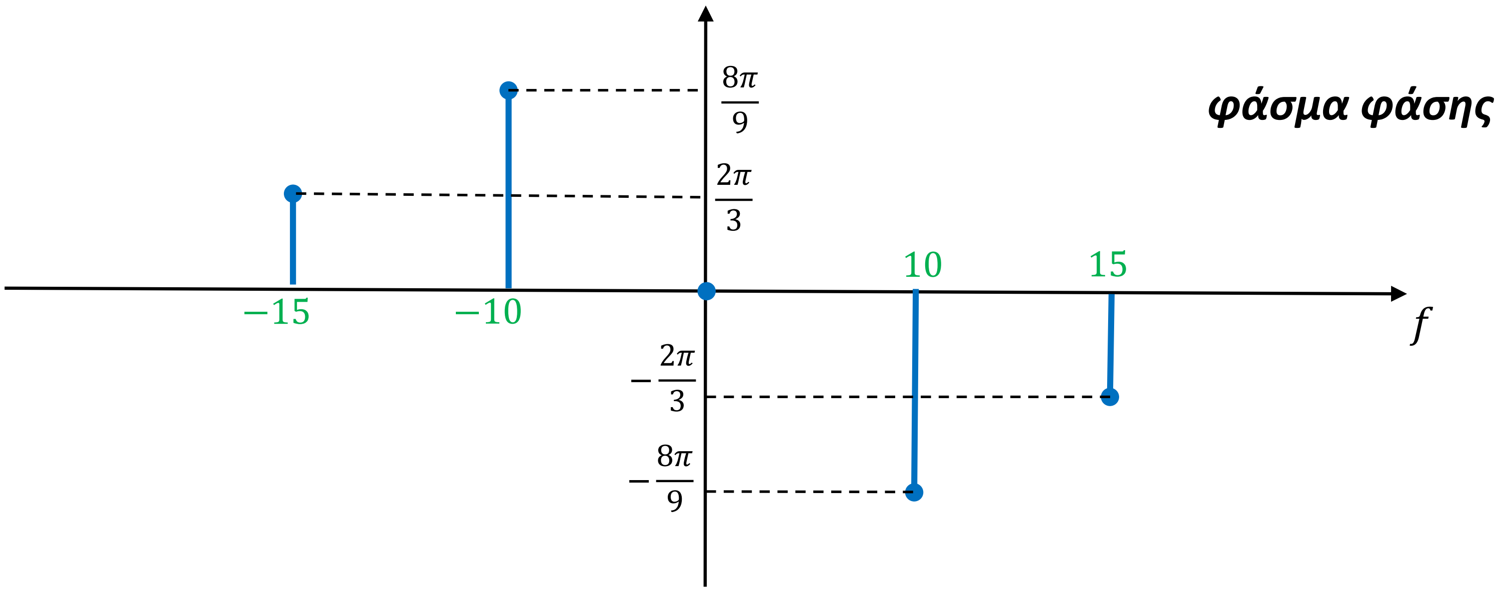
$$3e^{j2\pi 0t}$$

- Οπότε τελικά

$$x(t) = 3e^{j2\pi 0t} + 1e^{-\frac{j8\pi}{9}} e^{j2\pi 10t} + 1e^{\frac{j8\pi}{9}} e^{-j2\pi 10t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j2\pi}{3}} e^{j2\pi 15t} + \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi}{3}} e^{-j2\pi 15t}$$

- Παράδειγμα


3
1
1/2
−15
−10
10
15
f
φάσμα πλάτους


8π/9
2π/3
−15
−10
10
15
f
−2π/3
−8π/9
φάσμα φάσης

- Κάθε **<u>πραγματικό</u>** σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

a) **Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του**

b) **Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του**

- Η συμμετρία προκύπτει από τη συζυγία των φασόρων

- Επίσης παρατηρήστε ότι οι συχνότητες των ημιτόνων του παραδείγματος ήταν *ακέραιες πολλαπλάσιες* της θεμελιώδους συχνότητας
  - Έτσι οι φάσορες μπορούν να γραφούν ως X_k, με k το αντίστοιχο ακέραιο πολλαπλάσιο της θεμελιώδους συχνότητας
  - Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι φάσορες μπορούσαν να γραφούν ως
$$X_2, X_{-2} = X_2^*, X_3, X_{-3} = X_3^*$$
  - Οι $X_1, X_{-1} = X_1^*$ ήταν μηδενικοί
    - Δεν υπήρχε φασματικό περιεχόμενο στη συχνότητα $f = 5$ Hz, παρ' όλο που αυτή είναι η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος!

- Η ανάλυση περιοδικών σημάτων που γράφονται ως άθροισμα ημιτόνων είναι σχετικά απλή

- Ακολουθούμε την προηγούμενη διαδικασία

- **Ερώτημα: μπορούμε να γράψουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα ως άθροισμα συζυγών εκθετικών μιγαδικών συναρτήσεων?**
  - Αν μπορούμε, τότε τα προηγούμενα γενικεύονται για κάθε περιοδικό σήμα
  - Η εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο είναι τετριμμένη!

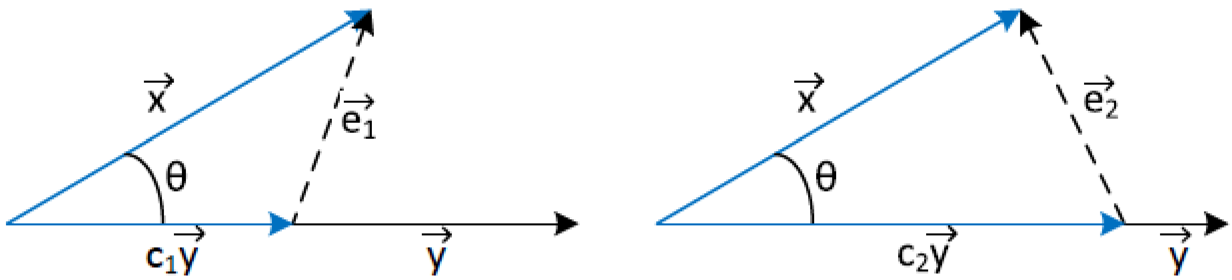
- **Εναλλακτική διατύπωση: μπορούμε να *προσεγγίσουμε* όσο καλά θέλουμε ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων)?**

Το «σχεδόν» στις παραπάνω προτάσεις αφορά εξαιρέσεις που δε θα συναντήσουμε στην πράξη

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**

- Για να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα θα ήταν πιο βολικό να περάσουμε από το χώρο των διανυσμάτων

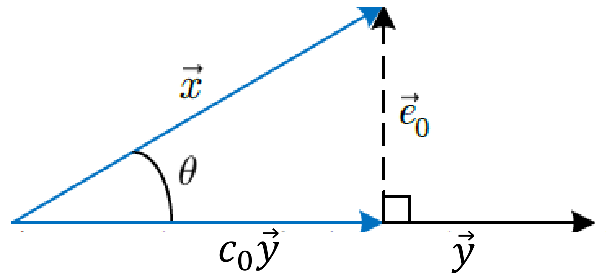
- Έστω διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ όπως στο σχήμα



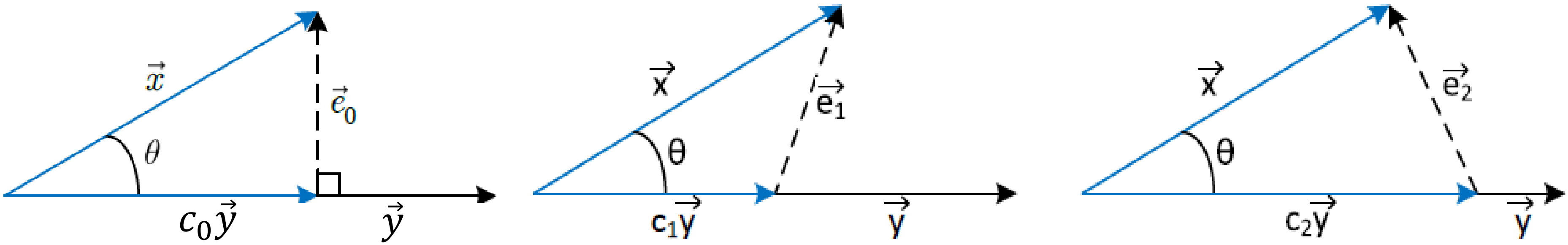
και $\vec{e}_i$ διανύσματα σφάλματος, με την έννοια ότι το $\vec{e}_i = \vec{x} - c_i\vec{y}$ είναι το διάνυσμα που πρέπει να προσθέσουμε στο $c_i\vec{y}$ για να πάρουμε το διάνυσμα $\vec{x}$, δηλ.

$$\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i$$

- Γνωρίζετε ότι το μικρότερο διάνυσμα σφάλματος είναι αυτό που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{y}$



- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**



- Τα διανύσματα $c_i\vec{y}$ αποτελούν **προσεγγίσεις** του διανύσματος $\vec{x}$ από το διάνυσμα $\vec{y}$

- Αν λοιπόν θέλαμε να γράψουμε $\vec{x} = c_i\vec{y} + \vec{e}_i \approx c_i\vec{y}$, ποια σταθερά c_i θα ήταν καλύτερη για αυτήν την προσέγγιση?
  - Η διαίσθηση μας – και τα μαθηματικά ☺ – λέει τη σταθερά c_0, αφού το διάνυσμα σφάλματος της, $\vec{e}_0$, είναι αυτό με το μικρότερο μήκος

- Ποια είναι η σταθερά c_0 όμως?

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε

$$\cos\theta = \frac{c_0|\vec{y}|}{|\vec{x}|} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2}|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2}\vec{x}\cdot\vec{y}$$

με $\vec{x}\cdot\vec{y}$ το εσωτερικό γινόμενο των δυο διανυσμάτων

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μην εφαρμόσουμε την ίδια τακτική σε σήματα (αντί για διανύσματα)? ☺
- Έστω ένα σήμα $x(t)$ που θέλουμε να το προσεγγίσουμε με ένα σήμα $y(t)$, σε ένα διάστημα $t_1 < t < t_2$
- Με όμοιο σκεπτικό με πριν, ποιο είναι το ***βέλτιστο c*** **–** με κάποια έννοια **–** για το οποίο $x(t) \approx cy(t)$ στο διάστημα αυτό?
- Ας ορίσουμε τη **συνάρτηση σφάλματος** (όμοια με το διάνυσμα σφάλματος) ως

$$e(t) = x(t) - cy(t)$$

- Θα θέλαμε η συνάρτηση σφάλματος να είναι όσο γίνεται «μικρότερη»…
  - Αλλά με ποια έννοια «μικρότερη»?
- Ένας βολικός τρόπος είναι να ζητήσουμε η συνάρτηση σφάλματος να έχει την **ελάχιστη ενέργεια**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \big(x(t) - cy(t)\big)^2 dt$$

E.BA$_1$

- **Πρόβλημα βελτιστοποίησης - optimization**!

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- **Ενέργεια σφάλματος**

$$E_e = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - cy(t)\right)^2 dt$$

- Για να βρούμε το βέλτιστο c θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d}{dc} E_e = 0$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt$$

με

$$E_y = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

και

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \langle x, y \rangle$$

να ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** των σημάτων $x(t), y(t)$

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{|\vec{y}|^2} |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta = \frac{1}{|\vec{y}|^2} \vec{x} \cdot \vec{y}}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{E_y} \int_{t_1}^{t_2} x(t)y(t)dt = \frac{1}{E_y} \langle x, y \rangle}$$

- **Παράδειγμα**

○ Έστω $y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ -1, & \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$ και $x(t) = \sin(t)\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi$

Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση του $y(t)$ από το $x(t)$

Θέλουμε το βέλτιστο c : $y(t) \simeq c\,x(t)$, $c = \frac{1}{E_x} \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x(t)y(t)\,dt$

Είναι $E_x = \int_{t_1=0}^{t_2=2\pi} x^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2} \right) dt$

$= \ldots = \pi \Longrightarrow \boxed{E_x = \pi}$

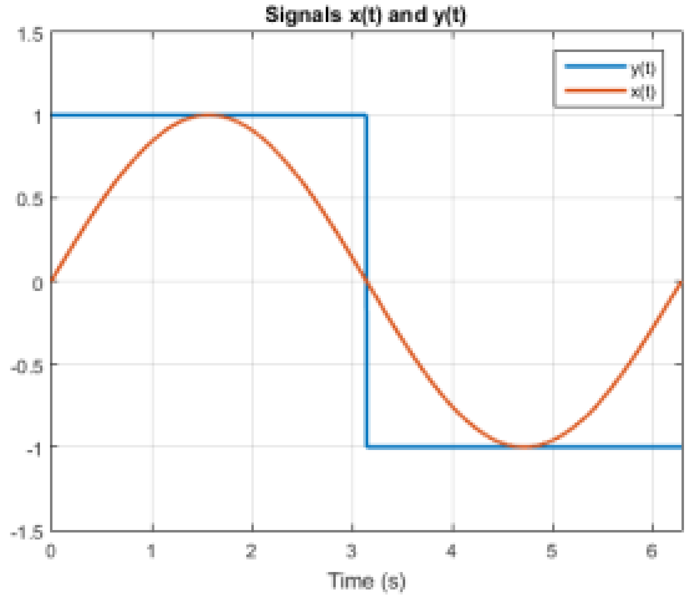
Άρα

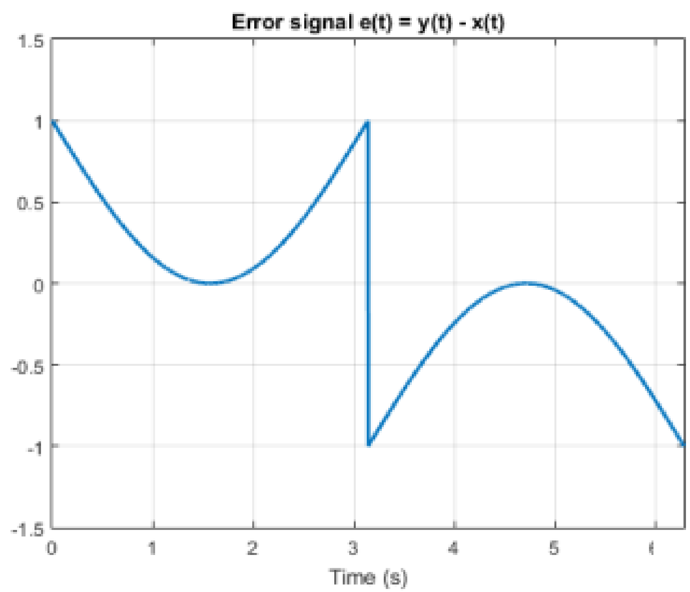
$$c = \frac{1}{\pi} \overbrace{\int_0^{2\pi} x(t)y(t)\,dt}^{\langle x,y \rangle} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin(t)\,dt$$

$= \ldots = \frac{4}{\pi} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{4}{\pi}}$. Άρα $y(t) \simeq \frac{4}{\pi} x(t)$

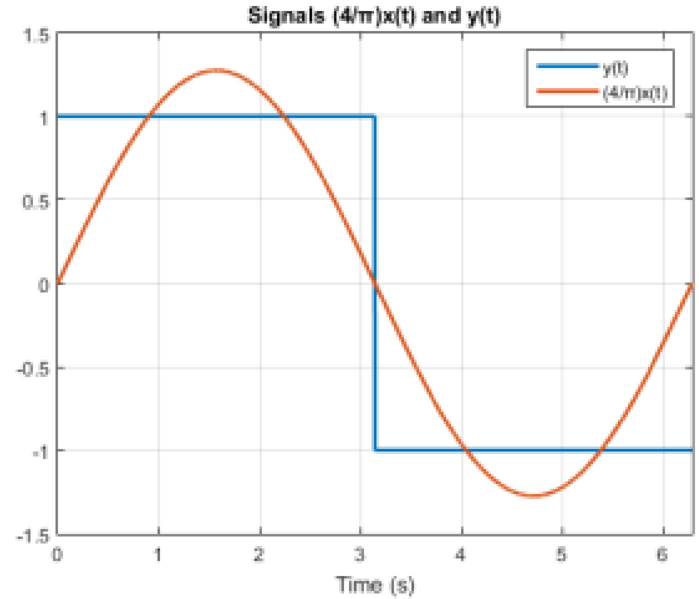
- Παράδειγμα

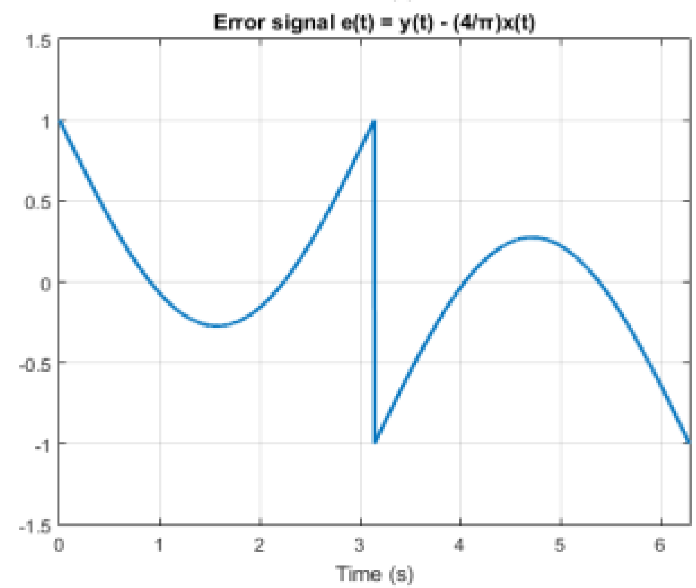
$c = 1$



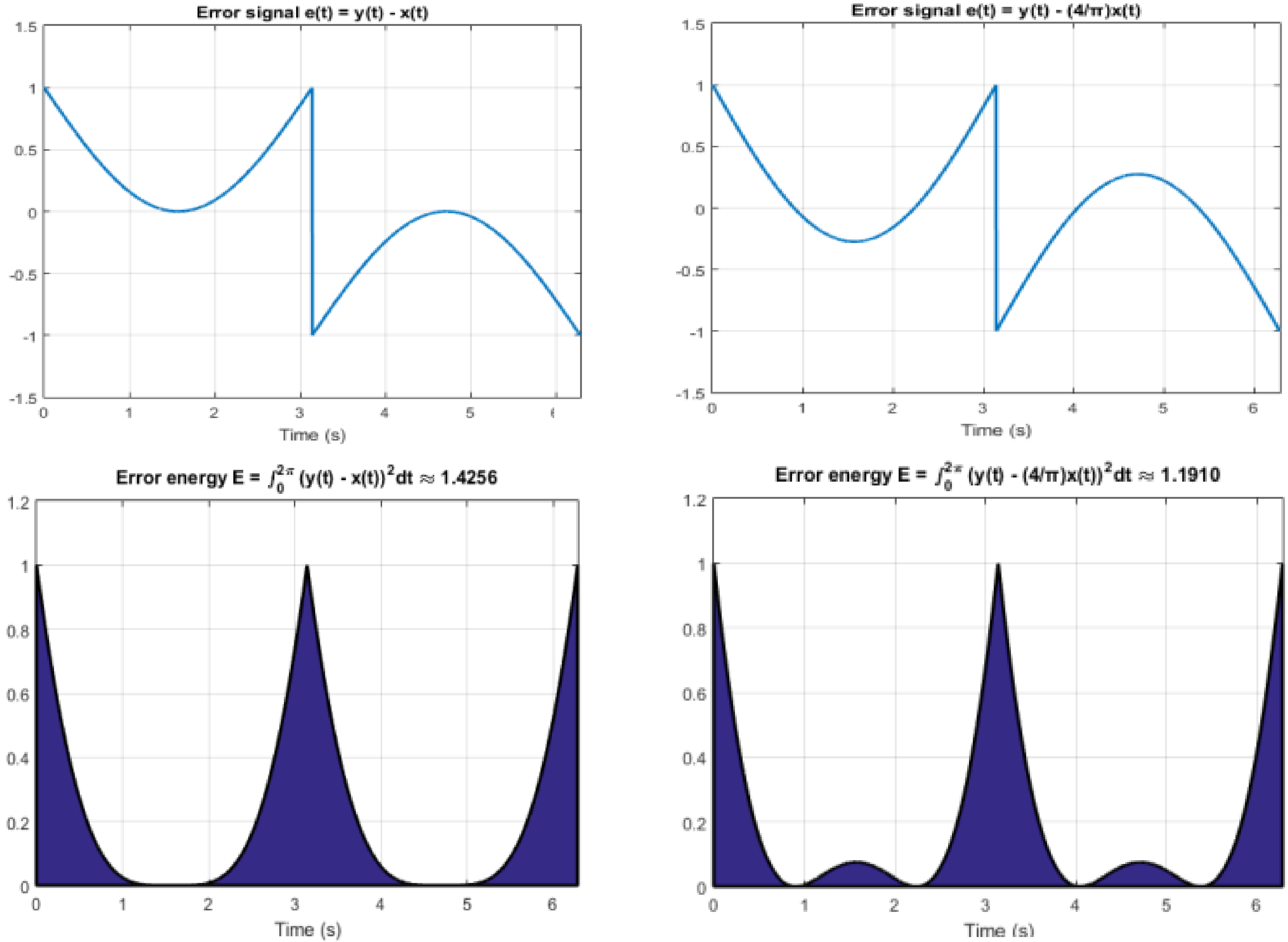


$c = \frac{4}{\pi}$





- Παράδειγμα

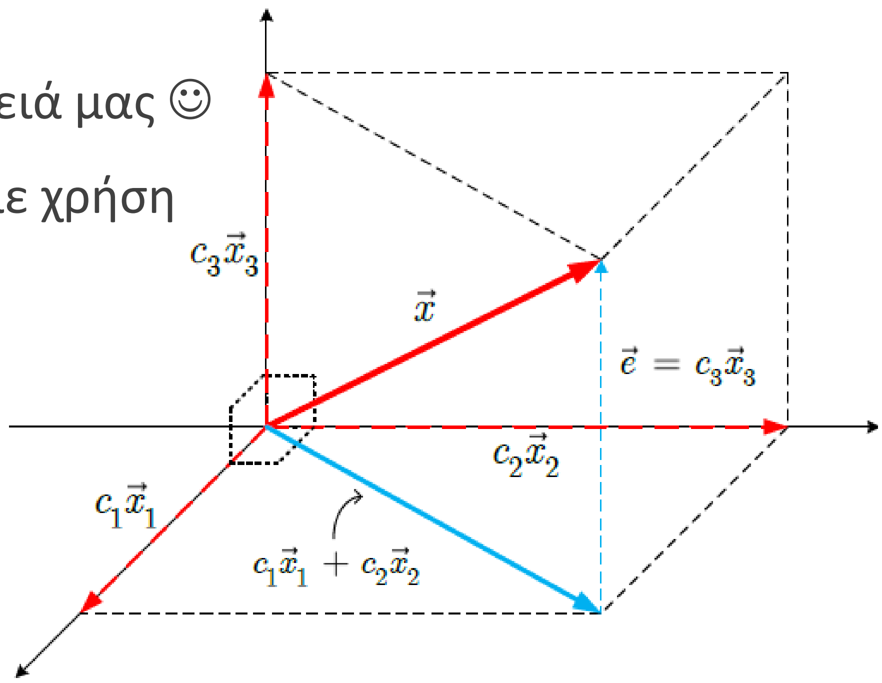

Error signal e(t) = y(t) - x(t)
Time (s)
Error signal e(t) = y(t) - (4/π)x(t)
Time (s)
Error energy E = $\int_0^{2\pi}$ (y(t) - x(t))^{2}dt ≈ 1.4256
Time (s)
Error energy E = $\int_0^{2\pi}$ (y(t) - (4/π)x(t))^{2}dt ≈ 1.1910
Time (s)

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Γιατί να μείνουμε μόνο σε ένα σήμα προσέγγισης?
- Αν χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση ενός σήματος $y(t)$ του τύπου

$$y(t) \approx c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_N x_N(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k x_k(t)$$

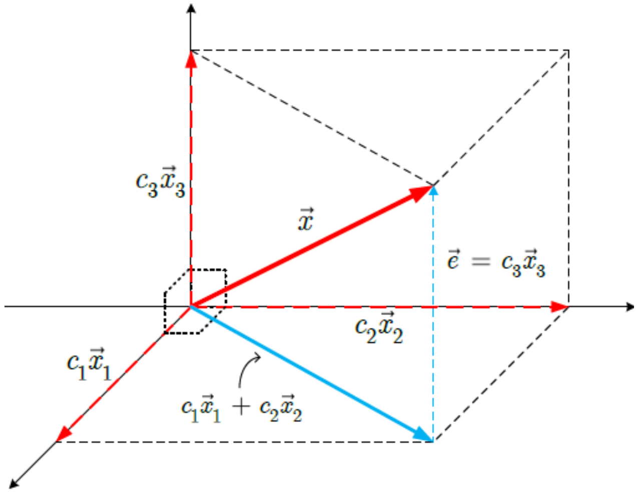
- Αναμένουμε ότι η ενέργεια σφάλματος θα γίνεται όλο και μικρότερη όσο προσθέτουμε όρους $x_i(t)$
  - Αρκεί οι όροι να είναι «κατάλληλοι»
- Ξανά, τα διανύσματα θα τρέξουν προς βοήθειά μας ☺
- Ένα διάνυσμα στον 3D-χώρο περιγράφεται με χρήση τριων διανυσμάτων
  - Ένα για το μήκος
  - Ένα για το πλάτος
  - Ένα για το ύψος

$$\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3$$



- Πλήρης και ακριβής αναπαράσταση!

- **Προσεγγίσεις σημάτων από σήματα**
- Αν χρησιμοποιήσουμε δυο αντί για τρια διανύσματα για την περιγραφή του διανύσματος $\vec{x}$ τότε θα έχουμε σφάλμα
  - Έστω ότι δεν περιλαμβάνουμε το $c_3\vec{x}_3$
  - Αυτό θα είναι το διάνυσμα σφάλματος



- Διάνυσμα σφάλματος:

$$\vec{e} = \vec{x} - (c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2) = c_3\vec{x}_3$$

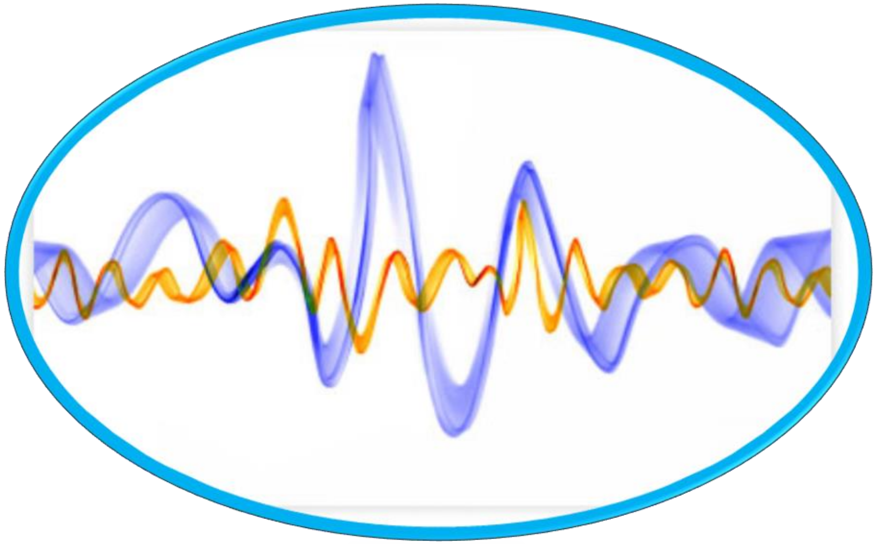
- **Ερώτηση**: **ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε ένα διάνυσμα $\vec{x}$ του 3D χώρου πλήρως και ακριβώς?**

Ε.ΒΑ$_2$

- Η διαίσθησή μας λέει ότι ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$x_1 = [1, 0, 0], \qquad x_2 = [0, 1, 0], \qquad x_3 = [0, 0, 1]$$

Συνεχίζεται... ☺



E.BA

AM: 4060

AM: 4192