ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

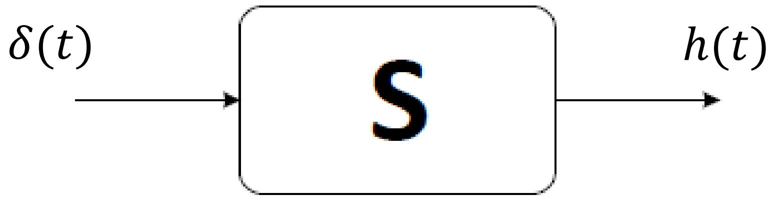
ΔΙΑΛΕΞΗ 6Η

- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος

Η διάλεξη αυτή περιέχει 3 Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ

- **Συστήματα (review…)**
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές είσοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα…
  - …που περιγράφεται από μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
  - …απουσία αρχικών συνθηκών για $t = 0^-$
  - Συμβολισμός: $h(t)$
- Μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε έξοδο για οποιαδήποτε είσοδο αν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος
- Η πράξη της **συνέλιξης** μας δίνει την έξοδο – ας τη δούμε!



- **Συστήματα (review…)**

- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Πώς βοηθά λοιπόν η σχέση για την εύρεση της εξόδου?

- Θυμηθείτε ότι το σύστημά μας είναι ΓΧΑ!
  - …αφού οι αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης που το περιγράφει είναι μηδενικές!

- **Συστήματα (review…)**

- Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$$

c) γραμμικότητα:

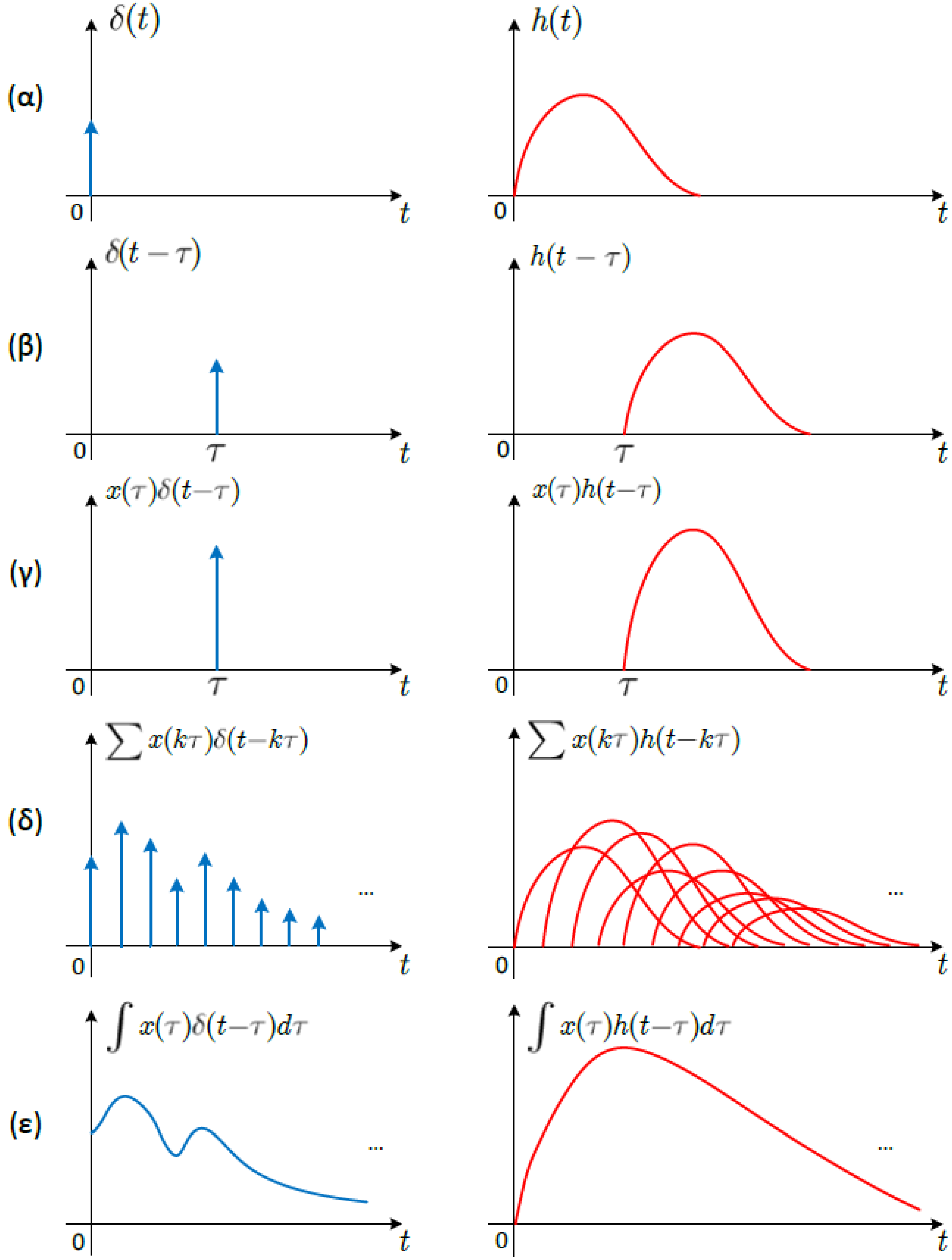
$$x(\tau)\delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$$

d) γραμμικότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

e) έξοδος:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

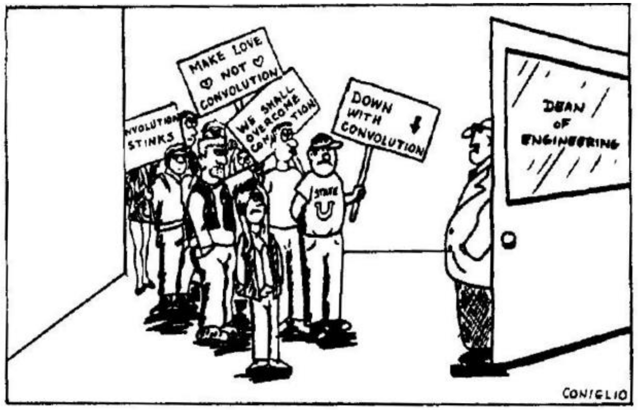

(α)
(β)
(γ)
(δ)
(ε)
$\delta(t)$
$h(t)$
$\delta(t-\tau)$
$h(t-\tau)$
$x(\tau)\delta(t-\tau)$
$x(\tau)h(t-\tau)$
$\sum x(k\tau)\delta(t-k\tau)$
$\sum x(k\tau)h(t-k\tau)$
$\int x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
$\int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
0
τ
t
...

- **ΓΧΑ Συστήματα**
- Η κρουστική απόκριση $h(t)$ περιγράφει **πλήρως** ένα ΓΧΑ σύστημα
  - Αν τη γνωρίζουμε, ξέρουμε τα πάντα για το σύστημα…
    - …όπως θα δούμε στη συνέχεια
    - Μπορούμε να υπολογίζουμε όποια έξοδο θέλουμε δεδομένης μιας εισόδου
- Ένα σύστημα που περιγράφεται από γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές είναι ΓΧΑ…
  - …όταν οι αρχικές (βοηθητικές) συνθήκες είναι όλες μηδενικές
  - …πράγμα που θα συμβαίνει στο 99% των περιπτώσεων στα πλαίσια του μαθήματος
- Κάθε ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την κρουστική του απόκριση
- Η κρουστική απόκριση προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση με σχετικά απλό τρόπο
  - …τον οποίο δε θα εξετάσουμε όμως στο μάθημα
- Η μαθηματική μορφή της κρουστικής απόκρισης θα μας δίνεται έτοιμη
- Η κρουστική απόκριση είναι κι αυτή ένα σήμα, απλώς περιγράφει τη λειτουργία ενός συστήματος!
- Ας επιστρέψουμε στην πράξη της συνέλιξης…

- Η συνέλιξη έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

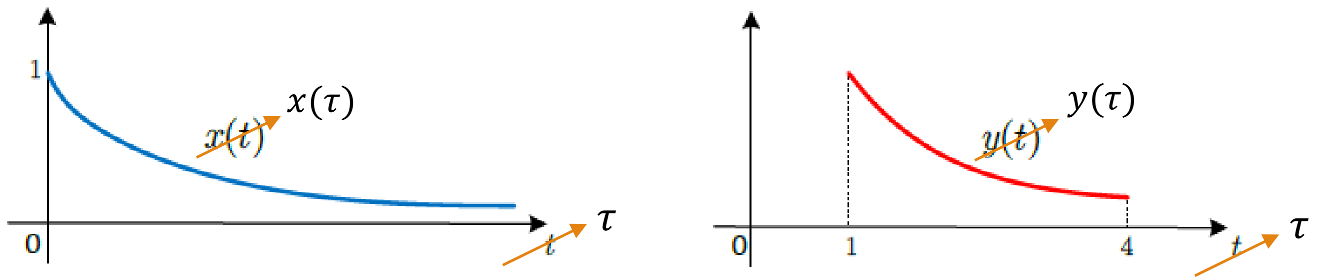
Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \Re \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \Re \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό της συνέλιξης
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη δυσκολία της ως πράξη ☹
- Ας δούμε πόσο απλή είναι τελικά ☺

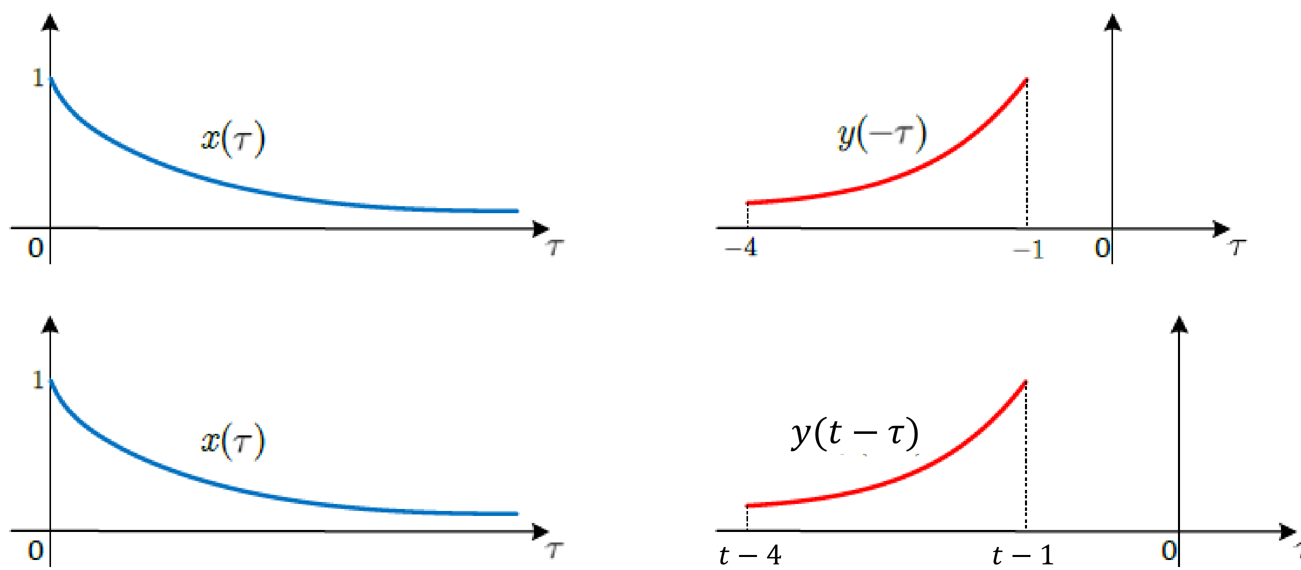


- **Συνέλιξη**

- Έστω δυο σήματα $x(t), y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$



- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**
  - Έστω ότι το $y(\tau)$ θα είναι αυτό το σήμα

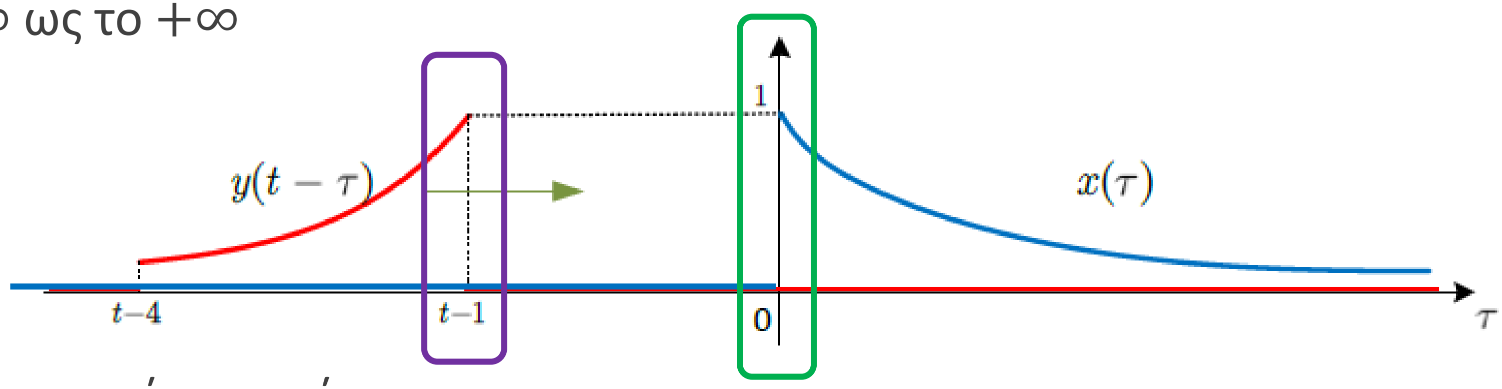


Αντιστροφή

Μετατόπιση

- **Συνέλιξη**

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 1 < 0 \Rightarrow t < 1$$

και

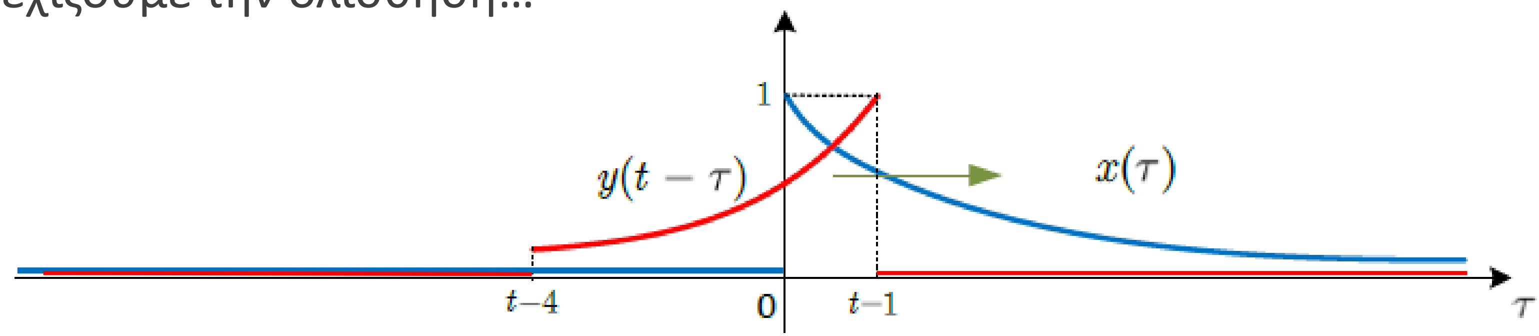
$$c(t) = 0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t-\tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το δεξί «άκρο» του περάσει το $t = 0$...
  - ...που είναι το αριστερό «άκρο» του $x(\tau)$

- **Συνέλιξη**

- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-4<0 \text{ και } t-1>0 \Rightarrow 1<t<4$$

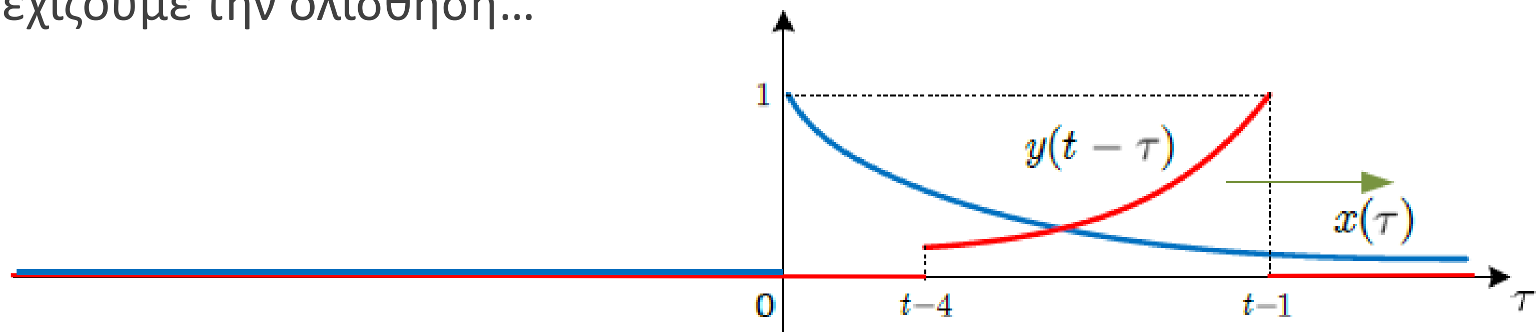
και

$$c(t)=\int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(1,4)$

- Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση...

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4$$

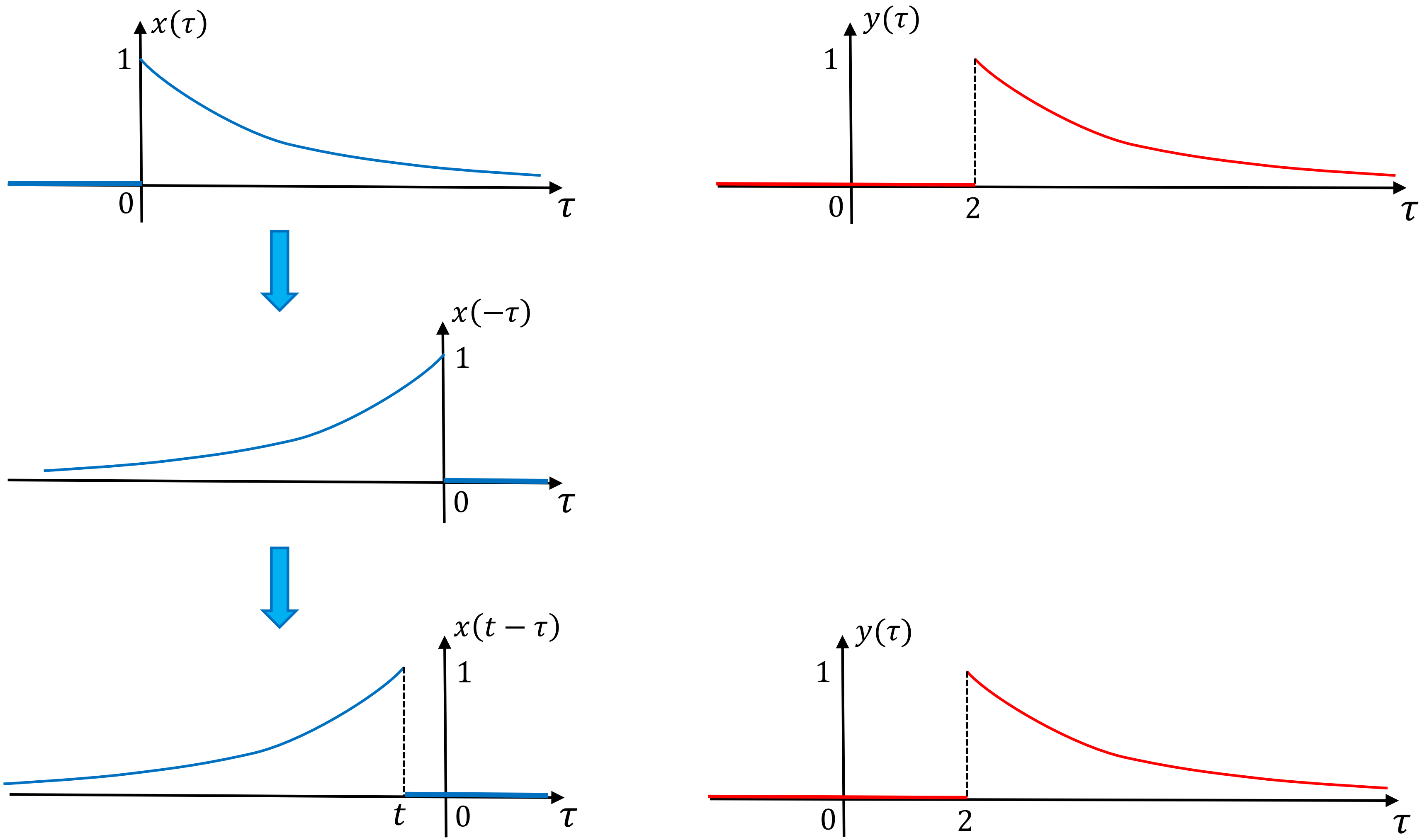
και

$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4, +\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

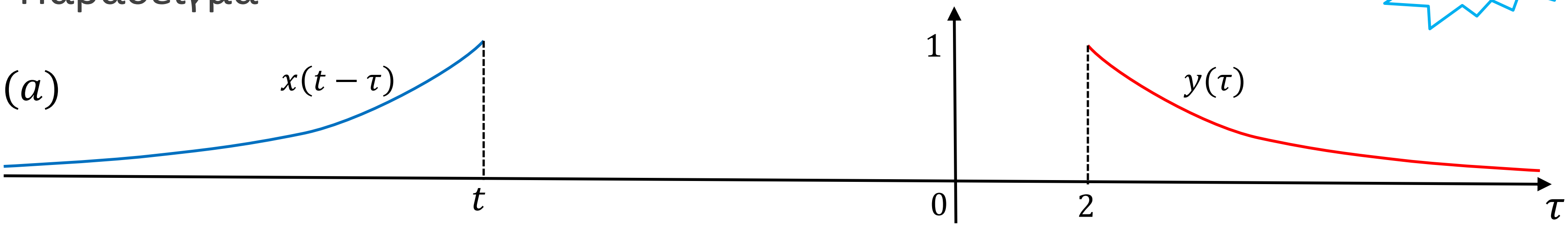
○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t), \;\; y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$



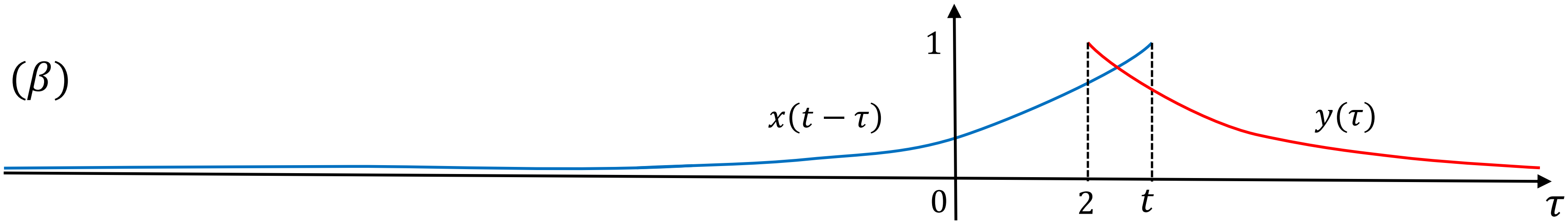
- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

E.BA$_1$

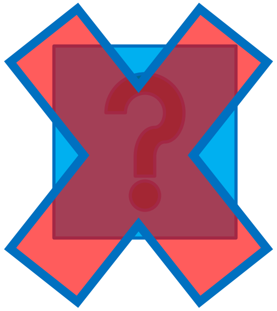
(a)



(β)



(γ)



- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

α) Είναι $c_{xy}(t) = 0 \ , \ t < 2$.

β) Είναι $c_{xy}(t) = \int_2^t e^{-(t-\tau)} e^{-(\tau-2)} d\tau = \int_2^t e^{-t} \cdot e^{\tau} e^{-\tau} \cdot e^{2} d\tau$

$$= e^{-t} \int_2^t e^{\cancelto{0}{\tau-\tau}} \cdot e^{2} d\tau = e^{-t+2} \int_2^t d\tau = e^{-t+2} \tau \Big]_2^t =$$

$$= e^{-t+2}(t-2) = e^{-(t-2)}(t-2) = (t-2)e^{-(t-2)}, \text{ για } t > 2$$

Άρα

$$c_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)e^{-(t-2)}, & t > 2 \end{cases} = (t-2)e^{-(t-2)} u(t-2)$$

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

E.BA$_2$

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t),\ \ y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

Είναι $C_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)}u(\tau-2)\,e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)}e^{-(t-\tau)}\underbrace{u(\tau-2)\,u(t-\tau)}\,d\tau \quad (1)$$

Είναι $u(\tau-2) = \begin{cases} 1, & \tau>2 \\ 0, & \tau<2 \end{cases}$, $\quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau>0 \Rightarrow \tau<t \\ 0, & \tau>t \end{cases}$

Άρα $u(\tau-2)\,u(t-\tau) = 1,\quad 2<\tau<t \quad (2)$ (Προφανώς είναι 0, για $\tau \notin (2,t)$)

- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

$$1 \overset{2}{\Rightarrow} c_{xy}(t) = \int_2^t e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \int_2^t e^{-\tau} \cdot e^{2} e^{-t} e^{\tau} d\tau = e^{-(t-2)} \int_2^t d\tau = (t-2) e^{-(t-2)}, \text{ για } t>2$$

και προφανώς 0 για $t<2$, άρα:

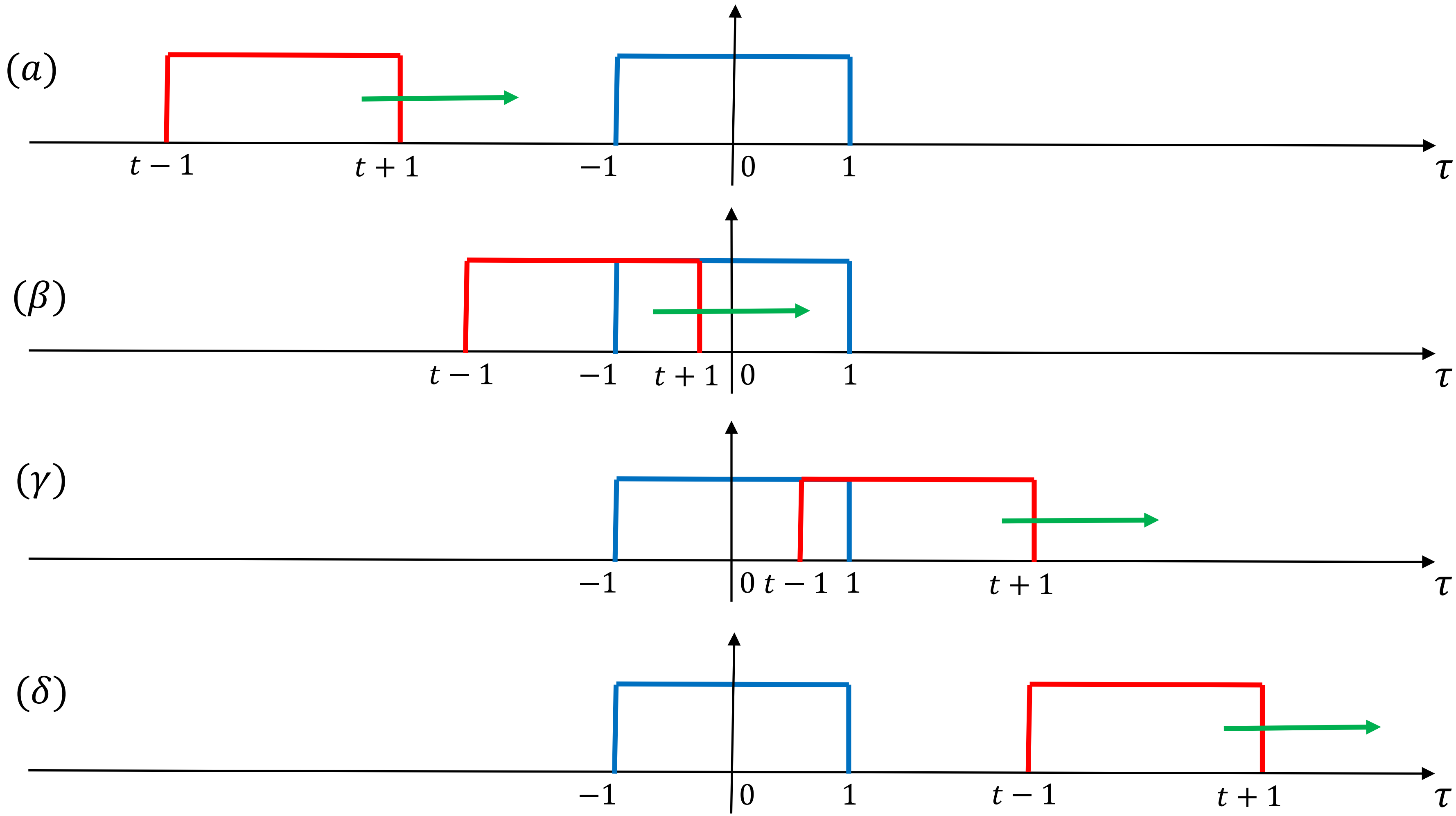
$$c_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t<2 \\ (t-2)e^{-(t-2)}, & t>2 \end{cases} \Rightarrow c_{xy}(t) = (t-2)e^{-(t-2)} u(t-2)$$

Ίδια απάντηση με τη γραφική λύση, όπως αναμενόταν.

- **Συνέλιξη**
- **Παράδειγμα**

E.BA$_3$

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(t)$



- **Συνέλιξη**
- Παράδειγμα

α) Είναι $c_{xx}(t) = 0$, για $t+1 < -1 \Rightarrow t < -2$.

β) Είναι $c_{xx}(t) = \int_{-1}^{t+1} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big]_{-1}^{t+1} = (t+1) - (-1) = t+2$,

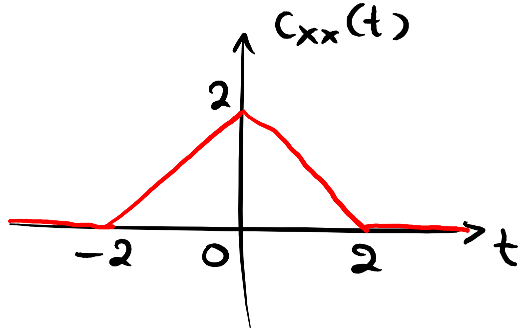
για $t+1 > -1$ και $t-1 < -1 \Rightarrow t > -2$ και $t < 0 \Rightarrow -2 < t < 0$

γ) Είναι $c_{xx}(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot d\tau = \tau \Big]_{t-1}^{1} = (1 - (t-1)) = -t+2$,

για $t+1 > 1$ και $t-1 < 1 \Rightarrow t > 0$ και $t < 2 \Rightarrow 0 < t < 2$

δ) Είναι $c_{xx}(t) = 0$, για $t-1 > 1 \Rightarrow t > 2$.

Άρα $c_{xx}(t) = \begin{cases} 0, & t < -2, t > 2 \\ t+2, & -2 < t < 0 \\ -t+2, & 0 < t < 2 \end{cases}$ $\sim$



- **Συνέλιξη**

- Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

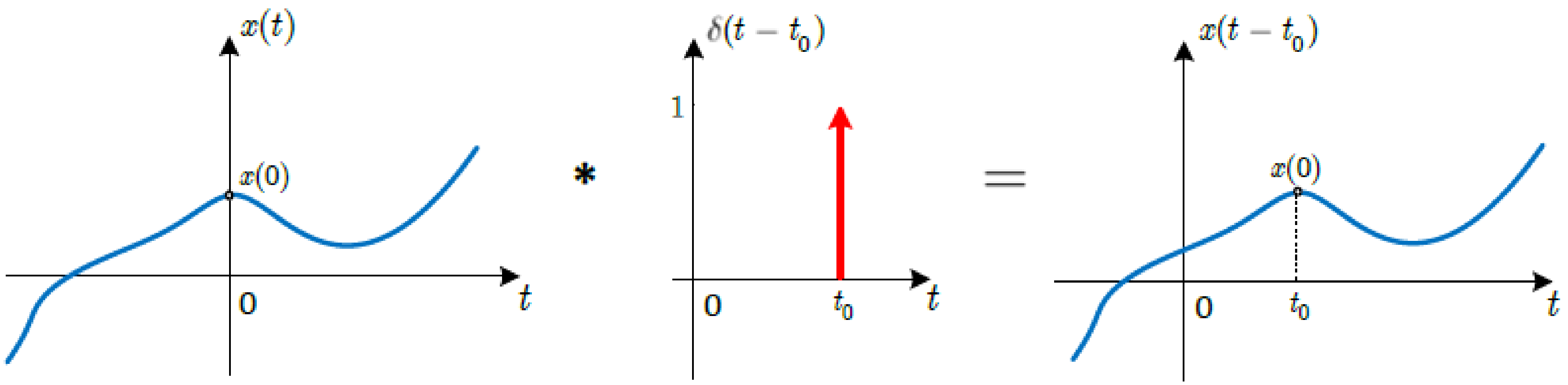
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$\delta(t-t_0),$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0, δηλ.

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau = x(t-t_0)$$



- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Για να είναι ευσταθές το σύστημα

$$|y(t)| < B_y \Rightarrow |y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau$$

- **Ευστάθεια Συστήματος**
- Η σχέση

$$|y(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t})| \boldsymbol{dt} < +\infty$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη**
- Αποτελεί **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!

- **Αιτιατότητα Συστήματος**

- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει

- Προφανώς ένα σύστημα που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες δεν μπορεί να είναι αιτιατό...
  - ... αφού παράγει έξοδο χωρίς να διεγερθεί από μια είσοδο! ☺

- Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με αυτό που ονομάζουμε «**κατάσταση αρχικής ηρεμίας**» του συστήματος

- **Αιτιατότητα Συστήματος**

- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα (ή μη) του?
  - Ναι!

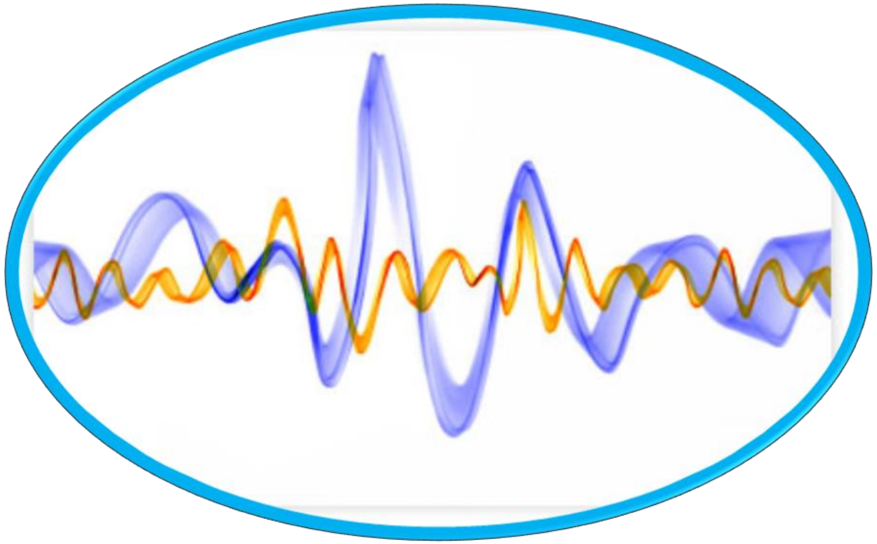
- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$

- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό

- Άρα ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$\boxed{h(t) = 0, \qquad t < 0}$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



Ε.ΒΑ.

ΑΜ: 4242

ΑΜ: 4229

ΑΜ: 4256