ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η

- Σήματα και Συστήματα

Η διάλεξη αυτή περιέχει 3 Ε.ΒΑ.

Ε.ΒΑ

- **Σήματα (review…)**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!
- **Κανόνες**:
  - Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == **φραγμένο πλάτος για κάθε t**

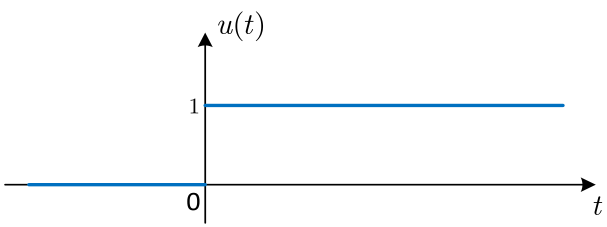
❑ Σήμα Ενέργειας

- ✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο
- ✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$
  - ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

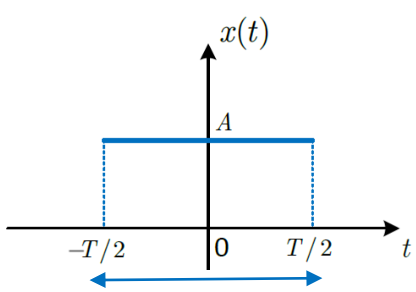
❑ Σήμα Ισχύος

- ✓ Άπειρης διάρκειας
- ✓ Περιοδικό

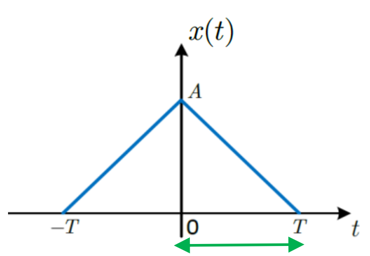
- **Σήματα (review...)**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t
  - Χρονική ολίσθηση (time shifting): $\mathrm{t} \coloneqq \mathrm{t} - \mathrm{t}_0$
  - Χρονική αντιστροφή (time reversal): $\mathrm{t} \coloneqq -\mathrm{t}$
  - Χρονική κλιμάκωση (time scaling): $\mathrm{t} \coloneqq \alpha \mathrm{t}$
- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**
- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες
- Αυτές είναι:



❑ **Η βηματική συνάρτηση** $u(t)$



❑ **Ο τετραγωνικός παλμός** $A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



❑ **Ο τριγωνικός παλμός** $A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$

- **Σήματα**
- **Παράδειγμα**:
  - Σχεδιάστε τα σήματα:

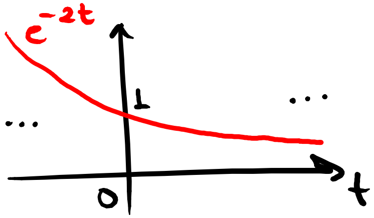
(α') $e^{-2t}u(t-2)$

(β') $u(t^2-4)$ E.BA$_1$

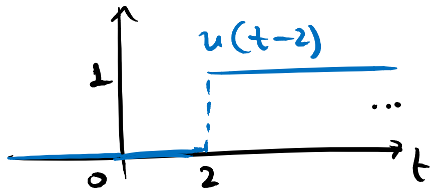
(γ') $4\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{5}\right)$ E.BA$_2$

(δ') $\mathrm{tri}\left(\frac{t+1}{2}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)$

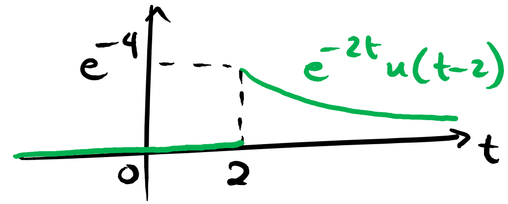
α)



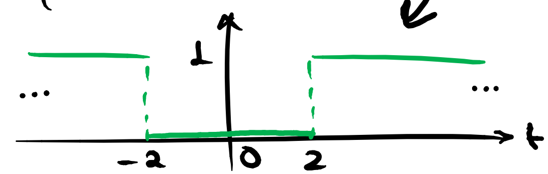
×



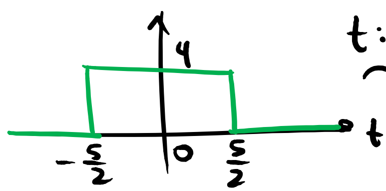
=



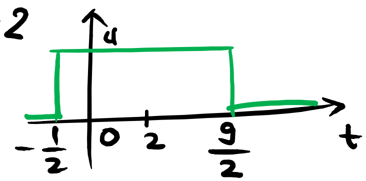
β) Είναι $u(t^2-4)=\begin{cases}1, & t^2-4>0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} = \begin{cases}1, & (t-2)(t+2)>0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases} = \begin{cases}1, & t<-2 \text{ και } t>2\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$



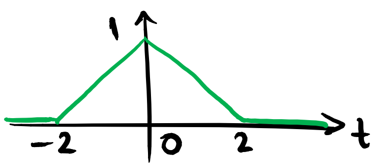
γ) $4\mathrm{rect}\left(\frac{t}{5}\right) \rightsquigarrow$



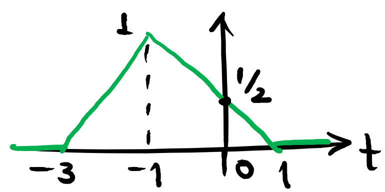
$t:=t-2$



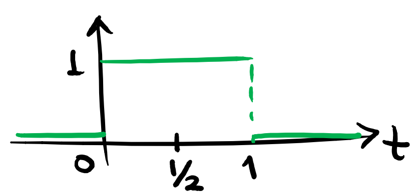
δ) $\mathrm{tri}\left(\frac{t}{2}\right) \rightsquigarrow$



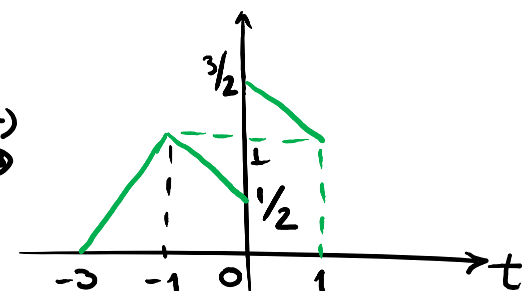
$t:t+1$



$\mathrm{rect}\left(\frac{2t-1}{2}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{1}\right) \rightsquigarrow$



$\overset{(+)}{\Longrightarrow}$



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ, ***αλλά με σταθερό μοναδιαίο "εμβαδό"***, τι θα κάναμε?
  - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$

- ...και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon\to 0} p(t)$

- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία:

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \left(\frac{1}{\epsilon}\right) dt = 1$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

όταν $\epsilon \to 0$

- Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται **κρουστική συνάρτηση Δέλτα** – ή απλά **συνάρτηση Δέλτα** στο εξής – και γράφεται ως $\delta(t)$
  - Η συνάρτηση Δέλτα **ΔΕΝ** είναι συνάρτηση – είναι **κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση**! Ο χειρισμός της θέλει προσοχή!

- Η συνάρτηση Δέλτα λοιπόν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

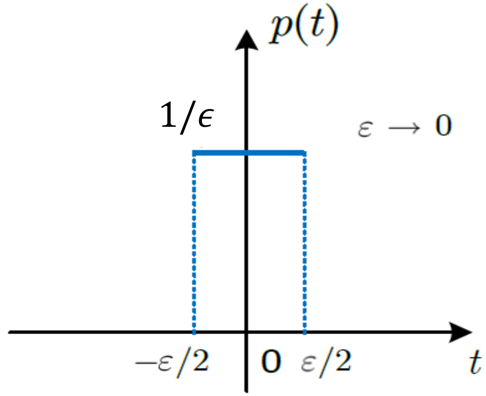
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

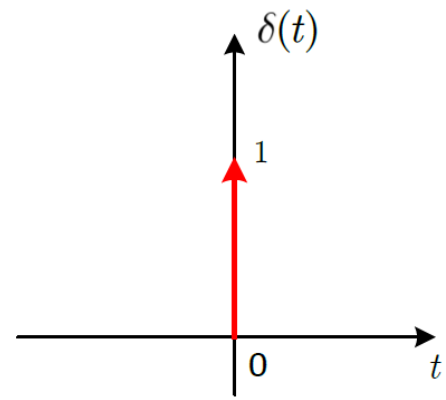
- **Σήματα**

- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**

- Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω

- Παρατηρήστε τη σχεδίαση της συνάρτησης Δέλτα





- Προσέξτε ότι το 1 στη «μύτη» της συνάρτησης Δέλτα **δεν** είναι το πλάτος της!
  - Αυτό είναι άπειρο!

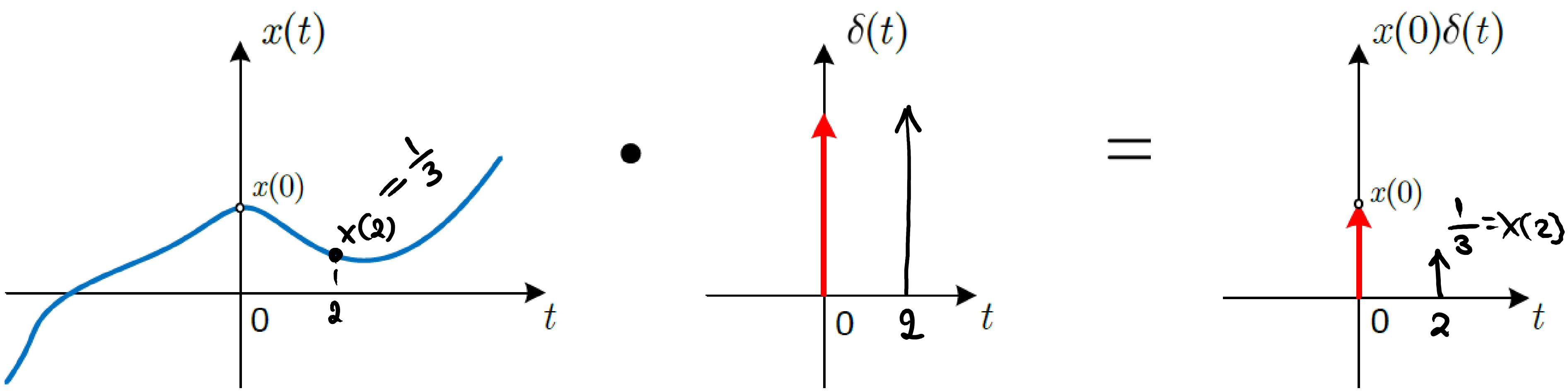
- Είναι η τιμή του «εμβαδού» της

- Οι πράξεις που επιτρέπονται με τη συνάρτηση Δέλτα είναι πρόθεση, αφαίρεση, και πολλαπλασιασμός με συνεχή συνάρτηση. Οι μετασχηματισμοί που είδαμε επιτρέπονται όλοι

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Αν πολλαπλασιάσουμε ένα συνεχές σήμα με μια συνάρτηση Δέλτα η οποία «ζει» τη χρονική στιγμή $t = t_0$ τότε ουσιαστικά αλλάζουμε το "εμβαδό" της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

- Ουσιαστικά η παραπάνω πράξη **δειγματοληπτεί** το σήμα $x(t)$ τη χρονική στιγμή t_0
- Σχηματικά:

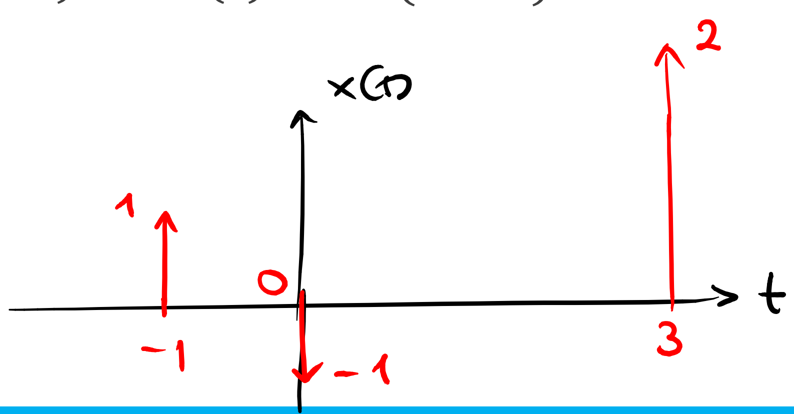


- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Η προηγούμενη ιδιότητα μας βοηθά να ορίσουμε σήματα που έχουν τιμές μόνο για συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t = -1 \\ -1, & t = 0 \\ 2, & t = 3 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$= 1\delta(t+1) - 1\delta(t) + 2\delta(t-3)$$

- Ας σχεδιάσουμε αυτό το σήμα



- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Πολλαπλασιασμός σήματος με συνάρτηση Δέλτα
- Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση της δειγματοληψίας, περιμένουμε να λάβουμε το “εμβαδό” κάτω από την επιφάνεια $x(t)\delta(t-t_0)$...
  - ... το οποίο είναι $x(t_0)$
- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Μερικές ακόμα ιδιότητες που μπορείτε να αποδείξετε είναι οι:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \qquad a \neq 0$$

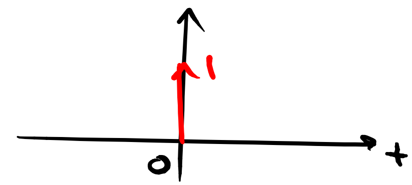
$$\delta(-t) = \delta(t)$$

- **Σήματα**

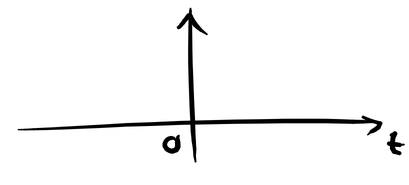
$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

- Παράδειγμα:
  - Υπολογίστε τα

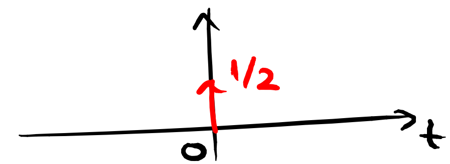
$$(3t^2+1)\delta(t) = \left(3t^2+1\right)\Big]_{t=0}\delta(t) = 1\cdot\delta(t) = \delta(t)$$



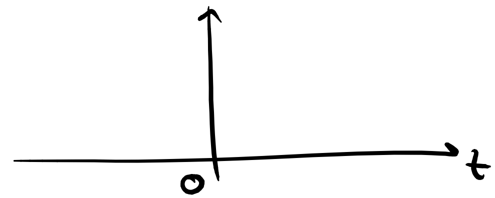
$$(t^2+\cos\pi t\,)\delta(t-1) = \left(t^2+\cos(\pi t)\right)\Big]_{t=1}\delta(t-1) = 0\cdot\delta(t-1)$$



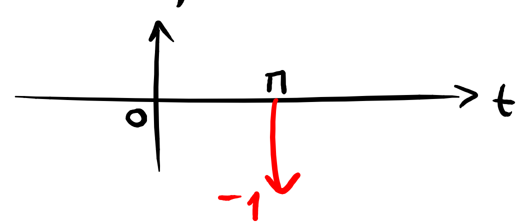
$$e^{-t}\delta(2t) = e^{-t}\frac{1}{2}\delta(t) = e^{-t}\Big]_{t=0}\frac{1}{2}\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$$



$$t\delta(t) = t\Big]_{t=0}\delta(t) = 0\cdot\delta(t)$$



$$\cos(t)\,\delta(t-\pi) = \cos t\Big]_{t=\pi}\delta(t-\pi) = \cos(\pi)\,\delta(t-\pi) = -\delta(t-\pi)$$



- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Υπολογίστε τα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{(3t^2+1)}^{x(t)}\delta(t)dt = (3t^2+1)\Big]_{t=0} = 1$$

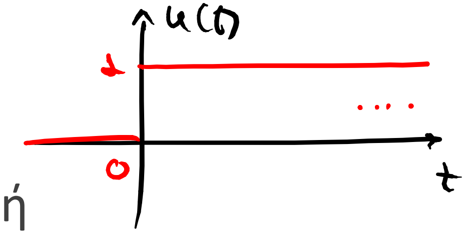
$$\int_{-1}^{1} (3t^2+1)\delta(t)dt = (3t^2+1)\Big]_{t=0} = 1$$

$$\int_{1}^{2} (\log_{10} 10t^2)\delta(t+1)dt$$ E.BA$_3$ $= 0$, γιατί το διάστημα ολοκλήρωσης δεν περιλαμβάνει τη $\delta(t+1)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)dt = (t^2+\cos(\pi t))\Big]_{t=1} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\delta(2t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{2}\delta(t)\,dt = \frac{1}{2}e^{-t}\Big]_{t=0} = \frac{1}{2}$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**



- Η (ήδη!) γνωστή μας βηματική συνάρτηση είναι πολύ σημαντική
  - Έχει άραγε παράγωγο? Αν ναι, ποια είναι αυτή?
- Από τον ορισμό της

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η παράγωγός της είναι παντού μηδέν εκτός από τη στιγμή $t = 0$, όπου δεν ορίζεται παράγωγος

  - Αλλιώς, η παράγωγος είναι άπειρη

- Άρα μια «γενικευμένη» έννοια της παραγώγου της βηματικής συνάρτησης θα ικανοποιούσε την ιδιότητα

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

- Επίσης από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έχουμε

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} u'(t)dt = u(\epsilon) - u(-\epsilon) = 1 - 0 = 1$$

για $\epsilon > 0$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και η βηματική συνάρτηση**
- Συνολικά

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)dt = 1$$

- Μα αυτές οι ιδιότητες είναι οι ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα!
- Άρα η (γενικευμένη) **παράγωγος** της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση Δέλτα:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$$

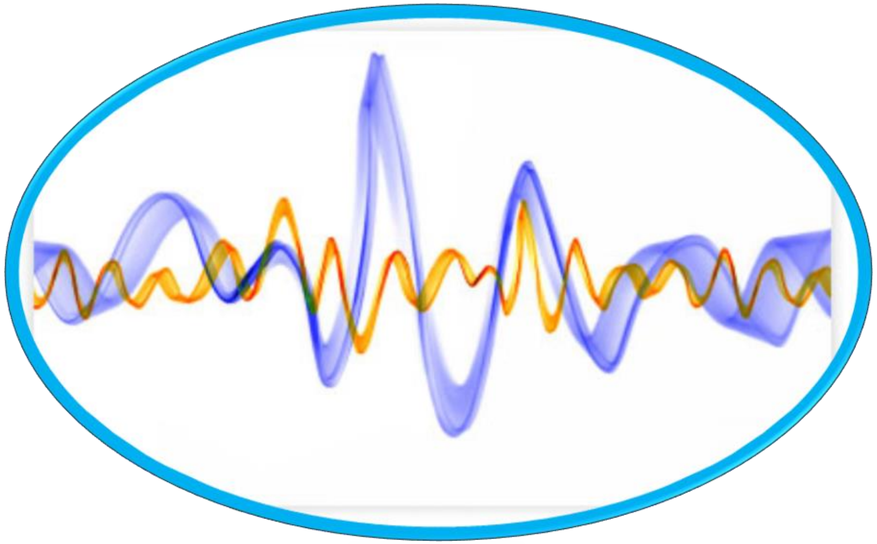
- Άμεση συνέπεια της παραπάνω σχέσης είναι η:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Σύνοψη:

Ιδιότητες συνάρτησης Δέλτα	
Ορισμός	$\delta(t) = 0,\ t \neq 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$
Δειγματοληπτική ιδιότητα	$x(t)\delta(t \pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t \pm t_0)$
Ολοκλήρωση γινομένου	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t \pm t_0)dt = x(\mp t_0)$
Στάθμιση	$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{\|a\|},\quad a \in \Re - \{0\}$
Άρτια συμμετρία	$\delta(-t) = \delta(t)$
Ολοκλήρωση συνάρτησης Δέλτα	$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = u(t)$
Παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\delta(t)x(t)dt = -\frac{d}{dt}x(t)\Big\|_{t=0}$
$n-$οστή παραγώγιση	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\delta(t)x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}x(t)\Big\|_{t=0}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 3261

AM: 3918

AM: 3852

AM: 4000