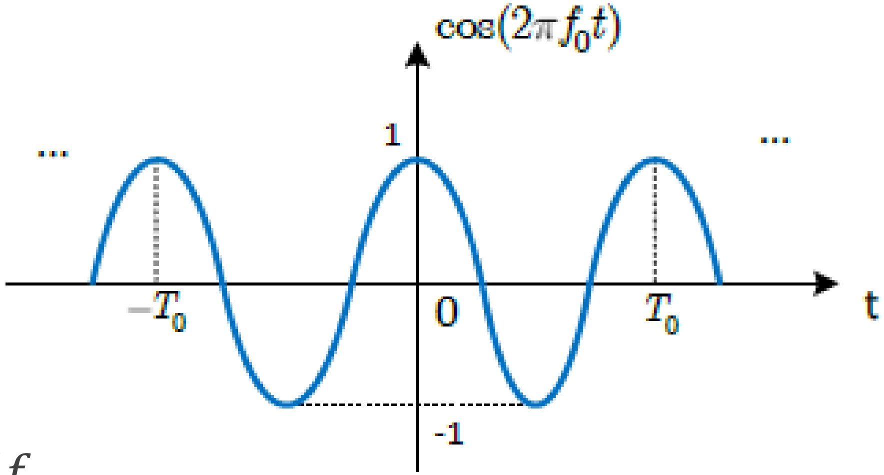
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

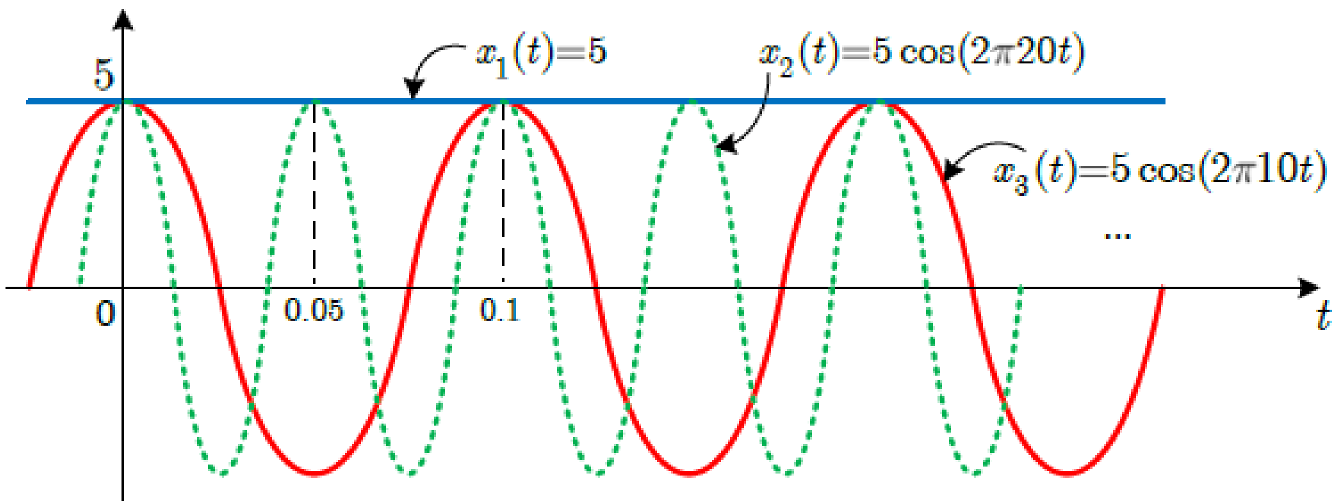
ΔΙΑΛΕΞΗ 2Η

- Ημιτονοειδείς συναρτήσεις

- Στην έννοιες που θα συζητήσουμε στο μάθημα, παίζουν θεμελιώδη ρόλο οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις
- Γενικότερα, μια ημιτονοειδής συνάρτηση ορίζεται ως $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$
- A: **πλάτος ημιτονοειδούς**
- f_0: **συχνότητα ημιτονοειδούς**
- φ: **φάση μετατόπισης ημιτονοειδούς**



- Κάθε απλό ημιτονοειδές είναι **περιοδική** συνάρτηση του χρόνου, με **περίοδο** $T_0 = 1/f_0$



- **Μετατόπιση Φάσης**

- Η φάση μετατόπισης είναι μια τιμή που καθορίζει πόσο έχει μετατοπιστεί το ημιτονοειδές από τη θέση $t = 0$

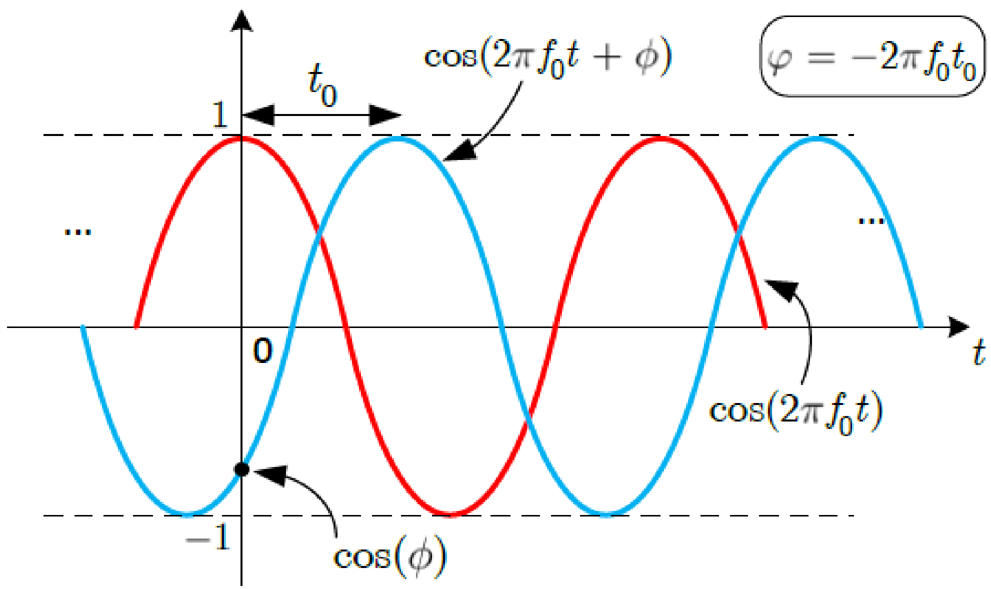
- Αν $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)|_{\varphi=0} = A\cos(2\pi f_0 t)$ το ημιτονοειδές χωρίς μετατόπιση, τότε

$$x_0(t - t_0) = A\cos\big(2\pi f_0(t - t_0)\big) = A\cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Μια μετατόπιση κατά t_0 δεξιά ισούται με φάση μετατόπισης

$$\varphi = -2\pi f_0 t_0 = -\frac{2\pi t_0}{T_0}$$

- Σχηματικά:



- **Άθροισμα Ημιτόνων**
- Είναι ενδιαφέρον να δούμε πως μπορούν να απλοποιηθούν οι πράξεις μεταξύ ημιτόνων όταν περνάμε μέσα από το μιγαδικό χώρο
- Ας υπολογίσουμε το άθροισμα

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t)$$

- Από τις σχέσεις του Euler, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) \\ &= \Re\left\{Ae^{j2\pi f_0 t}\right\} + B\cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \Re\left\{Ae^{j2\pi f_0 t}\right\} + \Re\left\{Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\right\} \\ &= \Re\left\{Ae^{j2\pi f_0 t} + Be^{j(2\pi f_0 t - \pi/2)}\right\} \\ &= \Re\left\{\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \end{aligned}$$

- Όμως: $A + Be^{-\frac{j\pi}{2}} = A - jB = \sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}$, $\varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right)$

- **Άθροισμα Ημιτόνων**
- Άρα

$$x(t) = \Re\left\{\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \Re\left\{\sqrt{A^2 + B^2}e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\}$$

- Από την τελευταία σχέση εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Η παραπάνω διαδικασία γενικεύεται και για N ημίτονα
- Ο μιγαδικός $\left(A + Be^{-j\pi/2}\right)$ ονομάζεται **φάσορας (phasor)**

- **Παράδειγμα:**
  - Λύστε την εξίσωση $A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \cos(2\pi 50 t + \pi) + \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{3}\right)$

$$\mathrm{Re}\{A e^{j\varphi} e^{j2\pi f_0 t}\} = \mathrm{Re}\{e^{j\pi} e^{j2\pi 50 t}\} + \mathrm{Re}\{e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j2\pi 50 t}\}$$

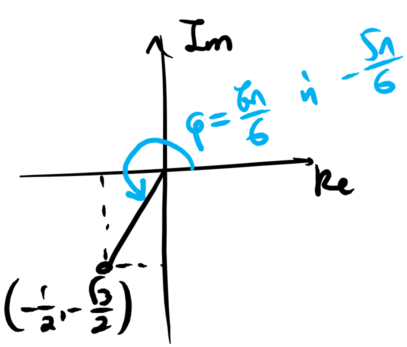
$$\text{—"—} = \mathrm{Re}\{(e^{j\pi} + e^{-j\frac{\pi}{3}}) e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$\text{—"—} = \mathrm{Re}\{(-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} j) e^{j2\pi 50 t}\}$$

$$\text{—"—} = \mathrm{Re}\{(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} j) e^{j2\pi 50 t}\}$$

$f_0 = 50$ Hz

$A e^{j\varphi} = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j) \rightsquigarrow$



Έτσι, $A e^{j\varphi} = 1 \cdot e^{-j\frac{5\pi}{6}}$

άρα $f_0 = 50$ Hz

$A = 1$

$\varphi = -5\pi/6$

- **Παράδειγμα:**
  - Λύστε την εξίσωση $\Re\{\overbrace{(1+j)}^{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}e^{j\theta}\} = -1$

$$Re\{(1+j)e^{j\theta}\} = -1 \iff Re\{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\theta}\} = -1 \iff$$

$$\iff Re\{\sqrt{2}e^{j(\theta+\frac{\pi}{4})}\} = -1 \iff Re\{e^{j(\theta+\frac{\pi}{4})}\} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\iff \cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \implies \theta+\frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$$

Άρα

$$\theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{2}, & k\in\mathbb{Z} \\ 2k\pi - \pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

- **Περιοδικότητα**
- Είδαμε νωρίτερα ότι ένα απλό ημίτονο είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$
- Άραγε το άθροισμα ημιτόνων είναι περιοδικό?
- Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα:
- Έστω $x(t) = \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)\,, \quad f_1 \neq f_2$
- Έστω ότι είναι περιοδικό. Τότε θα ισχύει $x(t) = x(t + T_0)$ για κάποιο $T_0 > 0$
- Άρα

$$\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) = \cos(2\pi f_1 (t + T_0) + \phi_1) + \cos(2\pi f_2 (t + T_0) + \phi_2)$$

- Πρέπει

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 T_0 &= 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_2 T_0 &= 2\pi l, \qquad l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Οπότε

$$\boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{k}{l} = \lambda \acute{o} \gamma o \varsigma\ \alpha \kappa \varepsilon \rho \alpha \iota \omega \nu}$$

- **Παράδειγμα:**

  - Ελέγξτε αν τα παρακάτω αθροίσματα είναι περιοδικά

α) $$x(t) = 2\cos\left(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\sin\left(2\pi \underbrace{250}_{f_2} t - \frac{\pi}{4}\right)$$

b) $$x(t) = \cos\left(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sin\left(\underbrace{400}_{f_2} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

α) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{250}$ ✓ λόγος ακεραίων

b) $\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{\frac{200}{\pi}} = \frac{100\pi}{200} = \frac{\pi}{2}$ ✗ όχι λόγος ακεραίων

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ