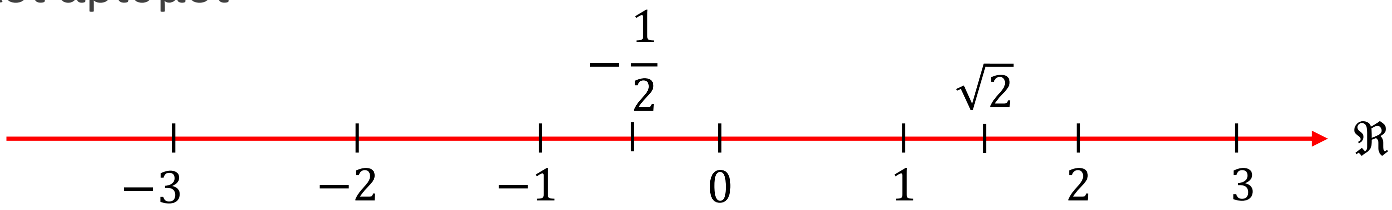
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 1Η

- Εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς

- Πραγματικοί αριθμοί



- Λύσεις εξισώσεων:

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \in \Re$$

- Κάποιες εξισώσεις δεν έχουν λύση στο $\Re$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \ldots ?$$

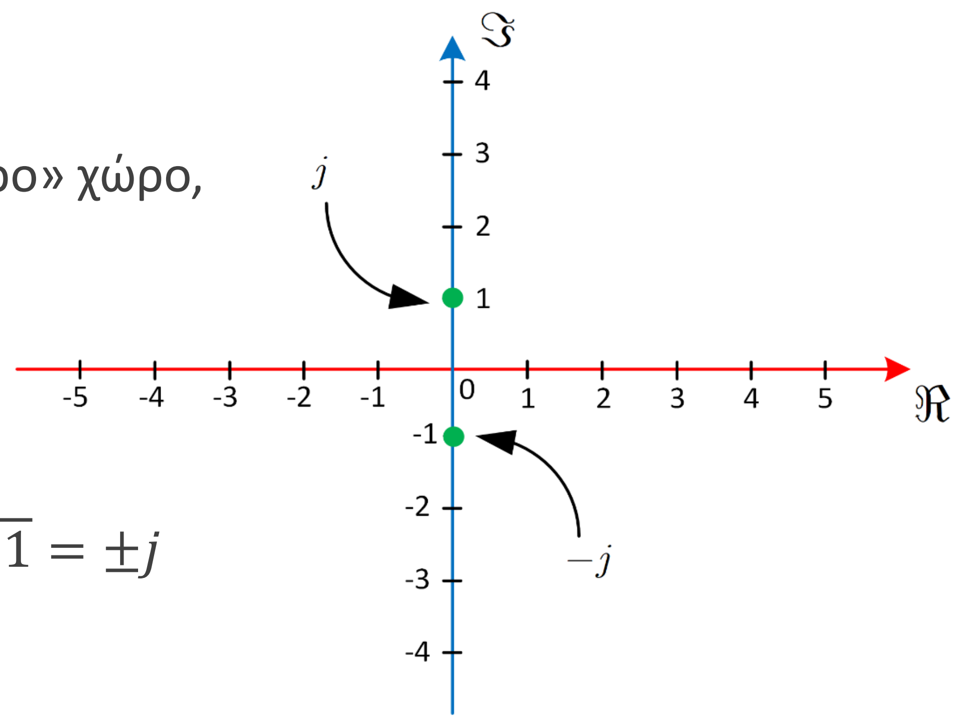
- Μπορούν να έχουν λύση σε ένα «ευρύτερο» χώρο, που περιλαμβάνει τον πραγματικό άξονα

- Ο χώρος αυτός λέγεται χώρος των ***μιγαδικών αριθμών* - $\mathbb{C}$**

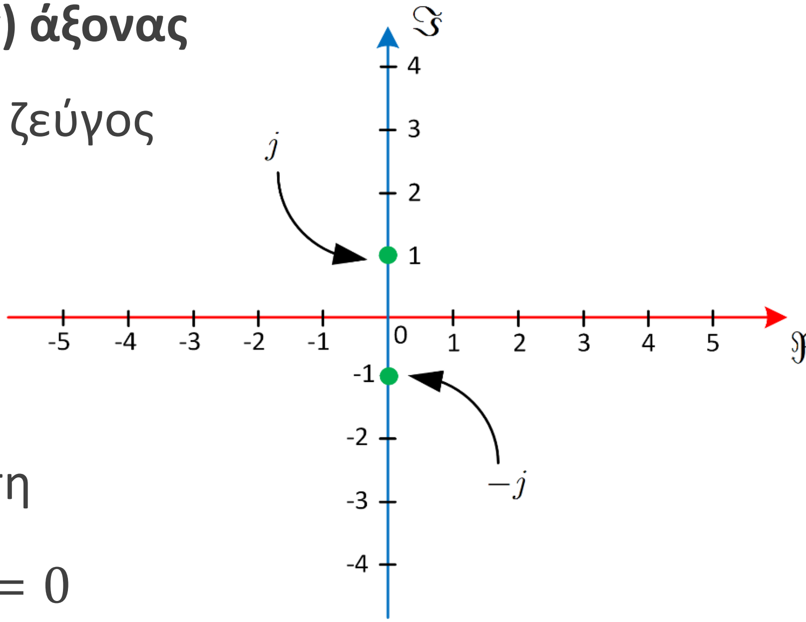
- Λύση:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} = \pm j$$

με $\sqrt{-1} = j$ τη **φανταστική μονάδα**



- Οι άξονες που συντελούν στη δημιουργία του μιγαδικού επιπέδου ονομάζονται **πραγματικός (real) και φανταστικός (imaginary) άξονας**



- Κάθε σημείο αυτού του επιπέδου αποτελεί ένα ζεύγος αριθμών (x, y)

- Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο σημείο αυτό γράφεται ως $z = x + jy$ και ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός (complex number)**

- Ας δούμε μια εύκολη εφαρμογή: έστω η εξίσωση

$$ax^2 + bx + c = 0$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

○ Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης

- Όλα τα παραπάνω στο χώρο των πραγματικών αριθμών!

- Αν λύσουμε την εξίσωση στο χώρο των μιγαδικών αριθμών τότε το πράγμα αλλάζει! Ας δούμε πως:

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ υπάρχει μια διπλή ρίζα

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

- Αν $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ υπάρχουν δυο διαφορετικές (**μιγαδικές**) ρίζες μεταξύ τους

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} = \frac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Οπότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες

$$x_1 = \frac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

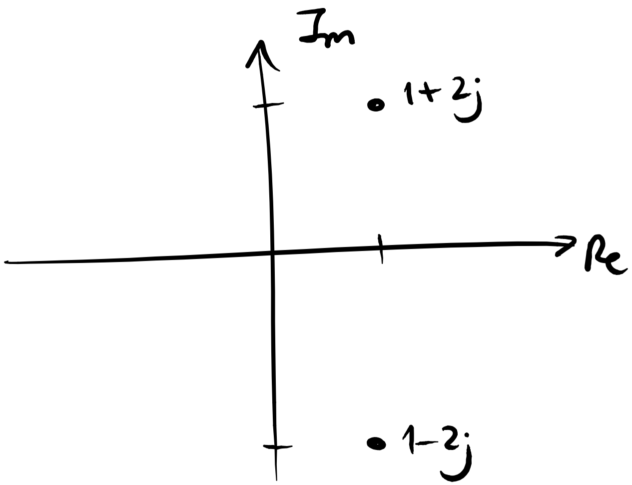
$$x_2 = \frac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

- Παράδειγμα:
    - Βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x + 5 \longrightarrow ax^2 + \beta x + \gamma = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm j\sqrt{16}}{2}$$

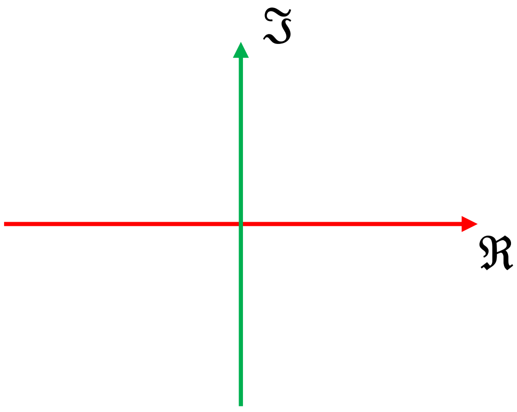
$$= \frac{2 \pm j4}{2} \quad \begin{aligned} &\nearrow x_1 = 1 + 2j \\ &\searrow x_2 = 1 - 2j \end{aligned}$$



- Η μορφή $z = x + jy$ ενός μιγαδικού αριθμού ονομάζεται

καρτεσιανή

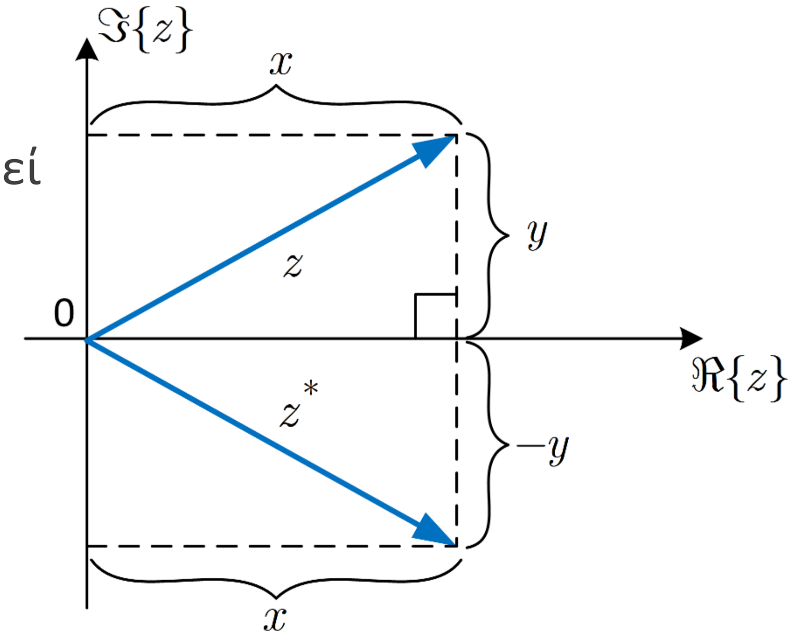
- Ορολογία:



  - x: τετμημένη : *πραγματικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού
$$x = \Re\{z\}$$
  - y: τεταγμένη : *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού
$$y = \Im\{z\}$$

- Άρα
$$z = x + jy = \Re\{z\} + j\Im\{z\}$$

- Ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα **διάνυσμα** που ξεκινά από το $(0,0)$ και καταλήγει στις συντεταγμένες (x, y)



- **Συζυγής** (conjugate) ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$
$$z^* = x - jy = \Re\{z\} - j\Im\{z\}$$

Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Καρτεσιανή Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = x + jy$	
	$z_2 = u + jv$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = (ax + bu) + j(ay + bv)$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = (ax - bu) + j(ay - bv)$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = (xu - yv) + j(yu + xv)$	
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \left(\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}\right) + j\left(\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\right)$	
Συζυγία	$z_1^* = x - jy$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\}$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\}$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = x^2 + y^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + j\frac{2xy}{x^2 + y^2}$	
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$	★
	$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$	★
	$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$	
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\Re\{z_1\} = \Re\{z_2\}$ και $\Im\{z_1\} = \Im\{z_2\}$	★
$z \in \Re$	$z = z^*$	★
$z \in \Im$	$z = -z^*$	★

- Έχει αποδειχθεί ότι:
- Ένα πολυώνυμο βαθμού N έχει γενικά N ρίζες (πραγματικές ή/και μιγαδικές). Αν οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι όποιες μιγαδικές ρίζες υπάρχουν θα «έρχονται» πάντα σε συζυγή ζεύγη!
  - Το είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα
- Π.χ.

$$(z+j)(z-j) = z^2 + 1$$

$$\big(z+(2+j)\big)\big(z+(2-j)\big) = z^2 + 4z + 5$$

$$\left(z+\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)\left(z+\left(-1-\sqrt{2}\right)\right) = z^2 + 2z + 3$$

$$(z+j)(z+1) = z^2 + {\color{red}(1+j)}z + {\color{red}j}$$

- **Μέτρο** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται το μήκος του διανύσματος που τον αναπαριστά στο μιγαδικό επίπεδο
  - Αλλιώς, μέτρο ονομάζεται η ευκλείδεια απόσταση του μιγαδικού αριθμού από την αρχή των αξόνων

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Φάση** μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ονομάζεται η γωνία φ που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα (των πραγματικών αριθμών) κατά την ορθή μαθηματική φορά
  - Συμβολίζεται και ως $\arg(z)$ ή $\angle z$

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ \alpha\pi\rho o\sigma\delta\iota \acute{o}\rho\iota\sigma\tau o, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

- Αντί της καρτεσιανής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια άλλη μορφή, την **πολική**
- Η πολική μορφή χρησιμοποιεί την έννοια του μέτρου και της φάσης που είδαμε
- Από απλή τριγωνομετρία στο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:

$$z = x + jy = \rho\cos\varphi + j\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

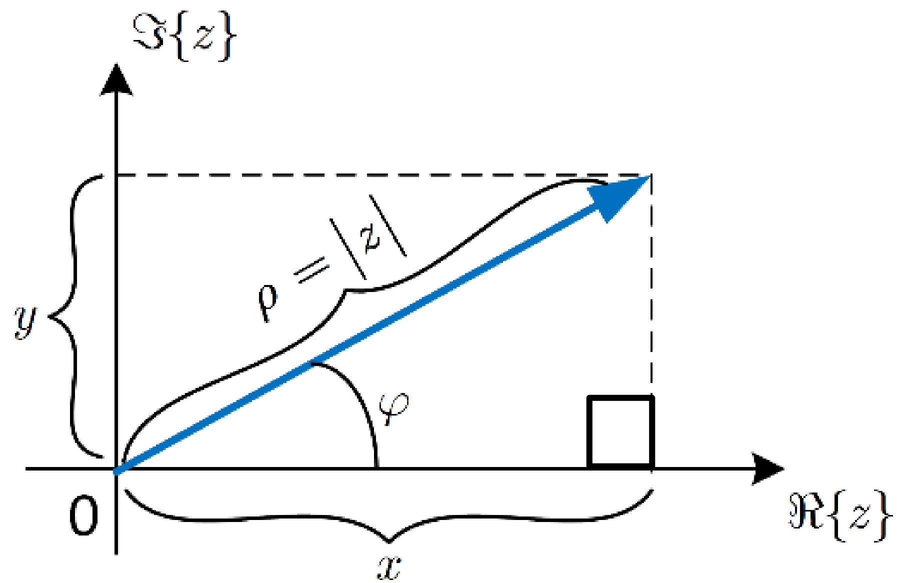
- Η παραπάνω πολική μορφή μπορεί να απλοποιηθεί μέσω **των σχέσεων του Euler**
- Σχέση του Euler:

$$\boldsymbol{e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)}$$

- Άμεσες συνέπειες της παραπάνω σχέσης:

$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}}$$



- Μεγάλης σπουδαιότητας σχέσεις!

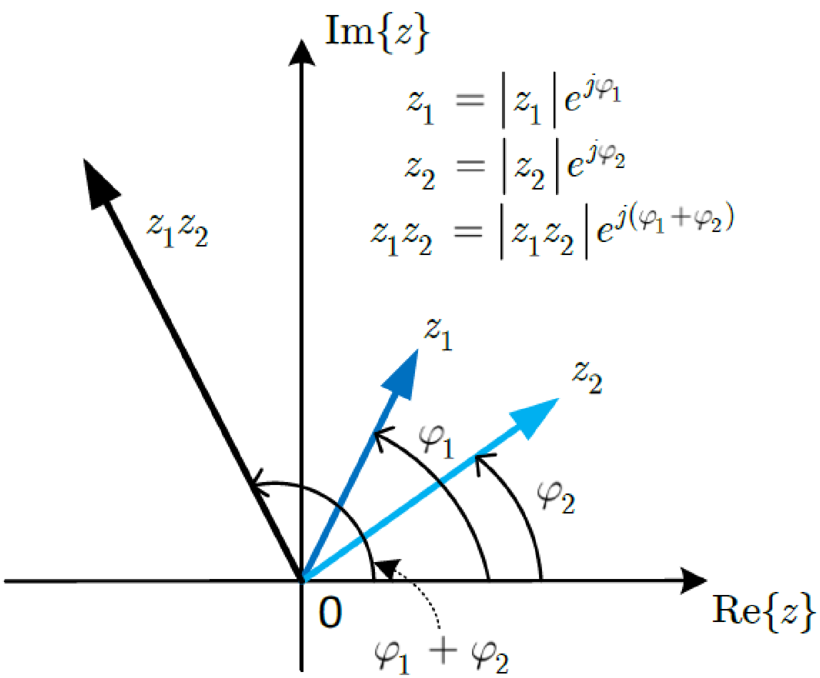
- Η πολική μορφή γράφεται ως:

$$z = x + jy = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

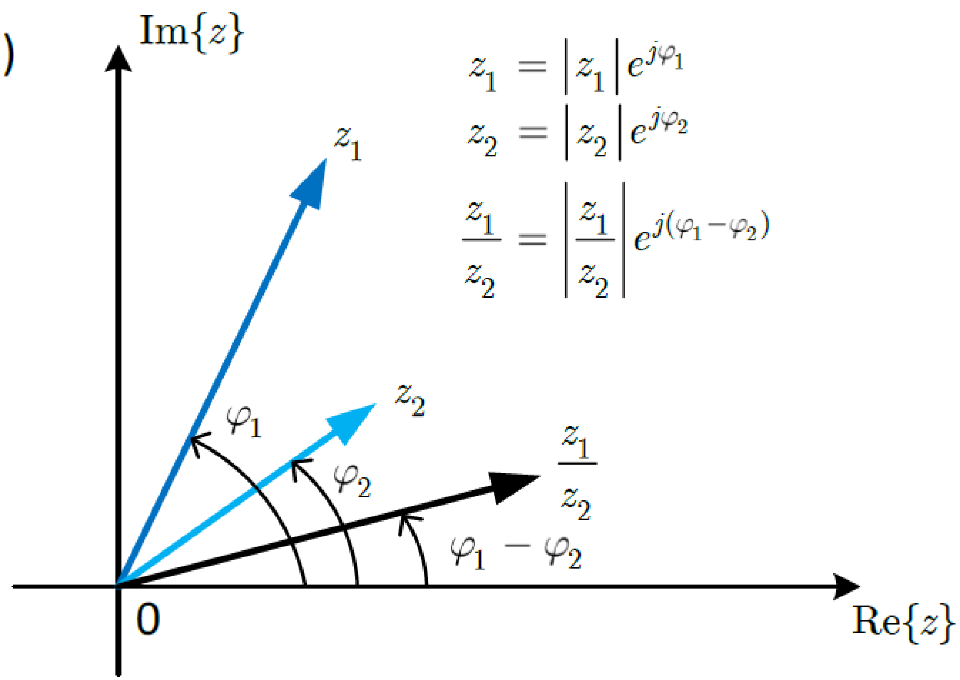
με $|z|, \varphi$ όπως τα περιγράψαμε νωρίτερα

- Η πολική μορφή είναι πολύ χρήσιμη όταν έχουμε να κάνουμε με τις πράξεις του **γινομένου** και της **διαίρεσης** μεταξύ μιγαδικών αριθμών

- Αντίθετα, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ βολική για τις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**



(β)



Ιδιότητες Μιγαδικών Αριθμών - Πολική Μορφή

Ιδιότητα	Μαθηματική περιγραφή	
	$z_1 = \rho_1 e^{j\phi_1},\ \rho_1 > 0$	
	$z_2 = \rho_2 e^{j\phi_2},\ \rho_2 > 0$	
Άθροισμα	$az_1 + bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} + \rho_2 e^{j\phi_2}$	
Διαφορά	$az_1 - bz_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} - \rho_2 e^{j\phi_2}$	
Πολλαπλασιασμός	$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\phi_1} \rho_2 e^{j\phi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}$	★
Διαίρεση	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_2 e^{j\phi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Συζυγία	$z_1^* = \rho e^{-j\phi_1}$	★
Άθροισμα συζυγών	$z_1 + z_1^* = 2\Re\{z_1\} = 2\rho\cos(\phi_1)$	★
Διαφορά συζυγών	$z_1 - z_1^* = 2j\Im\{z_1\} = 2j\rho\sin(\phi_1)$	★
Γινόμενο συζυγών	$z_1 z_1^* = \rho_1 \rho_1 e^{j\phi_1} e^{-j\phi_1} = \rho_1^2 = \|z_1\|^2$	★
Πηλίκο συζυγών	$\frac{z_1}{z_1^*} = \frac{\rho_1 e^{j\phi_1}}{\rho_1 e^{-j\phi_1}} = e^{j2\phi_1}$	★
Ιδιότητες συζυγίας	$(z_1 + z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} + \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 - z_2)^* = \rho_1 e^{-j\phi_1} - \rho_2 e^{-j\phi_2}$	
	$(z_1 z_2)^* = \rho_1 \rho_2 e^{-j(\phi_1+\phi_2)}$	★
	$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{-j(\phi_1-\phi_2)}$	★
Αμοιβαιότητα	$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\rho_1 e^{j\phi_1}} = \frac{1}{\rho_1} e^{-j\phi_1}$	★
Ισότητα	$z_1 = z_2$ αν και μόνο αν $\|\rho_1\| = \|\rho_2\|$ και $\phi_1 = \phi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	★

- Κάποιες πολικές μορφές εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη
- Ας τις δούμε

$z = x + jy$ καρτεσιανή

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$\Rightarrow z = |z| \cdot e^{j\varphi}$ πολική

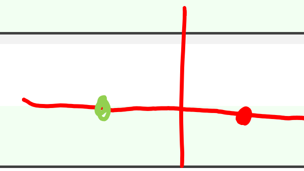
Euler: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

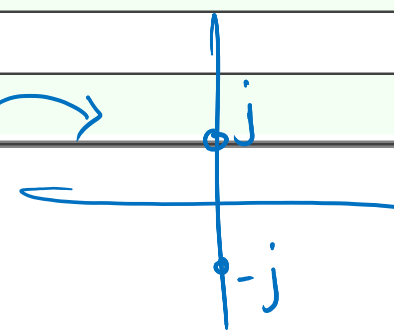
$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi}+e^{-j\varphi}}{2}$

$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi}-e^{-j\varphi}}{2j}$

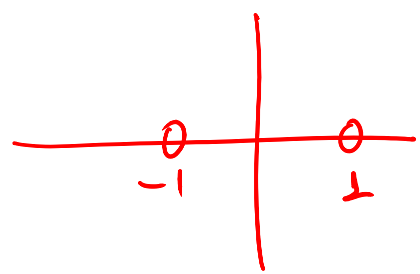
Συνήθεις πολικές μορφές

Φάση ϕ	Πολική μορφή
0	$e^{j0} = 1$
$\pm\pi$	$e^{\pm j\pi} = -1$
$\pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm jk\pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1, & k \text{ άρτιος} \\ -1, & k \text{ περιττός} \end{cases}$
$\pm 2\pi$	$e^{\pm j2\pi} = 1$
$\pm 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$e^{\pm j2k\pi} = 1$
$\pm\frac{\pi}{2}$	$e^{\pm j\pi/2} = \pm j$





$(e^{\pm j\pi})^k = (-1)^k$



- **Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών**
- Για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών, η καρτεσιανή μορφή είναι πολύ χρονοβόρα

$5 + j0 = 5 \cdot e^{j(0+2k\pi)}$

- Με πολική μορφή:

$$z^n = \left(|z|e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi))$$

- Η μορφή αυτή ονομάζεται **σχέση του De Moivre**
- Με βάση την παραπάνω σχέση μπορούμε εύκολα να βρίσκουμε λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$\boxed{z^N - a = 0,} \qquad a = |a|e^{j\theta} \in \mathbb{C}, \qquad N \in \mathbb{N}$$

- Ας δούμε πως

$$z^N = a \iff |z|^N e^{jN\varphi} = |a|e^{j(\theta+2\pi k)} \iff z := \begin{cases} |z| = |a|^{\frac{1}{N}} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2\pi k}{N}, \quad k = 0,1,\ldots,N-1 \end{cases}$$

$z^N = a = |a| \cdot e^{j\theta} \Rightarrow$

$(|z| \cdot e^{j\varphi})^N = |a| \cdot e^{j\theta} \Rightarrow$

$\Rightarrow |z|^N \cdot e^{jN\varphi} = |a| \cdot e^{j\theta}$

$|z|^N = |a|$

$N\varphi = \theta + 2\pi k$

- Παράδειγμα:

○ Βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^3 - 8 = 0$

$$\boxed{z^3 = 8} \Leftrightarrow (\rho e^{j\theta})^3 = 8e^{j2k\pi} \Leftrightarrow \boxed{\rho^3 e^{j3\theta} = 8e^{j2k\pi}}$$

Άρα

$$\rho^3 = 8 \Rightarrow \rho = 2$$

$$3\theta = 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_k = 2 \cdot e^{j\frac{2k\pi}{3}}$$

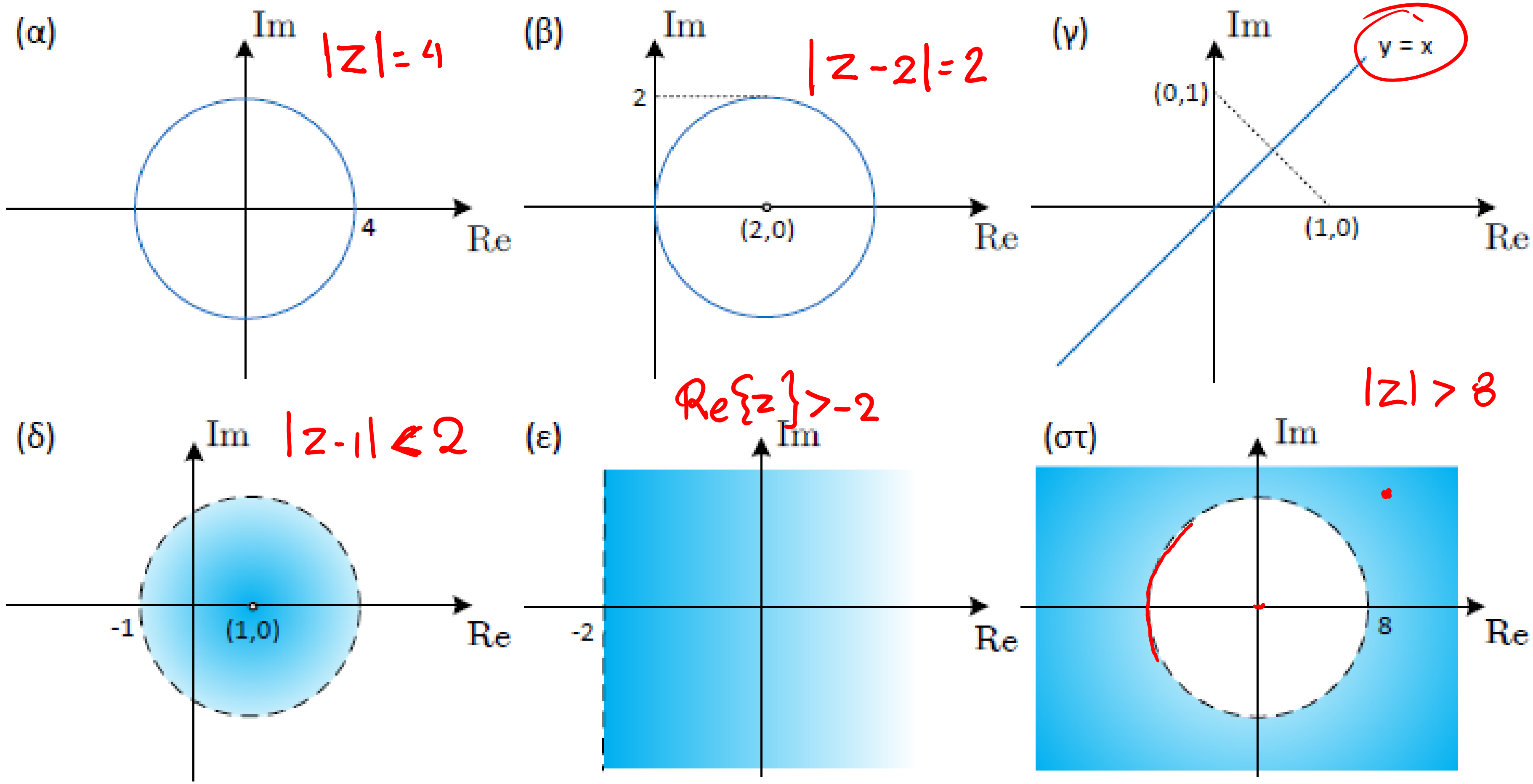
$$k = 0, 1, 2$$

δηλ.

$$z_1 = 2, \quad \boxed{z_2 = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}}, \quad z_3 = 2e^{j\frac{4\pi}{3}} = 2e^{j\left(\frac{6\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \boxed{z_2^*}$$

- **Γεωμετρικοί Τόποι**

- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου της οποίας οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν μια συγκεκριμένη (γεωμετρική, πολλές φορές) ιδιότητα ονομάζεται γεωμετρικός τόπος



- Παράδειγμα:

○ Βρείτε τους γεωμετρικούς τόπους που περιγράφονται από τις εξισώσεις:

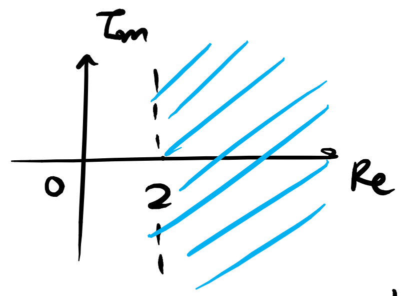
a) $\Re\{z\} > 2$

b) $|z - (4 - j7)| = 2$

c) $\arg(z + 1) = \frac{\pi}{3}$

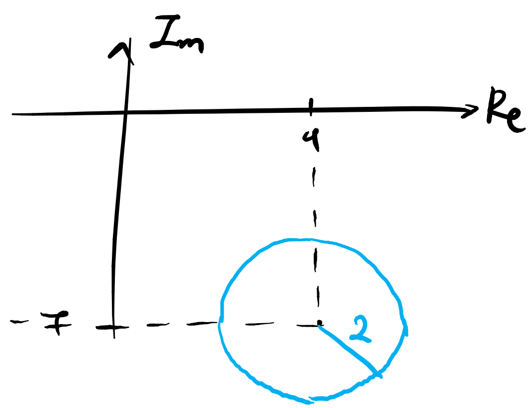
$z = x + jy$

α) $Re\{z\} > 2 \Leftrightarrow x > 2$



b) $|z-(4-j7)| = 2 \Leftrightarrow |z-(4-j7)|^2 = 4 \Leftrightarrow |(x-4)+j(7+y)|^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+7)^2 = 4 = 2^2$

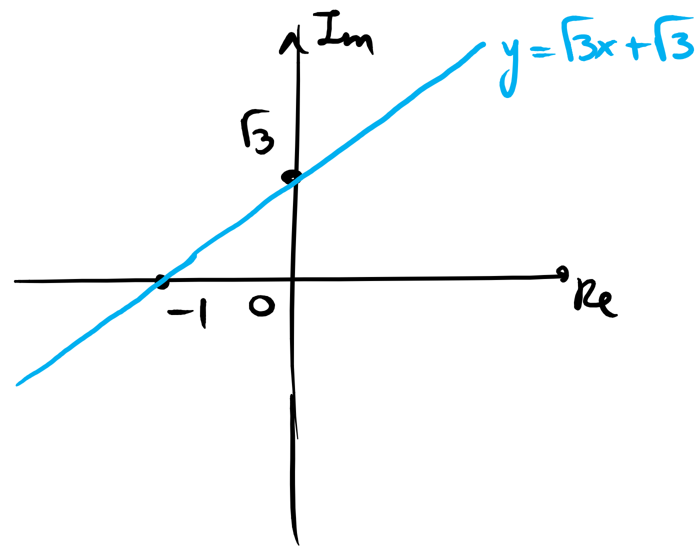


- Παράδειγμα:

c) $\arg(z+1)=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(\overbrace{x+jy}^{z}+1)=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(\overset{R}{(x+1)}+j\overset{I}{y})=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^{-1}\frac{y}{x+1}=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{y}{x+1}=\boxed{\tan\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{y}{x+1}=\sqrt{3} \Leftrightarrow$

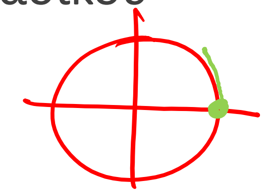
$\Leftrightarrow y=\sqrt{3}(x+1) \Leftrightarrow y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$



- **Μιγαδικές Συναρτήσεις**

$f(z) = z^3 - 8$

- Οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν ως πεδίο ορισμού ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου και πεδίο τιμών μιγαδικούς (εν γένει) αριθμούς



- Μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι (εν γένει) τεσσάρων διαστάσεων
- Μπορούμε όμως να σχεδιάζουμε το μέτρο και τη φάση της, ή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της
- Οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, και της παραγωγισιμότητας έχουν αρκετές ομοιότητες αλλά και διαφορές με αυτές που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις
- Μια εκτενής παρουσίαση είναι εκτός σκοπού
  - Θα αντιμετωπίσουμε τις (όποιες) μιγαδικές συναρτήσεις όταν τις συναντήσουμε

- Θα μας απασχολήσουν περισσότερο **συναρτήσεις του χρόνου** $\boldsymbol{t}$ οι οποίες (μερικές φορές) θα παίρνουν **μιγαδικές τιμές**
- Ας δούμε μια τέτοια απλή και ΠΟΛΥ σημαντική συνάρτηση **του χρόνου** $\boldsymbol{t}$
- Τη συνάρτηση

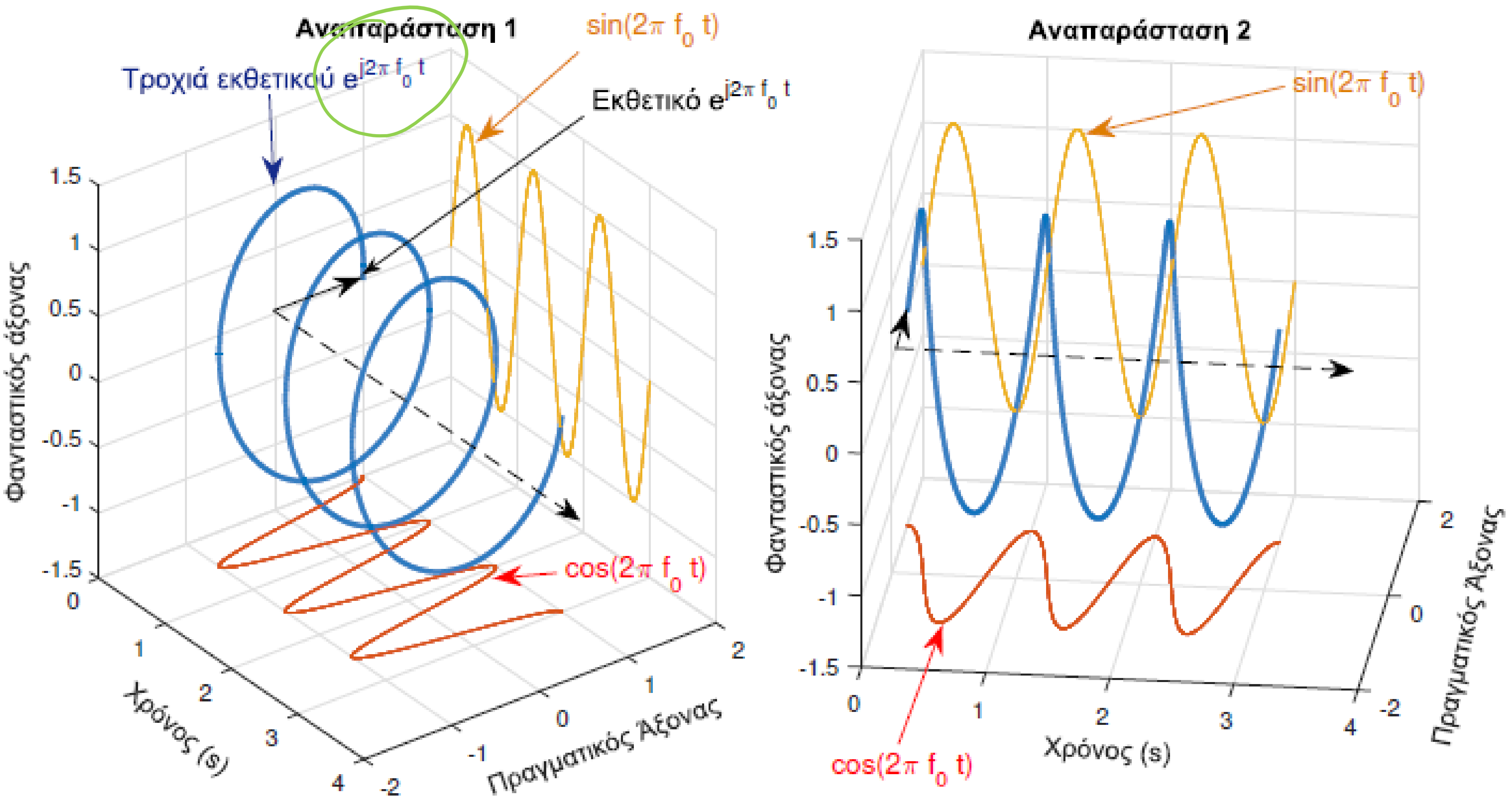
$$\boxed{x(t) = e^{j2\pi f_0 t}} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$$

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**
- Η συνάρτηση αυτή είναι μια συνάρτηση του χρόνου η οποία παίρνει μιγαδικές τιμές!
- Άρα για τη σχεδίασή της χρειαζόμαστε έναν άξονα t
- Επίσης, θέλουμε ένα μιγαδικό «χώρο» για να βάζουμε τις τιμές της, π.χ. $x(0), x(1), \ldots$
- Για κάθε χρονική στιγμή t_0, η συνάρτηση θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα σταθερού μοναδιαίου μήκους…
  - …αφού $\left|e^{j\theta(t)}\right| = |\cos\theta(t) + j\sin\theta(t)| = \sqrt{\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta\,(t)} = 1\ldots$

το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα του χρόνου σε σπειροειδή τροχιά

- Η περιστροφή γίνεται με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 2\pi f_0$ ή με συχνότητα f_0 Hz
- Ας δούμε πως μοιάζει μια τέτοια συνάρτηση…

- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**



- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**

- Θα παρατηρήσατε ότι η προβολή της συνάρτησης στο επίπεδο (χρόνος, πραγματικός άξονας) αποτελεί ένα συνημίτονο!

- Αντίθετα, η προβολή στο επίπεδο (χρόνος, φανταστικός άξονας) «σχηματίζει» ένα ημίτονο!

- Αυτό είναι συνεπές με τη σχέση του Euler:

$$\Re\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t}$$

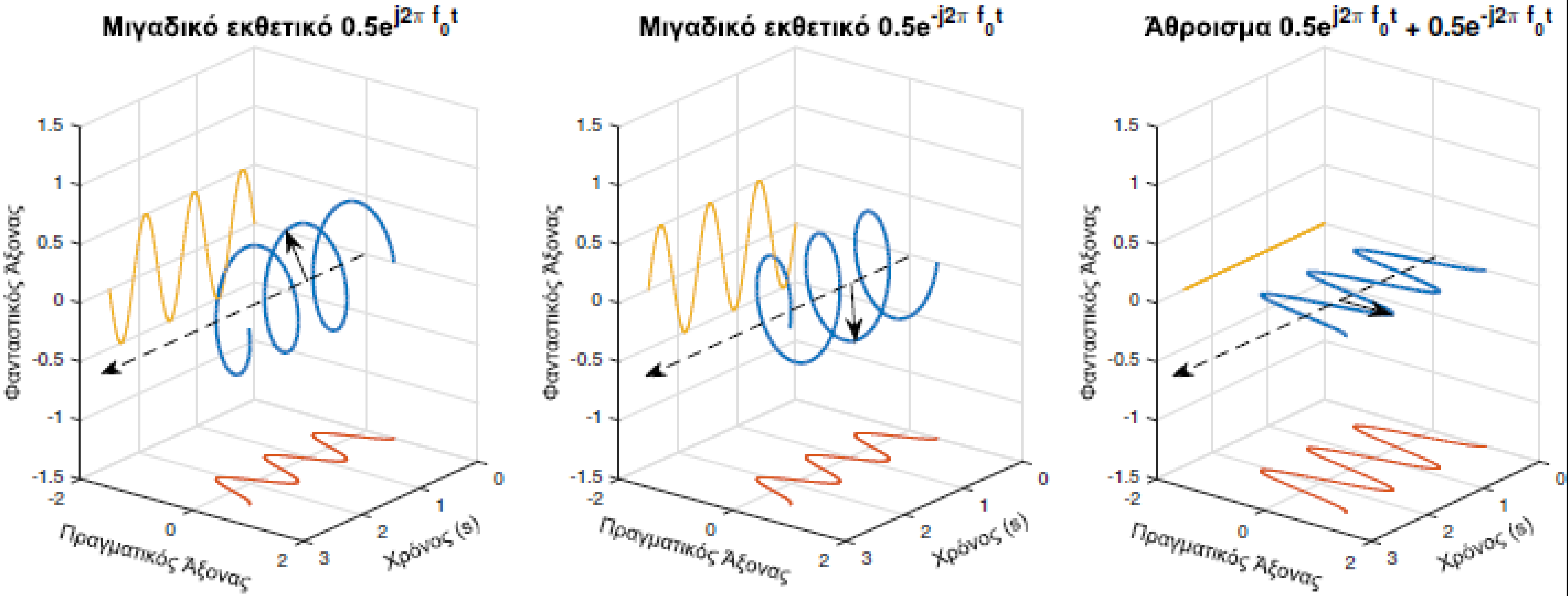
$= z + z^*$

$$\Im\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \sin 2\pi f_0 t = \frac{1}{2j}e^{j2\pi f_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j2\pi f_0 t}$$

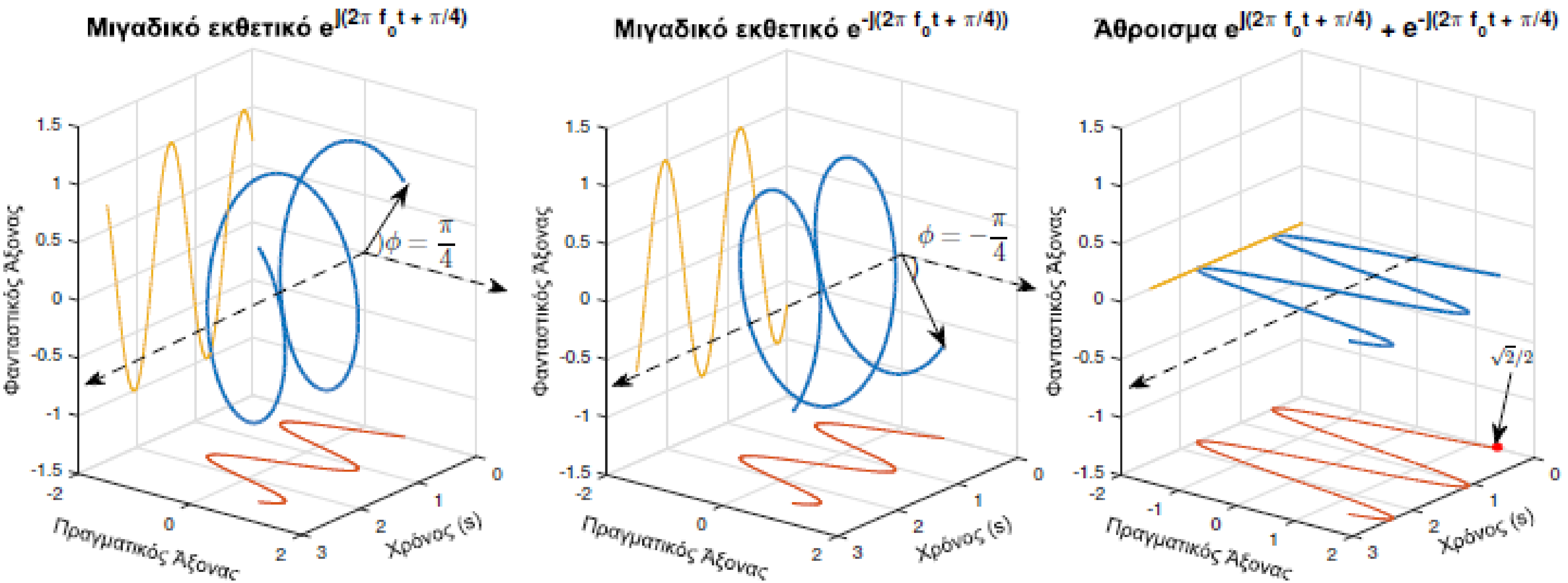
- Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπετε ότι το άθροισμα δυο συζυγών εκθετικών συναρτήσεων δίνει μια πραγματική συνάρτηση!

- Ας το δούμε αυτό οπτικά…

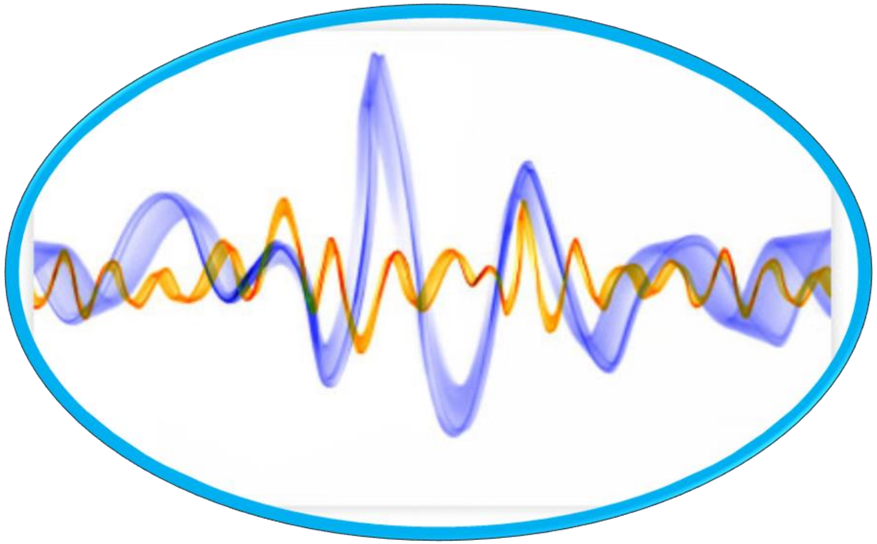
- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$**



- **Η συνάρτηση $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t+\varphi)}$**



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ



E.BA.

AM: 4000