HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

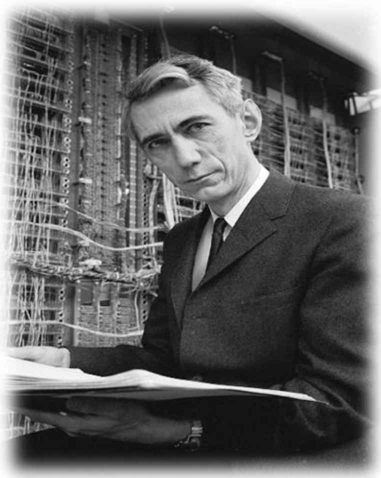
ΔΙΑΛΕΞΗ 23Η

- Δειγματοληψία

- **Δειγματοληψία (review…)**

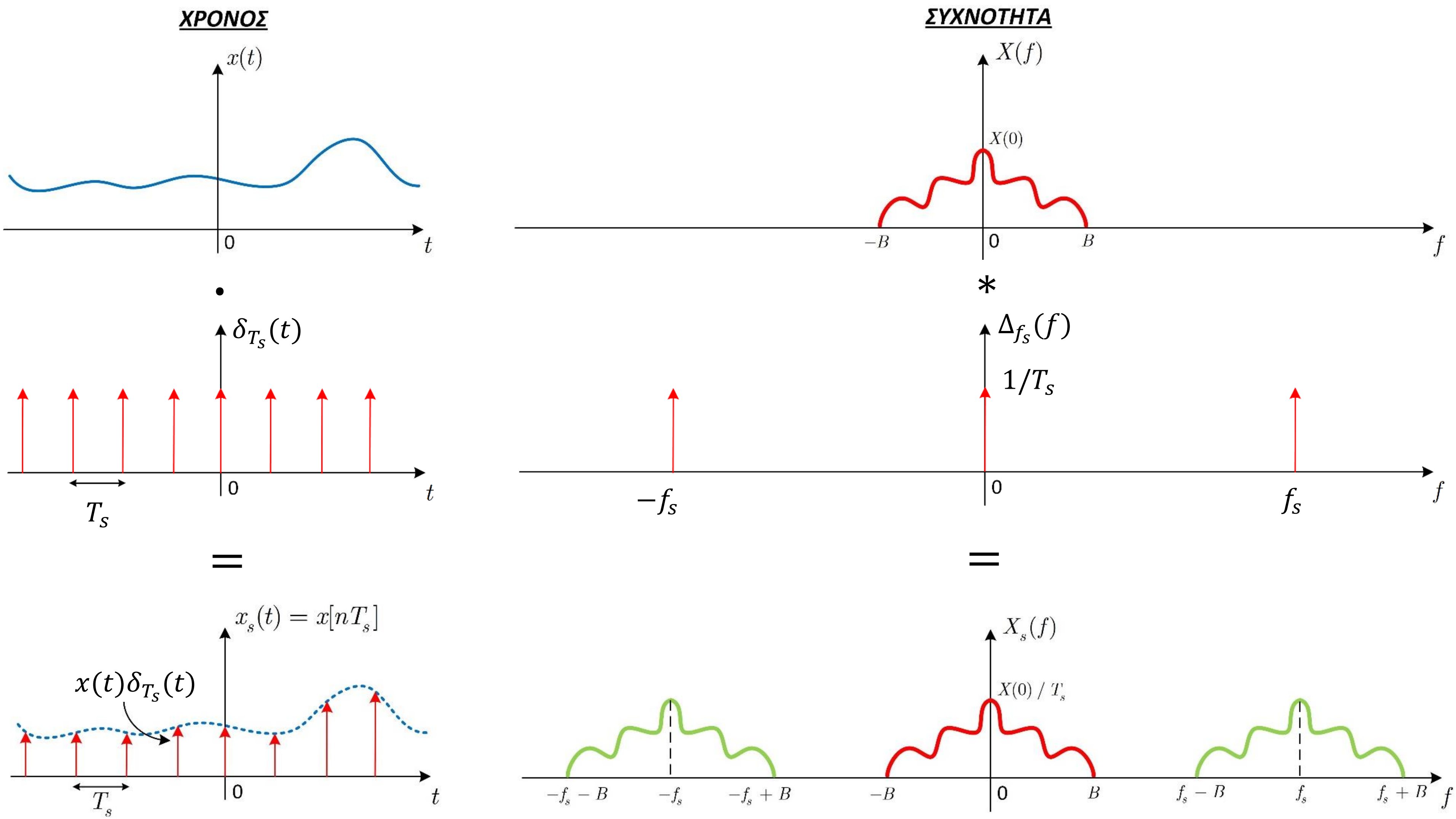
- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα - samples*) ενός σήματος συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?

- **Απάντηση**: Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)



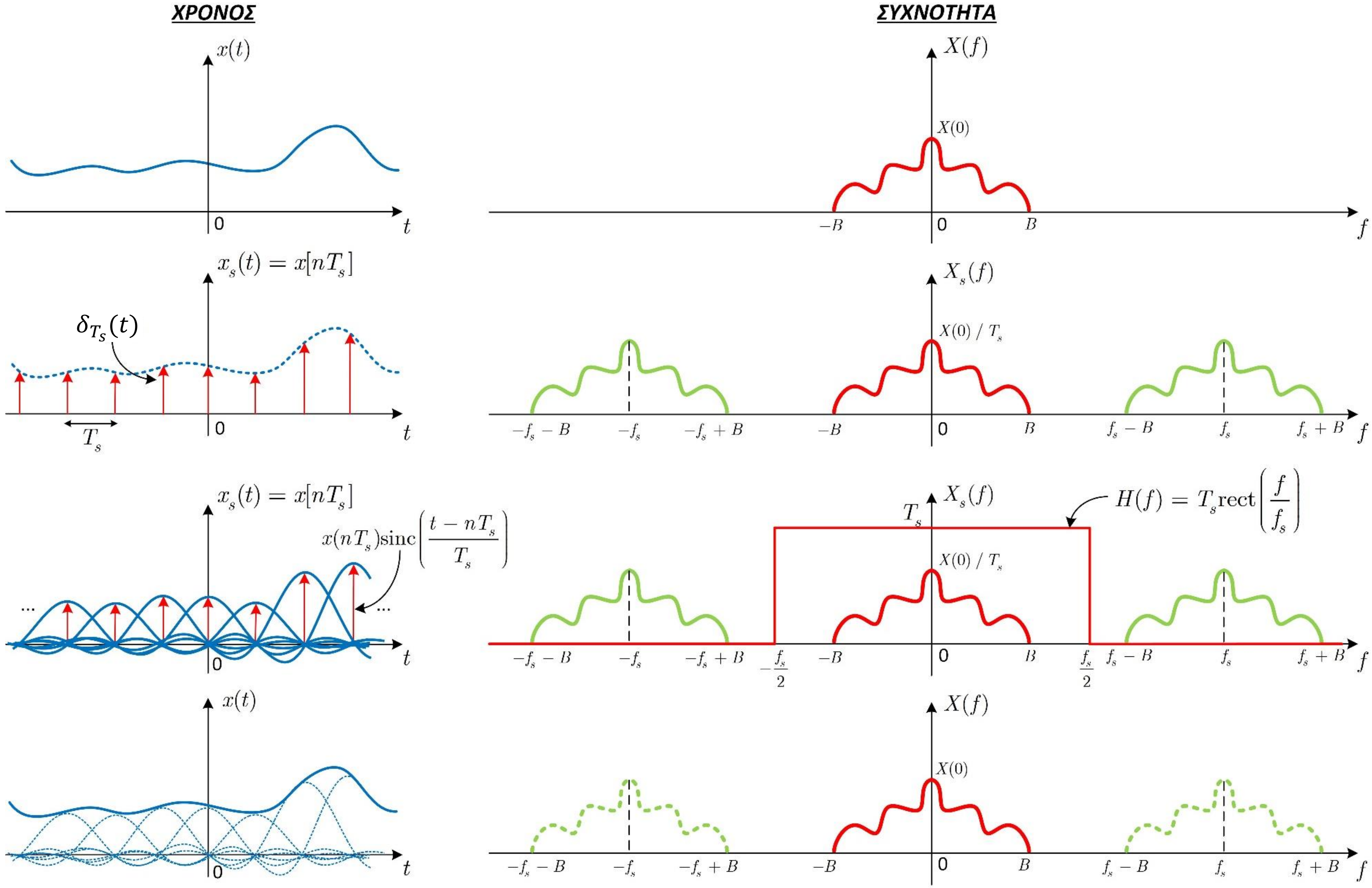
- Ας δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό…

• Δειγματοληψία (review...)



• Δειγματοληψία και Ανακατασκευή (review…)

• Συγκεντρωτικά:



• Δειγματοληψία (review…)

Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα (μη-μηδενικού πλάτους) $\mathbf{B}$ Hz, μπορεί να ανακτηθεί *ακριβώς* από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας

$$\mathbf{f_s > 2B}, \tag{9.1}$$

δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας

$$\mathbf{T_s < \frac{1}{2B}} \tag{9.2}$$

Η συνθήκη:

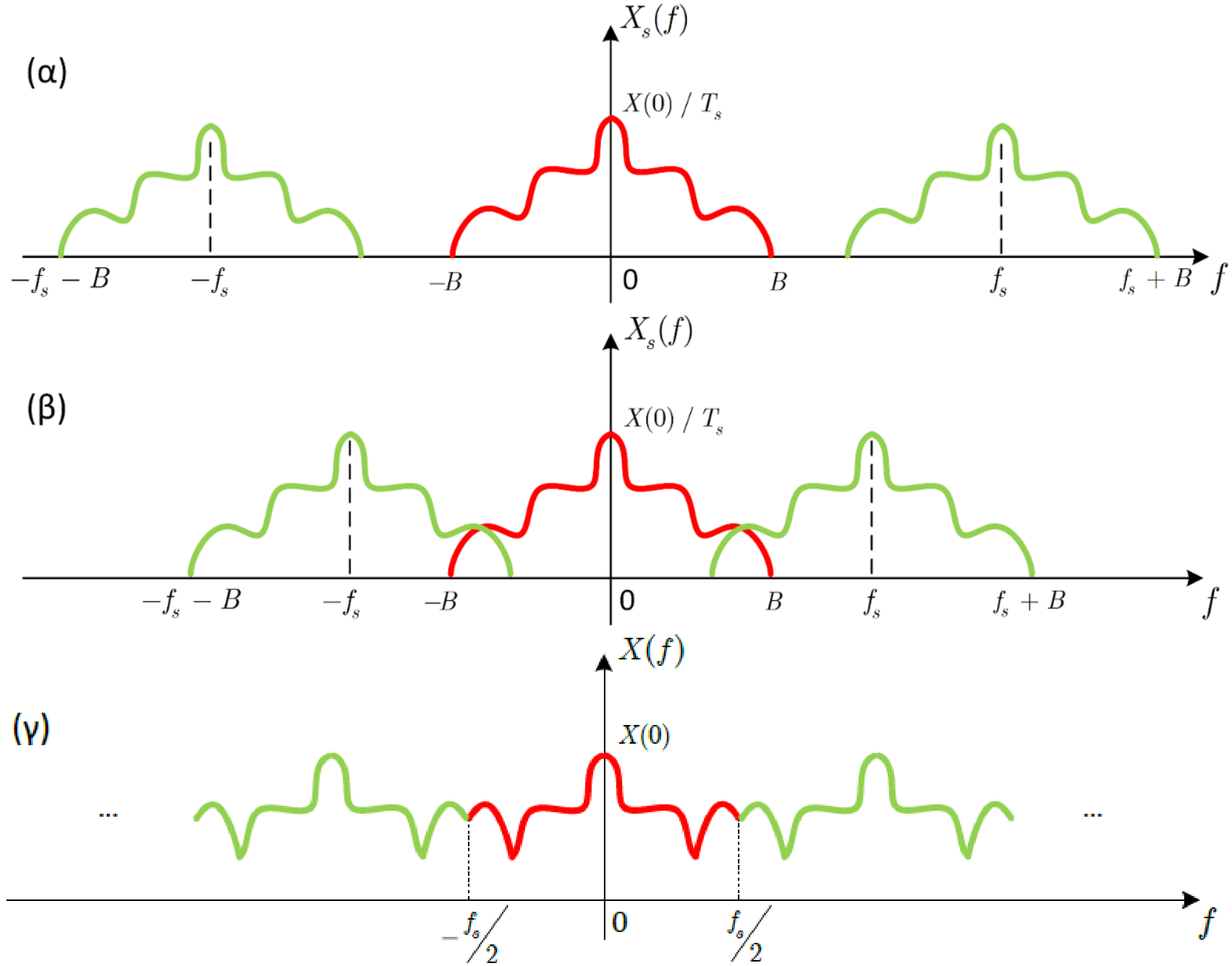
$$\mathbf{f_s > 2B} \left(\text{ή } \mathbf{T_s < \frac{1}{2B}} \right) \tag{9.3}$$

λέγεται *συνθήκη του Shannon*. Η μέγιστη συχνότητα $\mathbf{B}$ συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως $\mathbf{f_{max}}$ και λέγεται *συχνότητα Nyquist*,
ενώ η ελάχιστη συχνότητα $\mathbf{2B}$ ~~για την οποία πληρείται η~~ συνθήκη του Shannon λέγεται *ρυθμός Nyquist*.

η οποία εμπλέκεται στη

• Δειγματοληψία – Aliasing (review...)

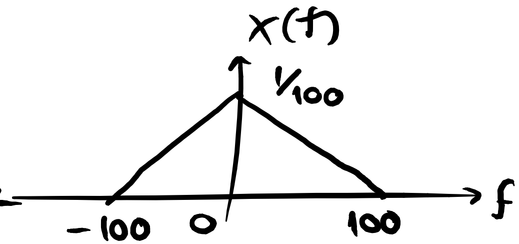
- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
  - **Ψευδωνυμία** ή **Αναδίπλωση** (in Greek)



- **Δειγματοληψία** $\quad \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}(fT)$, $\quad \mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$
- Παράδειγμα: $\quad T\,\mathrm{sinc}(tT) \xleftrightarrow{F} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$, $\quad T\,\mathrm{sinc}^2(Tt) \xleftrightarrow{F} \mathrm{tri}\left(\frac{f}{T}\right)$
  - Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα σήματα

(α′) $\mathrm{sinc}^2(100t)$ (β′) $\frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t)$ (γ′) $\mathrm{sinc}(100t) + 3\mathrm{sinc}^2(60t)$ (δ′) $\mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

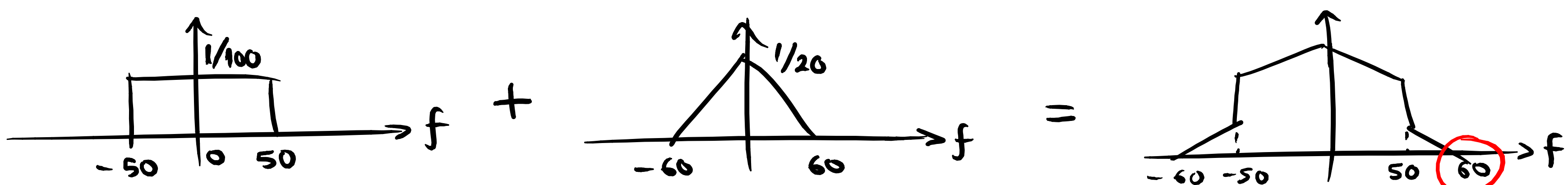
α) $x(t) = \mathrm{sinc}^2(100t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{100}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{100}\right)$



Άρα $f_{max} = 100$ Hz $\rightarrow$ ρυθμός Nyquist $= 200$ Hz

β) $x(t) = \frac{1}{100}\mathrm{sinc}^2(100t)$, επειδή το $\frac{1}{100}$ δεν αλλάζει το διάστημα που ο Μ.F. είναι μη-μηδενικός, έχουμε Ρυθμό Nyquist $= 200$ Hz

γ) $x(t) = \mathrm{sinc}(100t) + 3\,\mathrm{sinc}^2(60t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{100}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) + \frac{3}{60}\mathrm{tri}\left(\frac{f}{60}\right)$



Είναι $f_{max} = 60$ Hz, άρα Ρυθμός Nyquist $= 120$ Hz

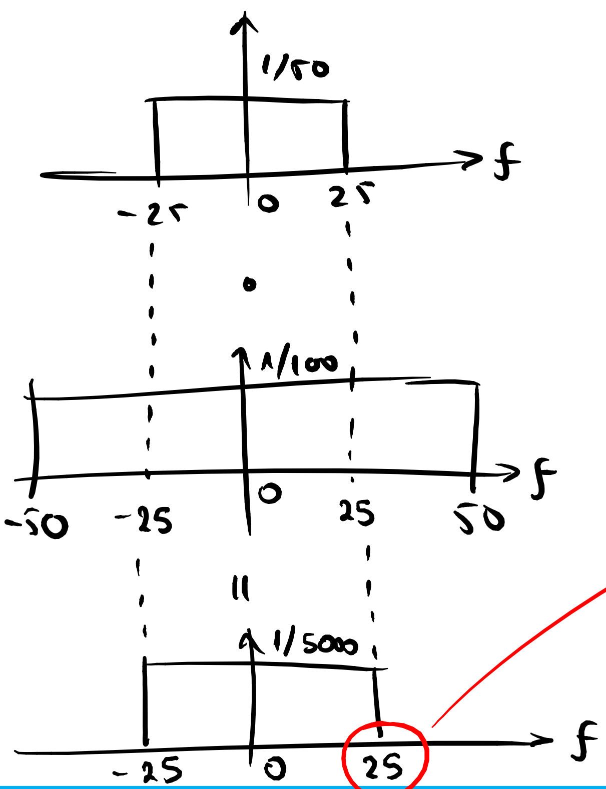
- **Δειγματοληψία**

- Παράδειγμα:

δ) $x(t) = \mathrm{sinc}(50t) * \mathrm{sinc}(100t)$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$X(f) = \frac{1}{50}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \frac{1}{100}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right) = \frac{1}{5000} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{50}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{100}\right)$$

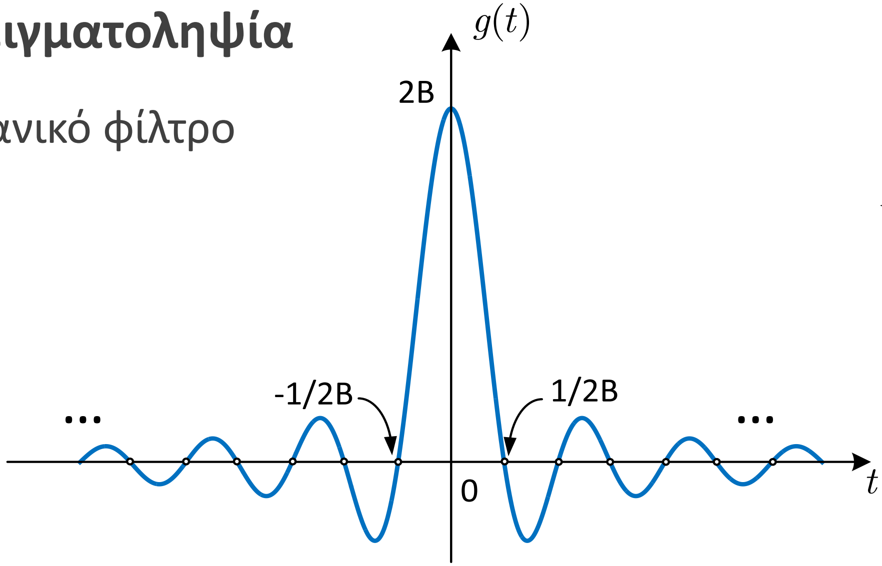


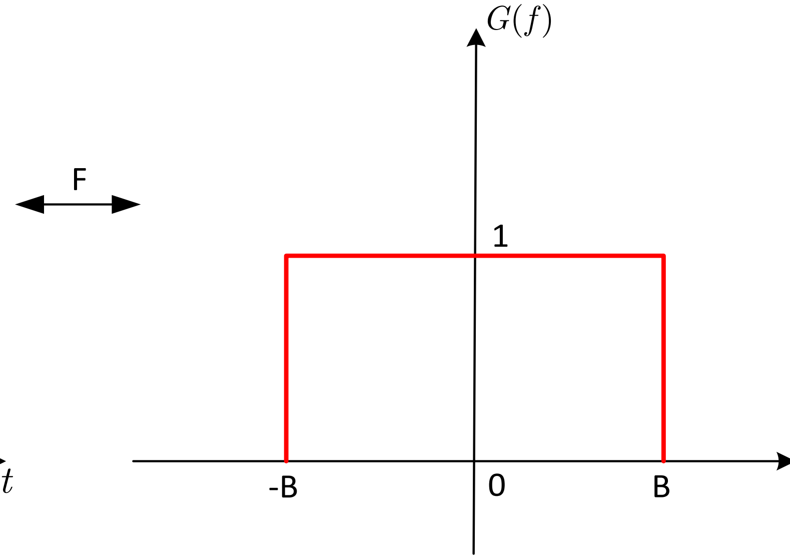
Οπότε $f_{max} = 25$ Hz $\longrightarrow$ Ρυθμός Nyquist $= 50$ Hz

- **Δειγματοληψία**
- Πρακτικά προβλήματα:

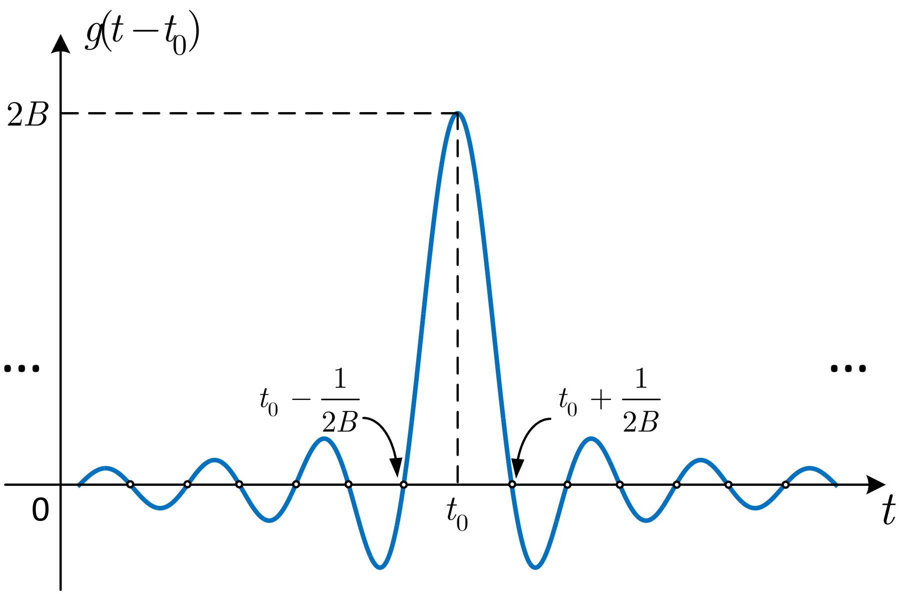
1. Κανένα πραγματικό σήμα δεν είναι βασικής ζώνης
   - Αφού ένα πεπερασμένης ζώνης συχνοτήτων σήμα πρέπει να είναι άπειρης διάρκειας στο χρόνο!
   - Εφαρμόζουμε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο για να μετατρέψουμε το φάσμα του σήματος σε βασικής ζώνης
2. Οι συναρτήσεις Δέλτα δεν υπάρχουν στην πράξη
   - Μπορούν να προσεγγιστούν από στενούς τετραγωνικούς παλμούς
     - **Φυσική Δειγματοληψία**
     - **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**
3. Το χαμηλοπερατό φίλτρο που αποκόπτει το βασικό φάσμα δεν μπορεί να υλοποιηθεί (ιδανικό φίλτρο)
   - Ούτε η κρουστική του απόκριση (συνάρτηση $\mathrm{sinc}(.)$), αφού είναι άπειρης διάρκειας και μη αιτιατή!
   - Μπορεί να προσεγγιστεί από μη ιδανικά φίλτρα
     - Από κρουστικές αποκρίσεις πεπερασμένης διάρκειας και αιτιατές

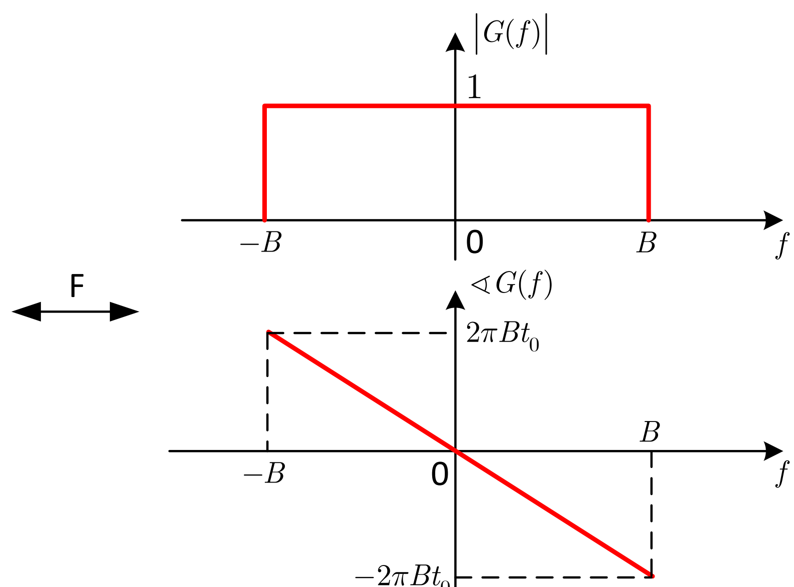
- **Δειγματοληψία**
- Ιδανικό φίλτρο





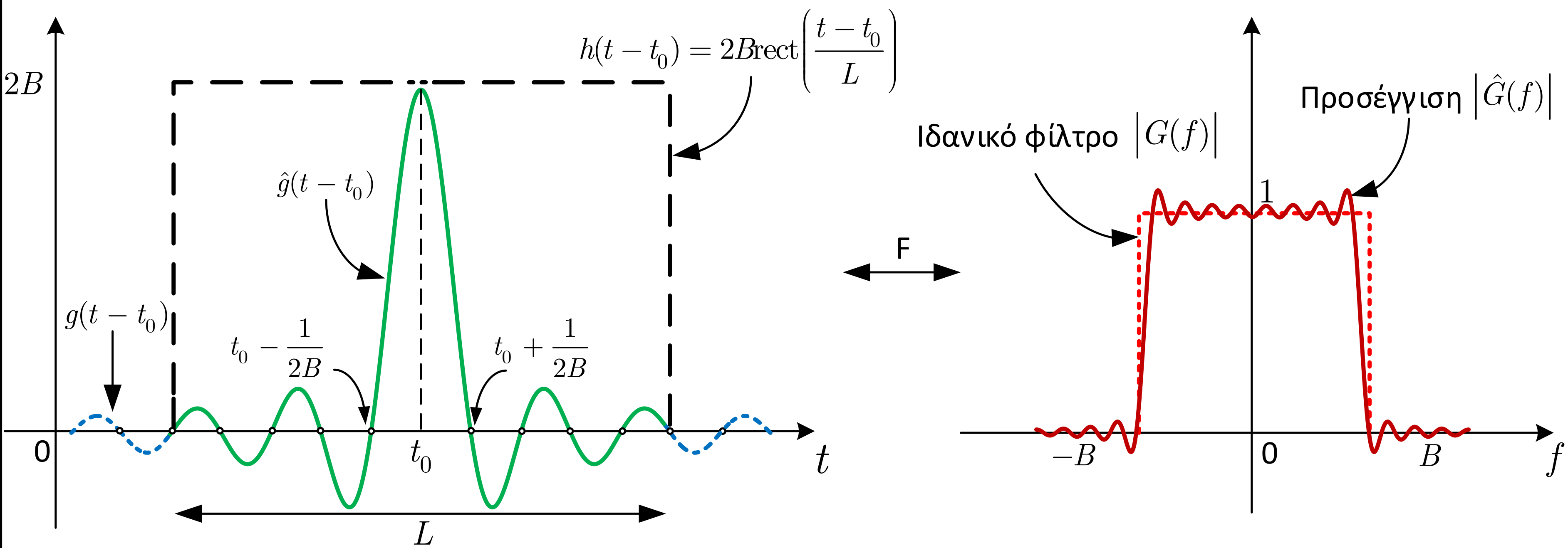
- Το μετατοπίζουμε προς τα δεξιά κατά t_0 έτσι ώστε η περισσότερη ενέργειά του να βρίσκεται στις θετικές χρονικές στιγμές





- **Δειγματοληψία**

- Ακόμα και μετά τη μετατόπιση, ένα τμήμα της κρουστικής απόκρισης είναι μη αιτιατό



- Εφαρμόζουμε ένα χρονικό παράθυρο διάρκειας L για να αποκόψουμε ένα τμήμα της

- Ο Μετασχ. Fourier του μη ιδανικού φίλτρου θα είναι

$$F\{\hat{g}(t-t_0)\} = \hat{G}(f)e^{-j2\pi f t_0} = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) * 2B\mathrm{sinc}(fL)e^{-j2\pi f t_0}$$

- L μικρό: σφάλμα στην προσέγγιση μεγάλο, αλλά εύκολα και γρήγορα πραγματοποιήσιμο

- L μεγάλο: σφάλμα στην προσέγγιση μικρό, αλλά «αργό» στην πραγματοποίηση

- **Φυσική Δειγματοληψία**
- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα, μια σειρά από τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας D

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{D}{2}}{D}\right)$$

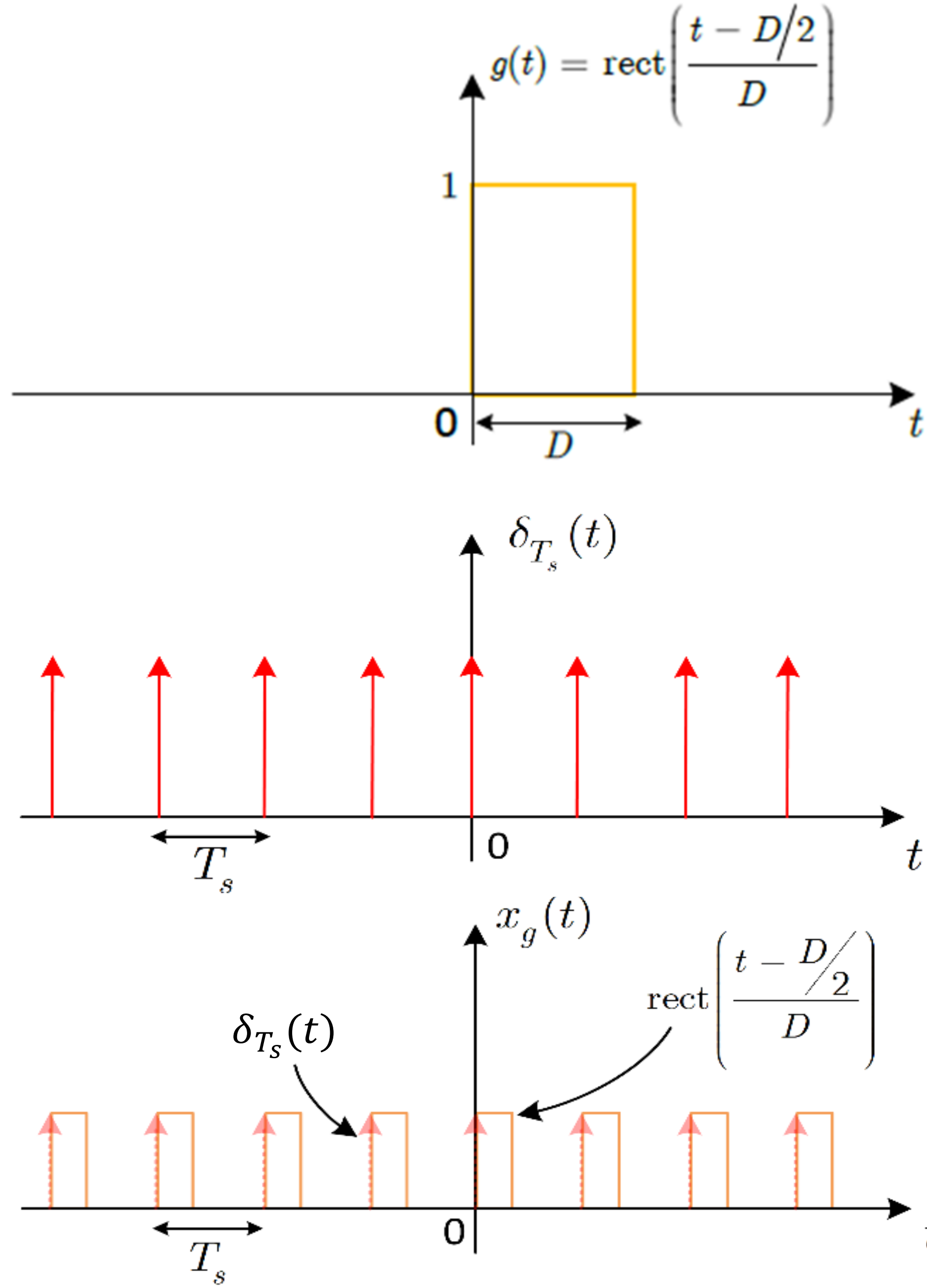
με μετασχ. Fourier

$$G(f) = D\mathrm{sinc}(fD)e^{-j\pi f D}$$

- Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα είναι

$$x_g(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t - nT_s)$$

- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα αυτή συνάρτηση δειγματοληψίας

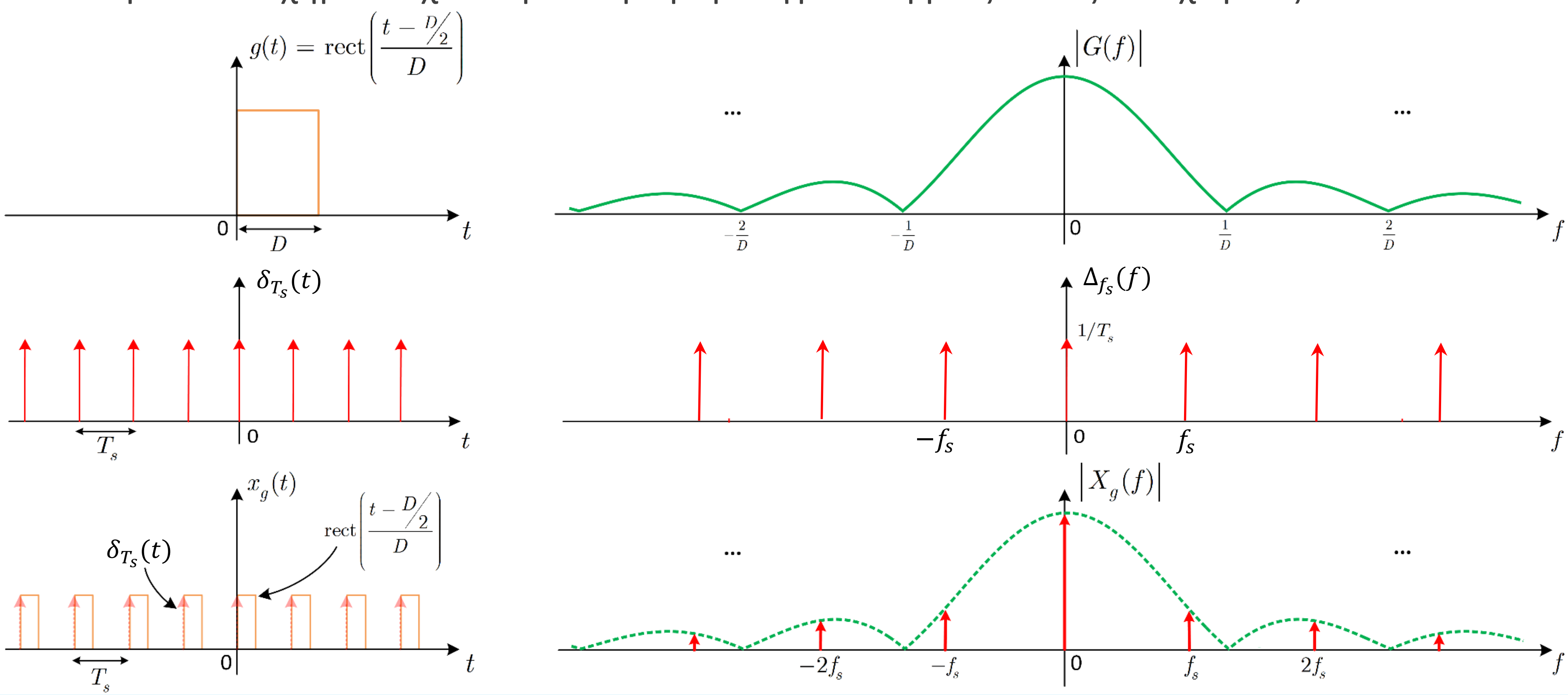


• Φυσική Δειγματοληψία

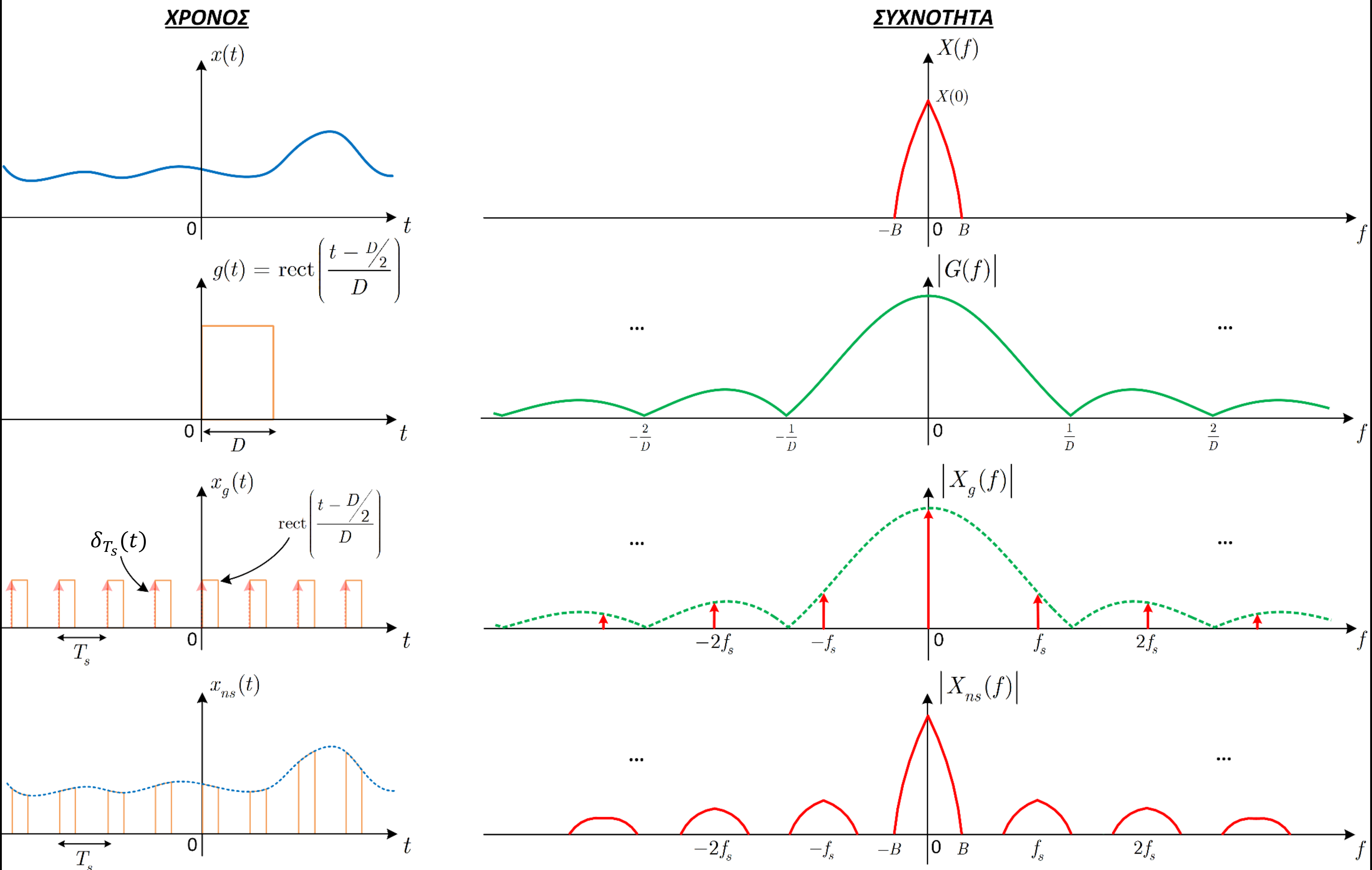
• Η συνάρτηση δειγματοληψίας θα έχει μετασχ. Fourier

$$X_g(f) = G(f)\Delta_{f_s}(f) = G(f)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}\delta(f-kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T_s}G(kf_s)\delta(f-kf_s)$$

• Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη συνάρτηση δειγματοληψίας στους δυο χώρους

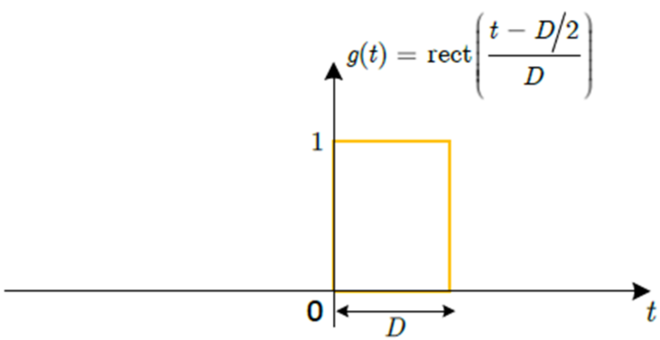


• Φυσική Δειγματοληψία

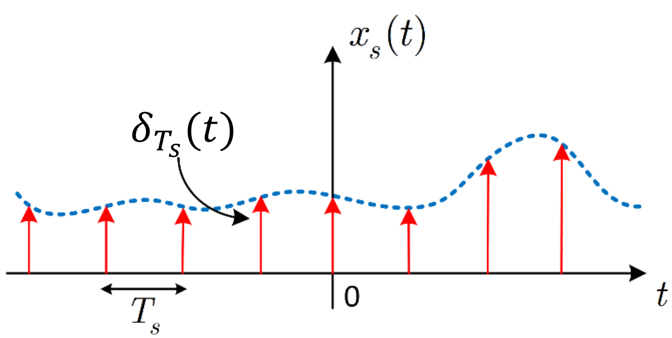


- **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**

- Πολλές φορές προτιμάται η σειρά παλμών να διατηρεί σταθερό το πλάτος κάθε παλμού σύμφωνα με τη χρονική στιγμή της δειγματοληψίας



- Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή αναπαρίσταται από μια εναλλαγή των πράξεων της φυσικής δειγματοληψίας

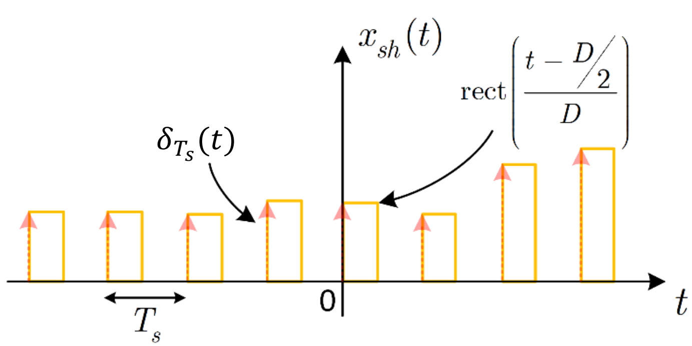


- Στη φυσική δειγματοληψία είχαμε

$$x_{ns}(t) = \left[\delta_{T_s}(t) * g(t)\right] x(t)$$

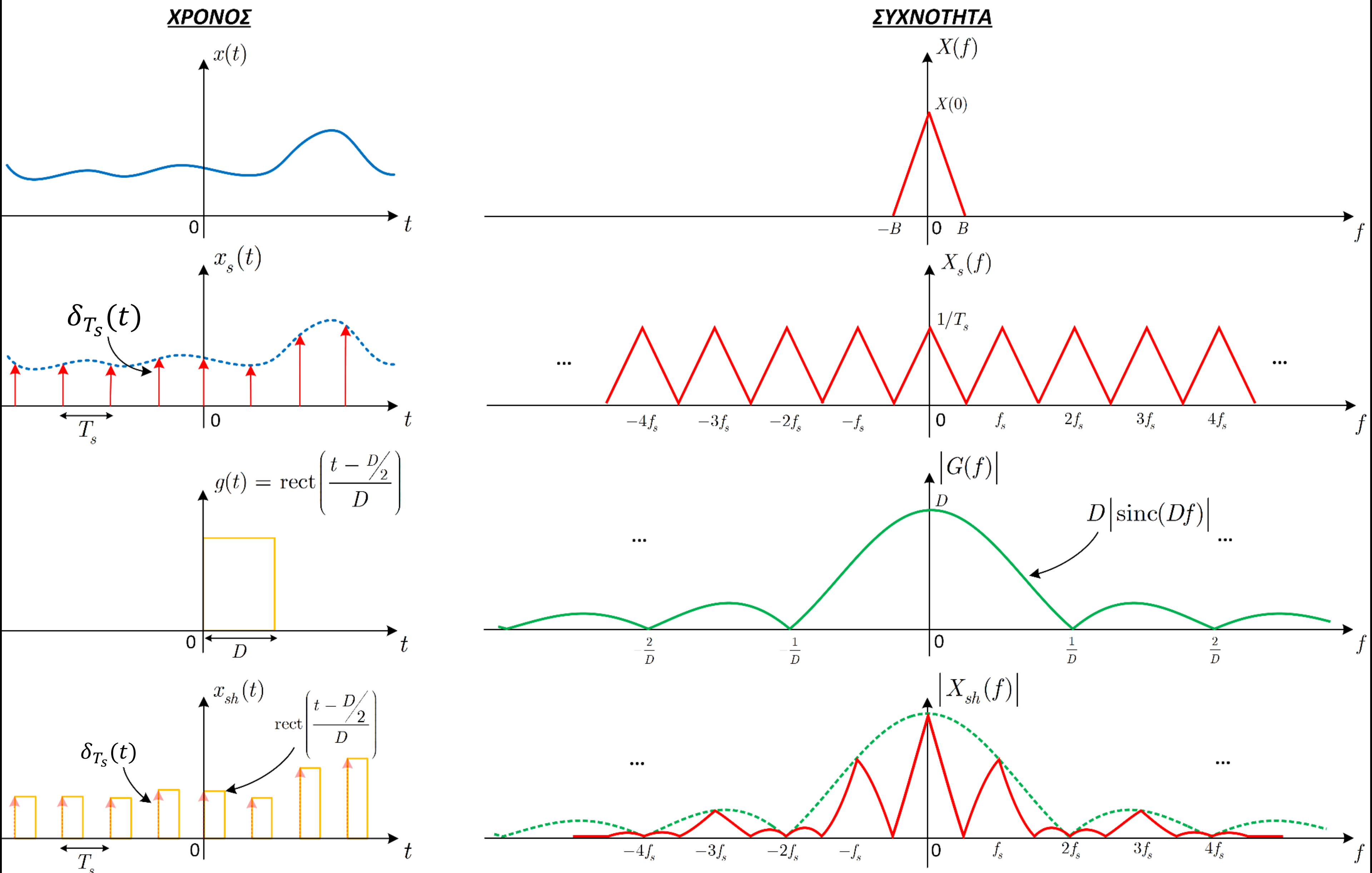
ενώ τώρα

$$x_{sh}(t) = \left[x(t)\delta_{T_s}(t)\right] * g(t)$$



- Το διπλανό σχήμα δείχνει τη νέα διαδικασία

- **Δειγματοληψία με διατήρηση τιμής**



- **Δειγματοληψία – Ζωνοπερατή Δειγματοληψία**

- Θεώρημα του Shannon: για την πλήρη και ακριβής ανακατασκευή ενός σήματος βασικής ζώνης (baseband signal) απαιτείται

$$f_s > 2f_{max} = 2B$$

- Διατύπωση: για ένα σήμα βασικής ζώνης (baseband signal), χρειαζόμαστε συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα, $2B$, του σήματος

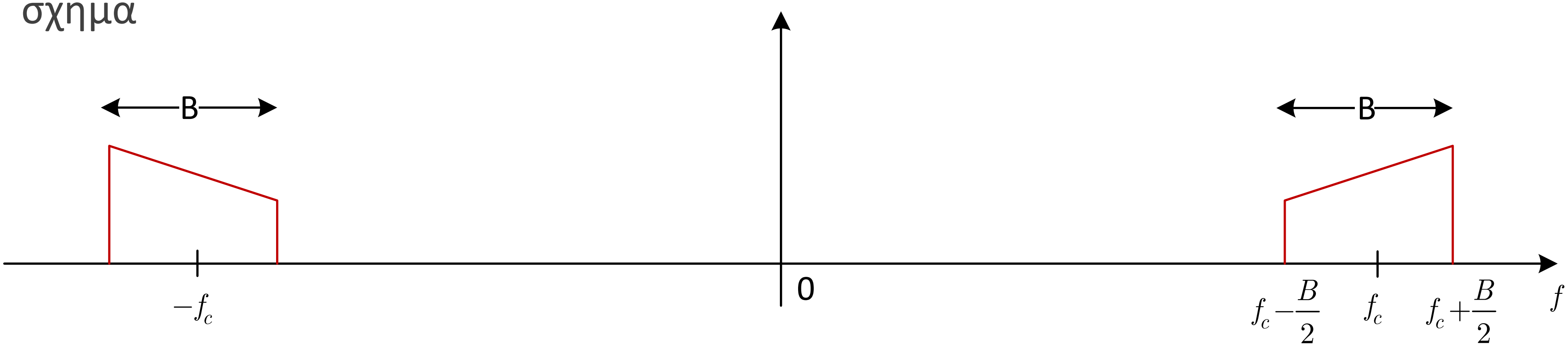
- ***Εναλλακτικά***: για ένα σήμα βασικής ζώνης (baseband signal), χρειαζόμαστε συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη του **εύρους ζώνης** του, $2B$

- Για ένα σήμα μη-βασικής ζώνης; ☺

- Δηλ. για ένα **ζωνοπερατό σήμα (bandpass signal)**;
  - Μήπως ισχύει κάτι διαφορετικό;

- **Δειγματοληψία – Ζωνοπερατή Δεγματοληψία**

- **Ζωνοπερατό** (bandpass) λέγεται ένα σήμα που το φασματικό του περιεχόμενο βρίσκεται σε ένα εύρος ζώνης $[-f_c - B, -f_c + B] \cup [f_c - B, f_c + B]$, όπως στο σχήμα



- Μια νέα δειγματοληψία που μπορούμε να εφαρμόσουμε εδώ ονομάζεται **ζωνοπερατή δειγματοληψία (bandpass sampling)**

- Εδώ, το εύρος ζώνης του σήματος είναι ίσο με B

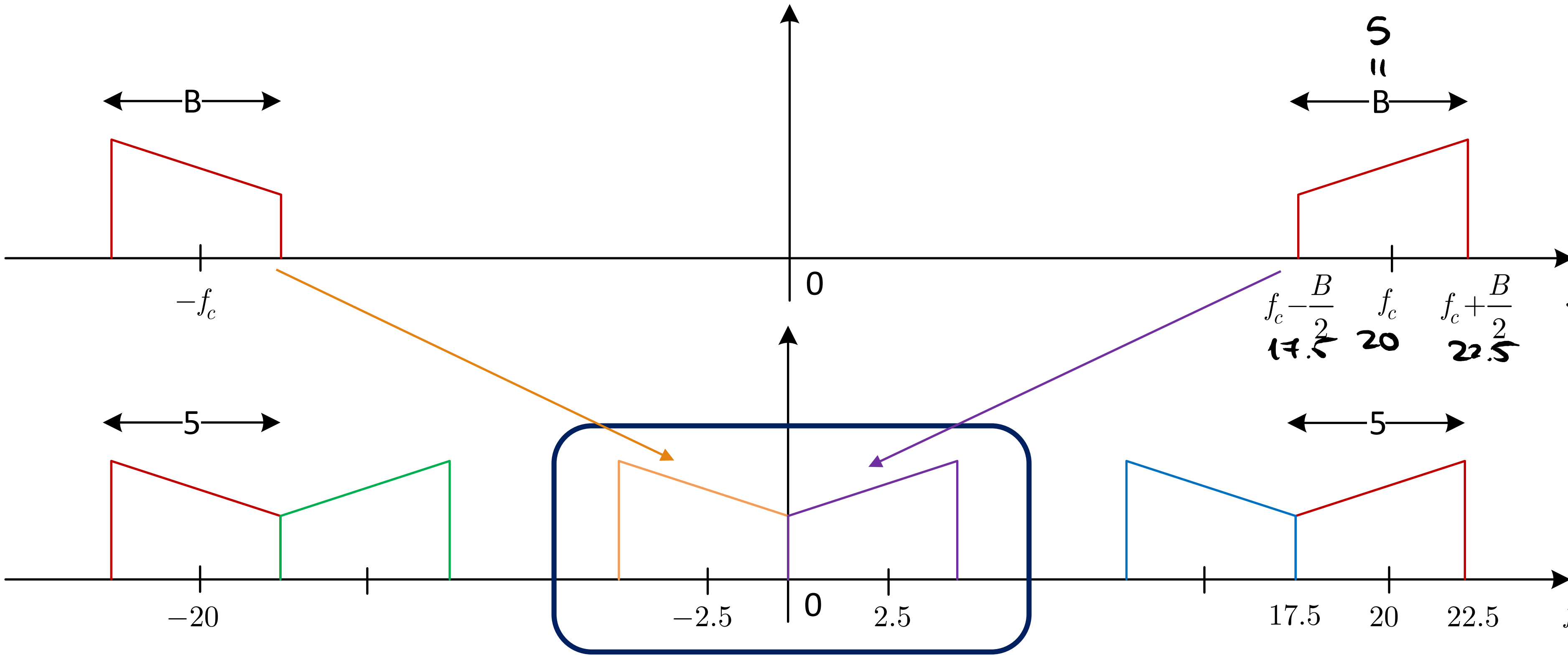
- Έστω $f_c = 20$ Hz και $B = 5$ Hz

- Σύμφωνα με το θεώρημα του Shannon, μια συχνότητα δειγματοληψίας μεγαλύτερη από $2\left(f_c + \frac{B}{2}\right) = 45$ Hz θα είναι ικανή να μας δώσει πίσω το αρχικό σήμα από τα δείγματά του

- Τι θα συμβεί αν δειγματοληπτήσουμε με π.χ. $f_s = 17.5$ Hz?

- **Δειγματοληψία – Ζωνοπερατή Δεγματοληψία**

- Τι θα συμβεί να δειγματοληπτήσουμε με π.χ. $f_s = 17.5$ Hz?



- Μπορεί κανείς να δείξει ότι η συχνότητα δειγματοληψίας μπορεί να επιλεχθεί στο διάστημα

$$\frac{2f_c - B}{m} \geq f_s \geq \frac{2f_c + B}{m+1}$$

για m θετικό ακέραιο, υπό την προϋπόθεση ότι $f_s > 2B$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ