

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

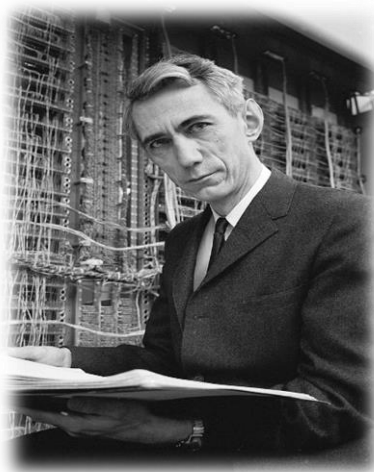
ΔΙΑΛΕΞΗ 22^Η

- Δειγματοληψία



• Δειγματοληψία

- **Ερώτημα:** πώς μπορώ να δειγματοληπτήσω (== πάρω κάποιες τιμές, που ονομάζονται *δείγματα* - *samples*) ενός σήματος συνεχούς χρόνου, έτσι ώστε να μπορώ να το ανακτήσω *πλήρως και ακριβώς* από τα δείγματά του?
- **Απάντηση:** Θεώρημα Shannon-Nyquist (1949)

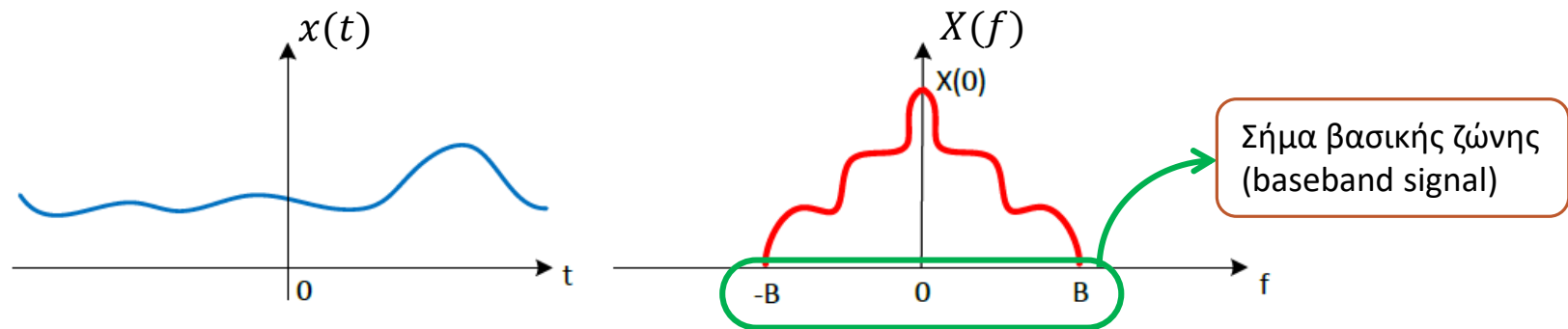


- Ας δούμε πως προκύπτει το θεώρημα αυτό...

- **Δειγματοληψία**
- Θέλουμε να αποθηκεύσουμε ένα σήμα $x(t)$ σε έναν Η/Υ
- Προφανώς δεν μπορούμε να αποθηκεύσουμε τις *άπειρες* τιμές του
 - Ακόμα κι αν αυτό είναι μη μηδενικό σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα
- Πρέπει να πάρουμε μερικά **δείγματα** του σήματος $x(t)$
 - Τιμές: $x(-20)$, $x(-1)$, $x(0)$, $x(10)$, $x(\sqrt{152})$, $x(62.7)$, κ.ο.κ
- Τα δείγματα αυτά θέλουμε να είναι ικανά να μας δώσουν πίσω ξανά **ακριβώς** το σήμα συνεχούς χρόνου
- **Ερώτημα I:** ποιες τιμές πρέπει να πάρουμε;
 - Όποιες θέλουμε? Κάποιες συγκεκριμένες? Έχει σημασία?
- **Ερώτημα II:** πόσο συχνά πρέπει να τις πάρουμε;
 - Μια τιμή-δείγμα κάθε δευτερόλεπτο? Πιο συχνά? Λιγότερο συχνά? Έχει σημασία?
- Ας υποθέσουμε ότι θα δειγματοληπτήσουμε **ομοιόμορφα** και ότι το σήμα μας είναι **βασικής ζώνης (baseband signal)**
 - Δηλ. **με σταθερή χρονική απόσταση μεταξύ των δειγμάτων** και θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier του σήματος είναι μη μηδενικός γύρω από ένα πεπερασμένο διάστημα συχνοτήτων που περιλαμβάνει το μηδέν, π.χ. $X(f) \neq 0$, $f \in [-B, B]$

Δειγματοληψία

- Έστω ένα σήμα $x(t)$ και ο μετασχ. Fourier του $X(f)$ όπως στο σχήμα



- Για να «τραβήξουμε» δείγματα από το σήμα $x(t)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη δειγματοληπτική ιδιότητα της συνάρτησης Δέλτα

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

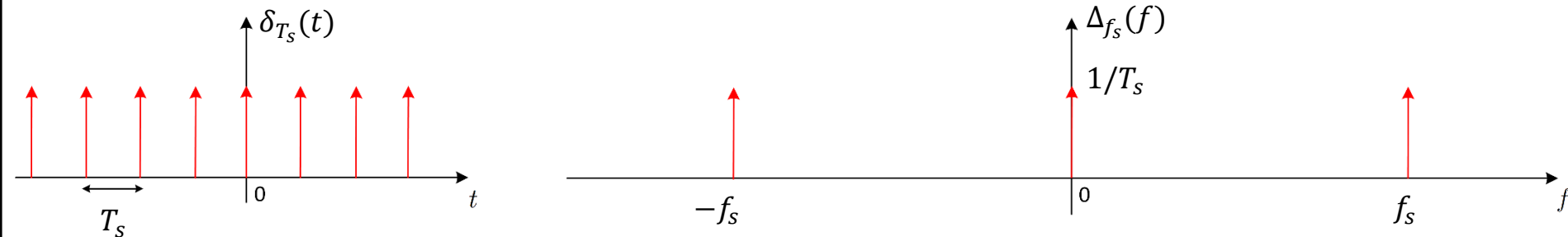
- Ας ορίσουμε μια **συνάρτηση δειγματοληψίας με περίοδο δειγματοληψίας T_s**

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** είναι $f_s = 1/T_s$

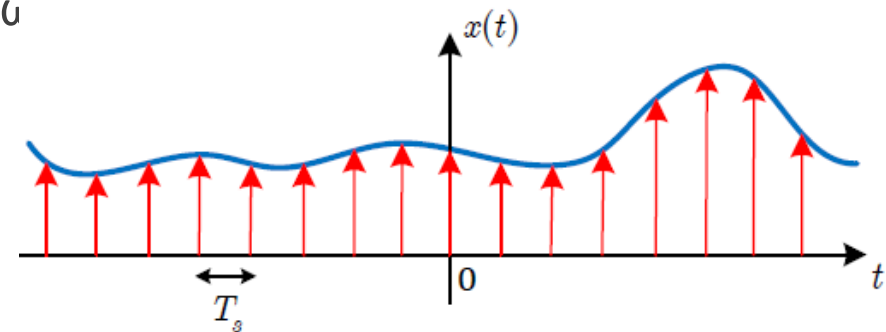
Δειγματοληψία

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \Delta_{f_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - kf_s)$$

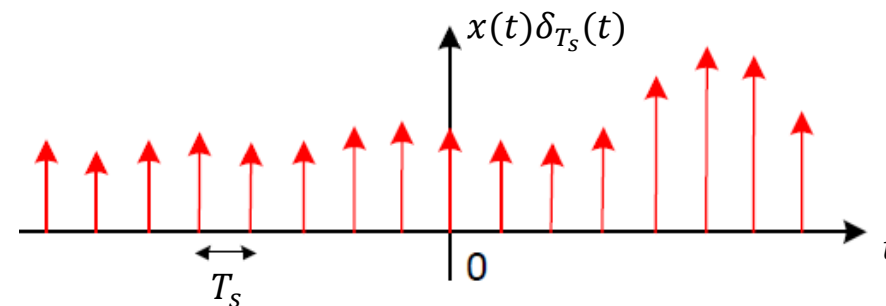


- Το γινόμενο της $\delta_{T_s}(t)$ με το σήμα $x(t)$ θα δώσει μια σειρά από συναρτήσεις Δέλτα με μη μοναδιαίους συντελεστές

- Συναρτήσεις δέλτα που η επιφάνειά τους έχει αλλάξει με βάση το σήμα



- Τα δείγματα απέχουν χρόνο T_s μεταξύ τους
 - Ας υποθέσουμε ότι αυτή η τιμή είναι «αρκετά μικρή»
 - Οπότε η $f_s = 1/T_s$ «αρκετά μεγάλη»



• Δειγματοληψία

- Γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των δυο σημάτων στο χρόνο θα μετατραπεί σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας
- Δηλ.

$$x(t)\delta_{T_s}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

και

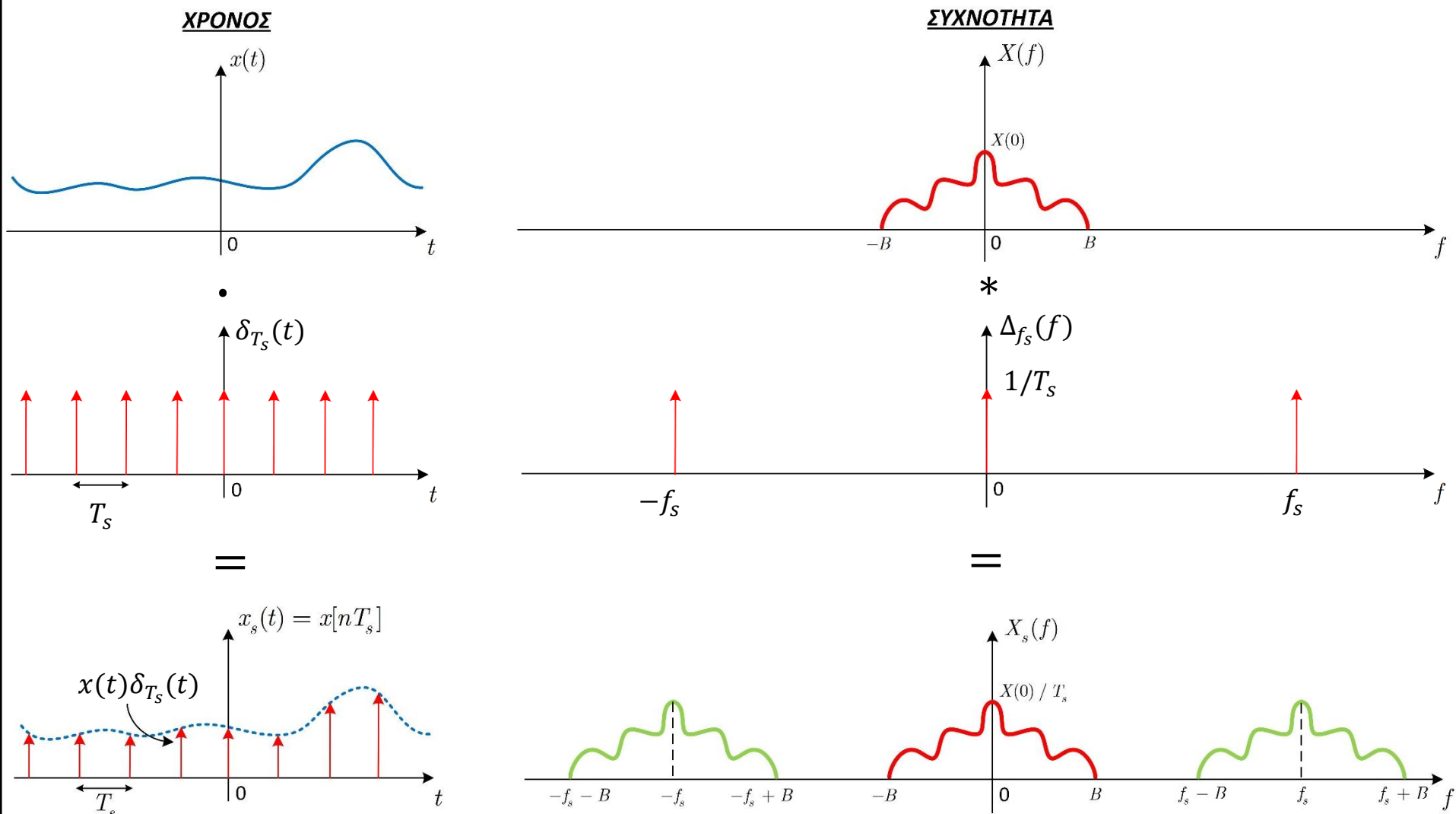
$$X(f) * \Delta_{f_s}(f) = X(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} \delta(f - kf_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_s} X(f - kf_s)$$

λόγω της ιδιότητας

$$X(f) * \delta(f - f_0) = X(f - f_0)$$

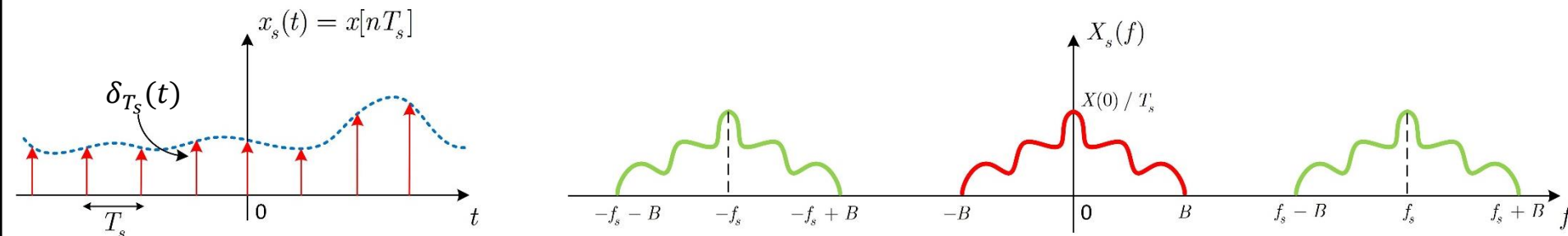
- Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο μετασχηματισμός Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι ένα άθροισμα από τους μετασχηματισμούς Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου, τοποθετημένους σε απόσταση f_s (ανά δυο) μεταξύ τους!!
- Με άλλα λόγια, ο μετασχ. Fourier του δειγματοληπτημένου σήματος είναι **περιοδικός** στη συχνότητα με περίοδο f_s !!!

- **Δειγματοληψία**
- Σχηματικά, έχουμε την παρακάτω εικόνα:

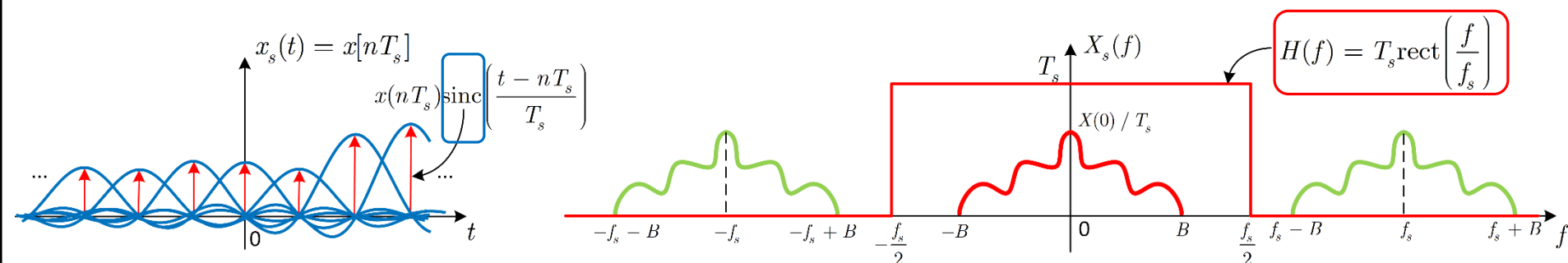


Δειγματοληψία – Ανακατασκευή

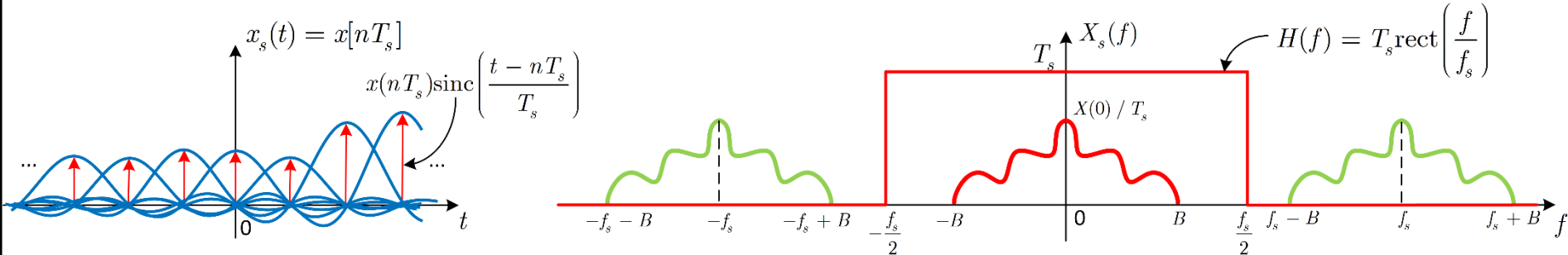
- Έχουμε τώρα τα δείγματα από το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου
 - Αυτά τα δείγματα μπορούν να αποθηκευτούν κάπου
- Πως θα ανακτήσουμε το αρχικό φάσμα – και έτσι, το αρχικό σήμα – από τα δείγματά του, δηλ. από το δειγματοληπτημένο σήμα?



- Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ένα **χαμηλοπερατό φίλτρο** θα μπορούσε να απομονώσει το κεντρικό φάσμα που αντιστοιχεί στο σήμα συνεχούς χρόνου
- Το γινόμενο του φίλτρου με το φάσμα στη συχνότητα αντιστοιχεί σε συνέλιξη στο χρόνο των δειγμάτων του σήματος με μια συνάρτηση **sinc(.)**!!!!



• Δειγματοληψία – Ανακατασκευή

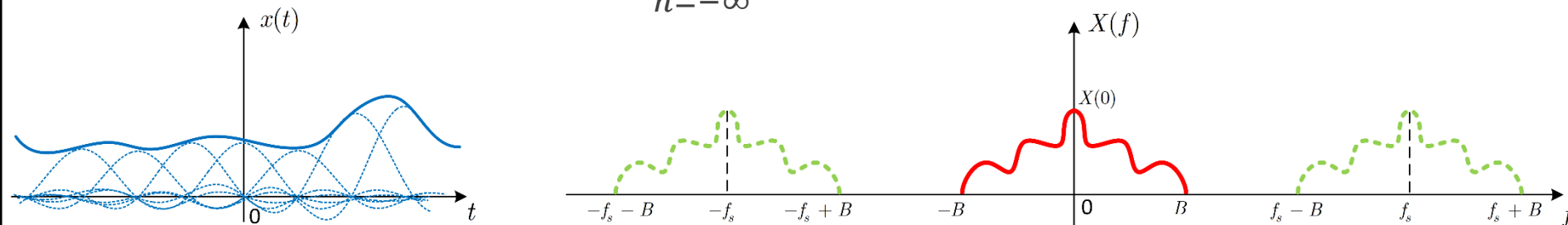


• Με μαθηματικά:

$$[X(f) * \Delta_{f_s}(f)]H(f) = [X(f) * \Delta_{f_s}(f)]T_s \text{rect}\left(\frac{f}{f_s}\right) = X(f)$$

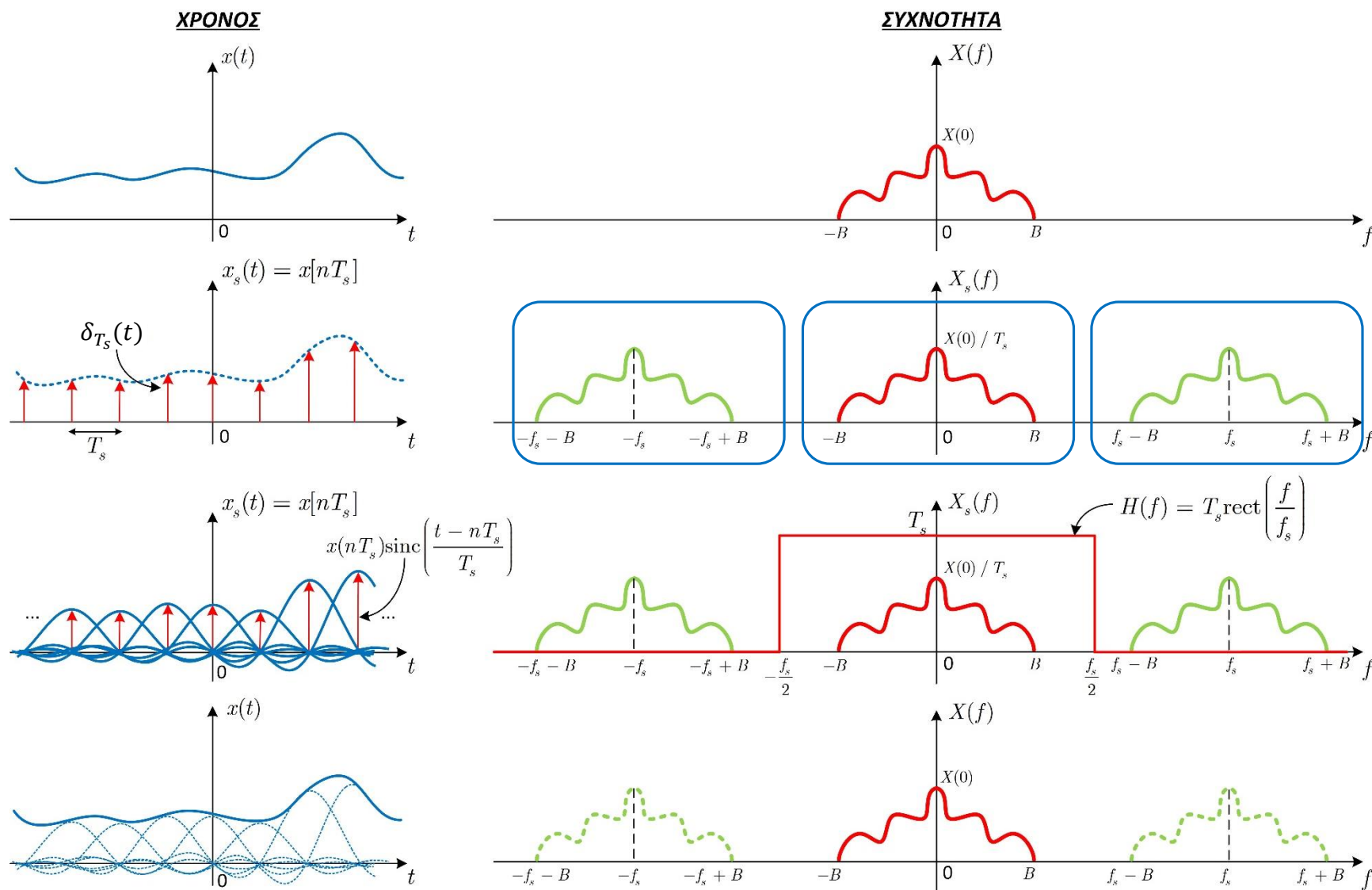
• Στο πεδίο του χρόνου:

$$\begin{aligned} (x(t)\delta_{T_s}(t)) * h(t) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right) * \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\text{sinc}\left(\frac{t - nT_s}{T_s}\right) = x(t) \end{aligned}$$

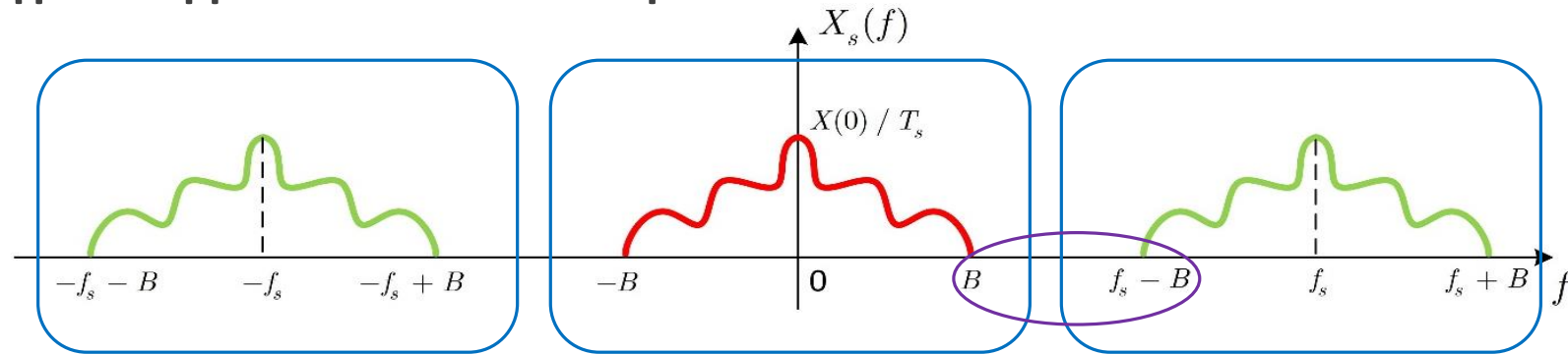


Δειγματοληψία και Ανακατασκευή

Συγκεντρωτικά:



• Δειγματοληψία – Ανακατασκευή



- Για να ισχύουν όλα τα προηγούμενα, πρέπει το περιοδικό φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος να μην έχει επικαλύψεις!

- Η **συχνότητα δειγματοληψίας** f_s να είναι «αρκετά μεγάλη»
- Πόσο μεγάλη?

- Αρκεί

$$f_s - B > B \Leftrightarrow f_s > 2B = 2f_{max}$$

που αποτελεί και το θεώρημα της Δειγματοληψίας

- Με άλλα λόγια, **μπορούμε να ανακατασκευάσουμε πλήρως και ακριβώς το σήμα συνεχούς χρόνου από μια δειγματοληπτημένη έκδοσή του (ένα σήμα διακριτού χρόνου) αν τα δείγματα έχουν ληφθεί με ρυθμό μεγαλύτερο από $2B$ Hz, με $2B$ τη διπλάσια μέγιστη συχνότητα του σήματος**

• Δειγματοληψία

Θεώρημα Δειγματοληψίας

Ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα (μη-μηδενικού πλάτους) B Hz, μπορεί να ανακτηθεί ακριβώς από τα δείγματά του, αν δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας

$$f_s > 2B, \quad (9.1)$$

δηλ. με περίοδο δειγματοληψίας

$$T_s < \frac{1}{2B} \quad (9.2)$$

Η συνθήκη:

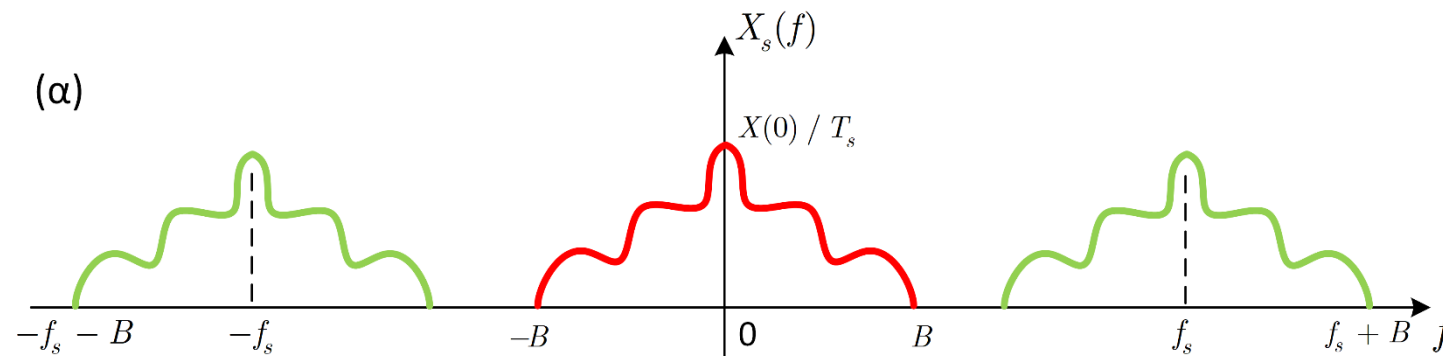
$$f_s > 2B \quad \left(\text{ή } T_s < \frac{1}{2B} \right) \quad (9.3)$$

λέγεται *συνθήκη του Shannon*. Η μέγιστη συχνότητα B συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως $f_{\max}$ και λέγεται *συχνότητα Nyquist*, ενώ η ελάχιστη συχνότητα $2B$ για την οποία πληρείται η συνθήκη του Shannon λέγεται *ρυθμός Nyquist*.

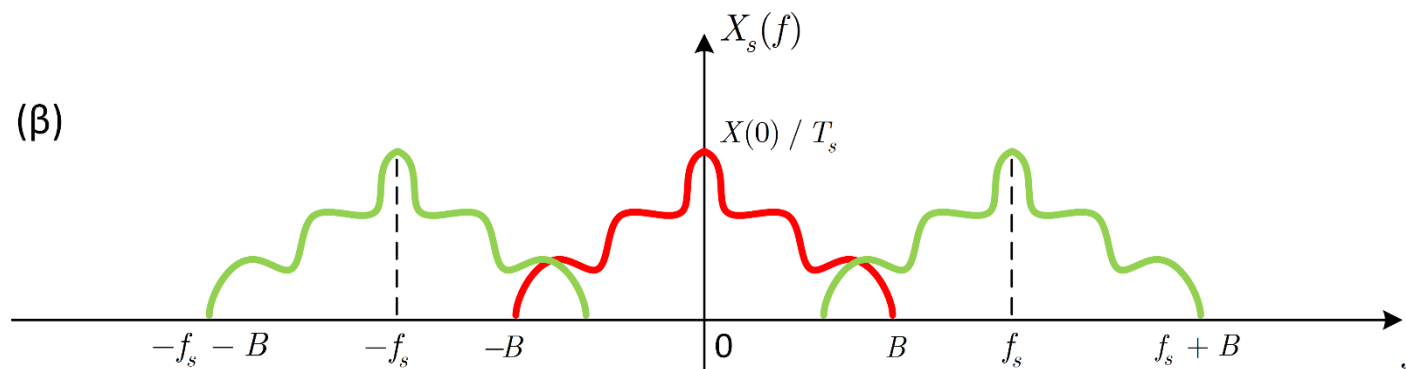
• Δειγματοληψία – Aliasing

• Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?

• Αν $f_s > 2f_{max}$, τότε:

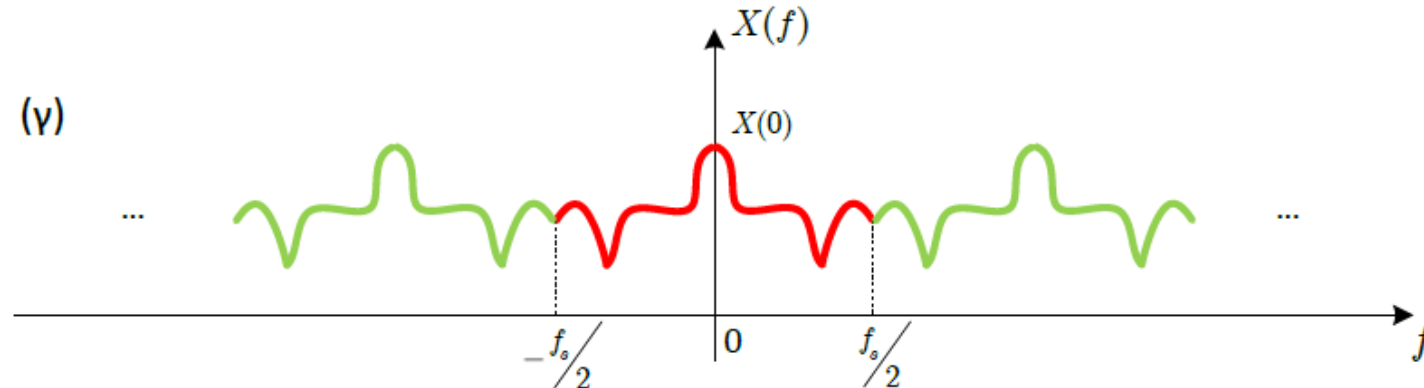


• Αν όμως $f_s < 2f_{max}$, τότε:



• Δειγματοληψία – Aliasing

- Τι θα συμβεί αν **ΔΕΝ** τηρηθεί η συνθήκη του Shannon?
- Το φάσμα που θα αποκόψει το χαμηλοπερατό φίλτρο θα μοιάζει με το παρακάτω:



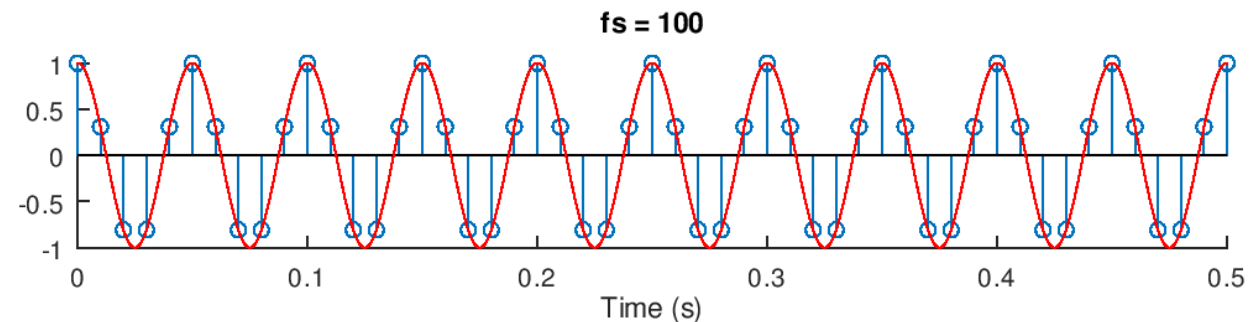
- Το φάσμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα εντελώς διαφορετικό σήμα στο χρόνο, σε σχέση με αυτό που δειγματοληπτήθηκε!!
- Βλέπετε ότι έχουν εισαχθεί (και αλλοιώσει) το φάσμα συχνότητες που δεν ανήκουν σε αυτό (ξένες συχνότητες)
 - ... οι οποίες προέρχονται από το άθροισμα συχνοτήτων του ίδιου του σήματος και των γειτονικών αντιγράφων του
- Οι συχνότητες αυτές λέγονται **ψευδώνυμες** συχνότητες (**aliased** frequencies)
- Το φαινόμενο της επικάλυψης των γειτονικών φασμάτων (και κατά συνέπεια της αλλοίωσης του φάσματος βασικής ζώνης) κατά τη δειγματοληψία ονομάζεται **aliasing**
 - Ψευδωνυμία ή Αναδίπλωση (in Greek)

Δειγματοληψία

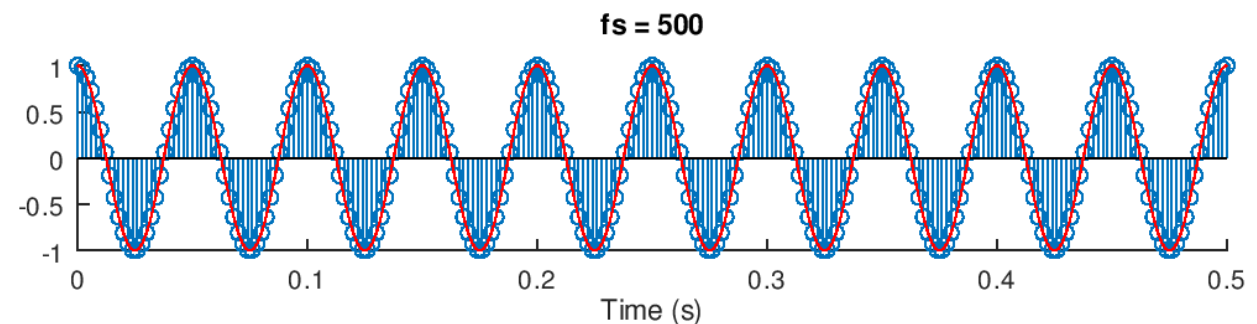
• Ας δούμε ένα παράδειγμα

• Έστω ένα απλό ημίτονο με $f_0 = 20$ Hz το οποίο δειγματοληπτείται με συχνότητες δειγματοληψίας

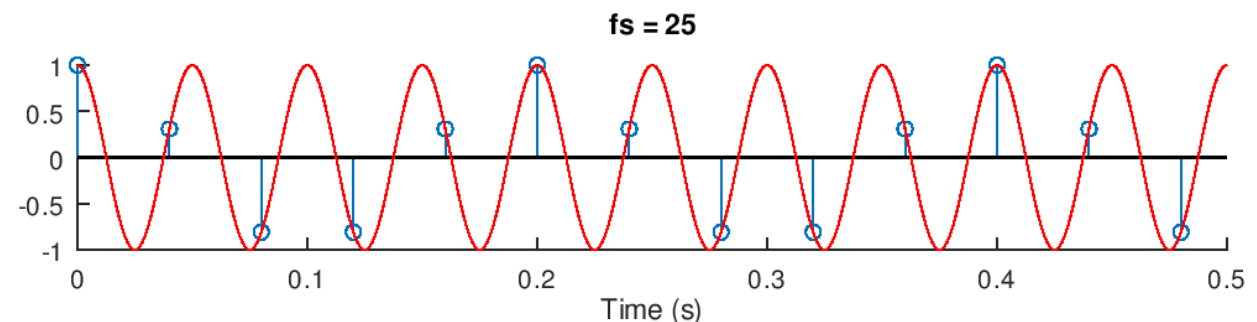
□ $f_s = 100$ Hz



□ $f_s = 500$ Hz

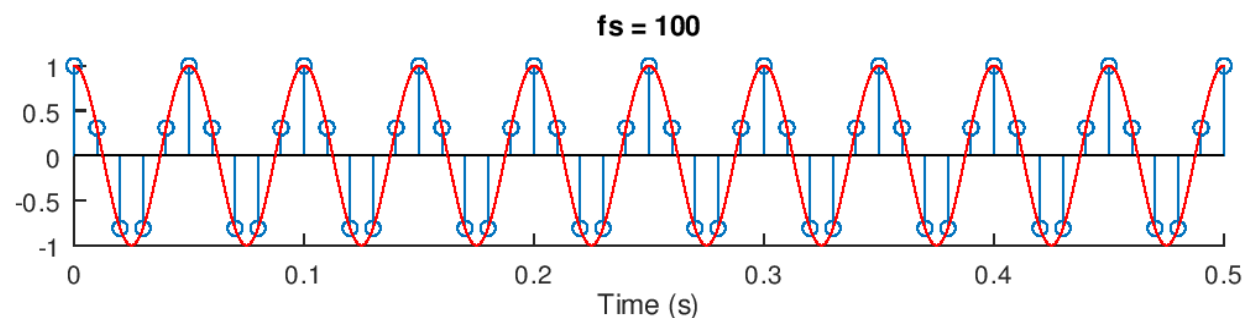


□ $f_s = 25$ Hz

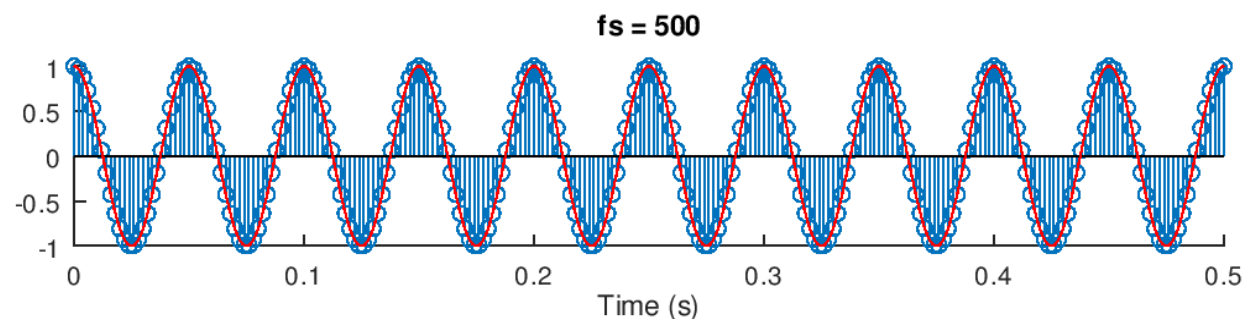


- Δειγματοληψία
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ποιο είναι το σήμα που ανακατασκευάζεται στην τελευταία περίπτωση?

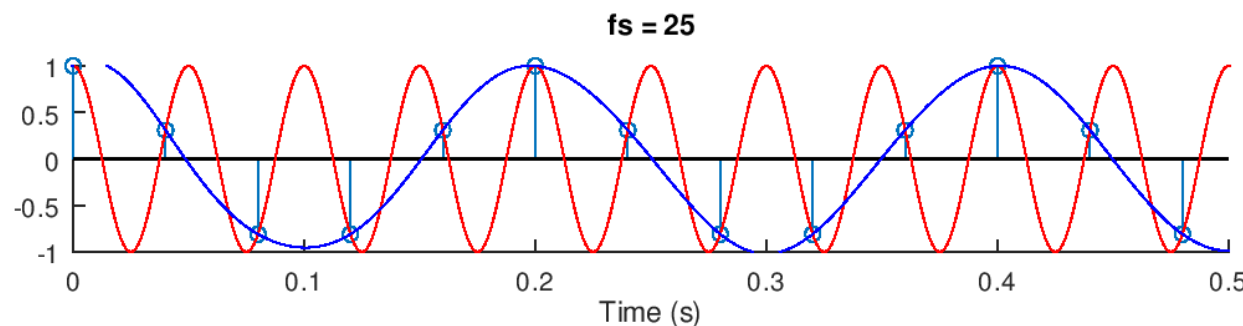
☐ $f_s = 100 \text{ Hz}$



☐ $f_s = 500 \text{ Hz}$



☐ $f_s = 25 \text{ Hz}$



- Δειγματοληψία

- Παράδειγμα:

- Ένα σήμα συνεχούς χρόνου της μορφής

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t)$$

δειγματοληπτείται με συχνότητα $f_s = 4000$ Hz. Βρείτε τη μαθηματική μορφή του σήματος που προκύπτει.

Λυσιμωρώ $t \leftarrow nT_s = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{4000}$

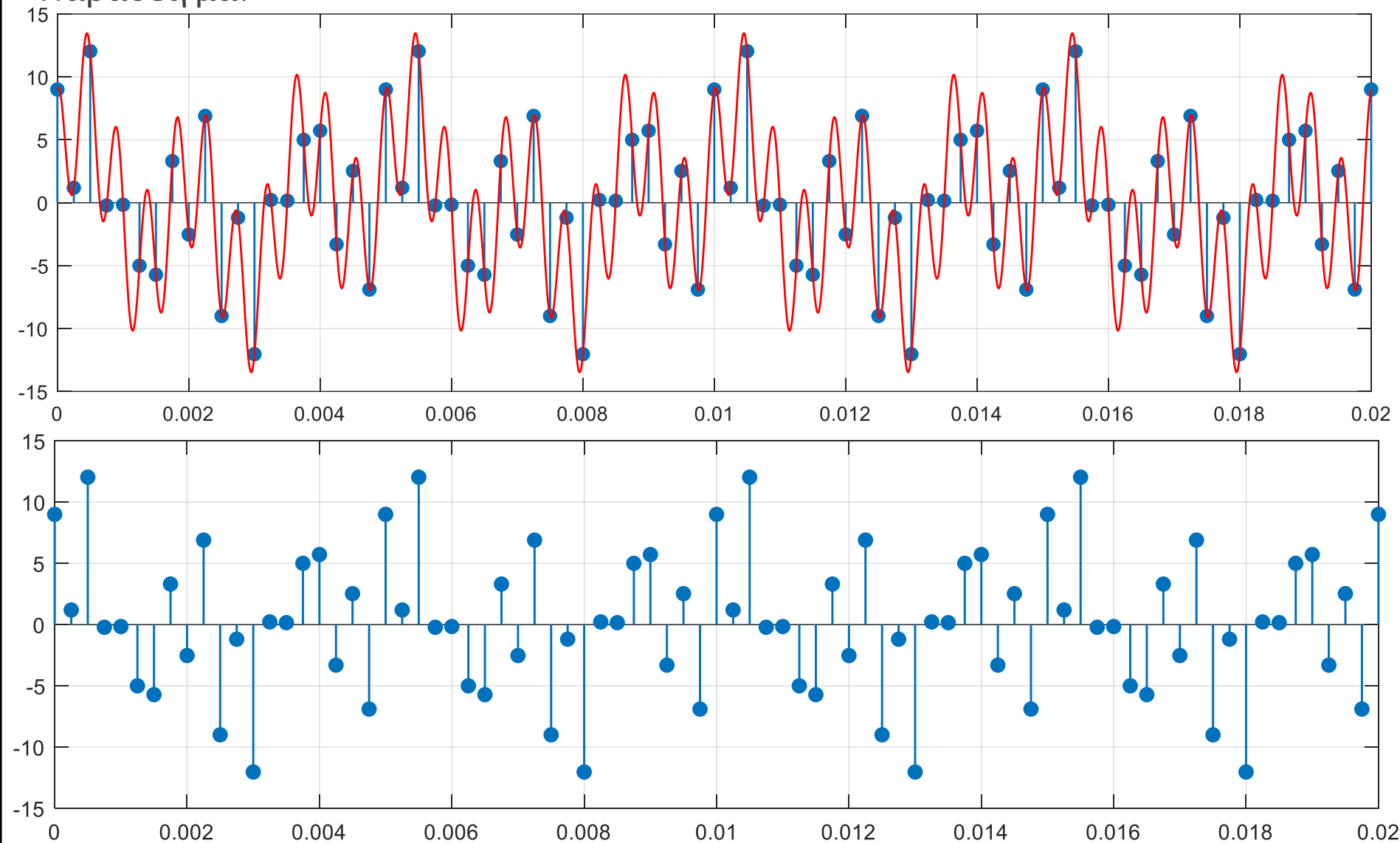
Οιότε

$$\begin{aligned} x(nT_s) &= 3 \cos\left(400n \frac{n}{4000}\right) + 5 \sin\left(1200n \frac{n}{4000}\right) + 6 \cos\left(4400n \frac{n}{4000}\right) \\ &= 3 \cos\left(\frac{nn}{10}\right) + 5 \sin\left(\frac{3nn}{10}\right) + 6 \cos\left(\frac{11nn}{10}\right) \end{aligned}$$

Παρατηρώ ότι $f_s < 2f_{\max} = 2 \cdot 2200 = 4400$ Hz

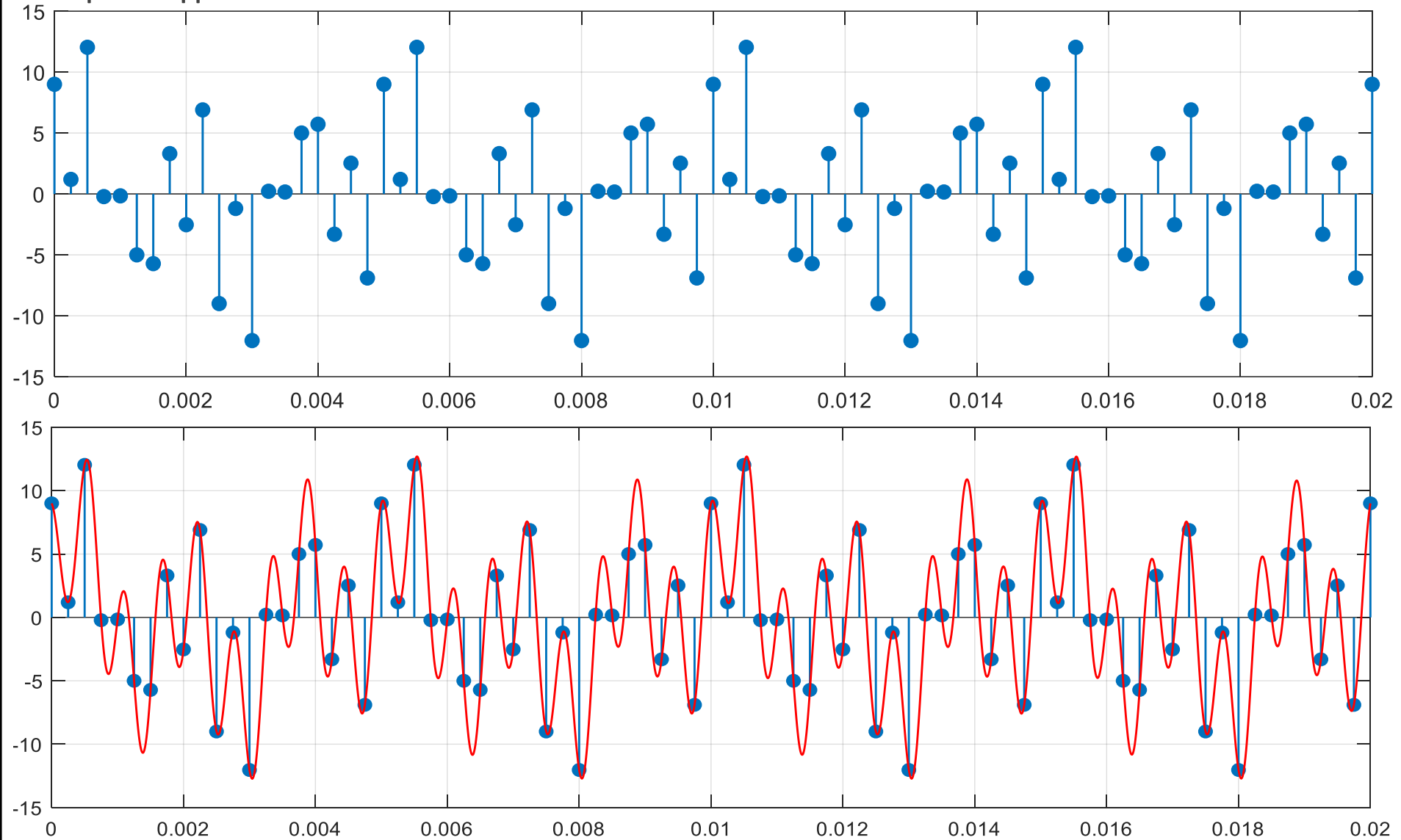
- Δειγματοληψία

- Παράδειγμα:



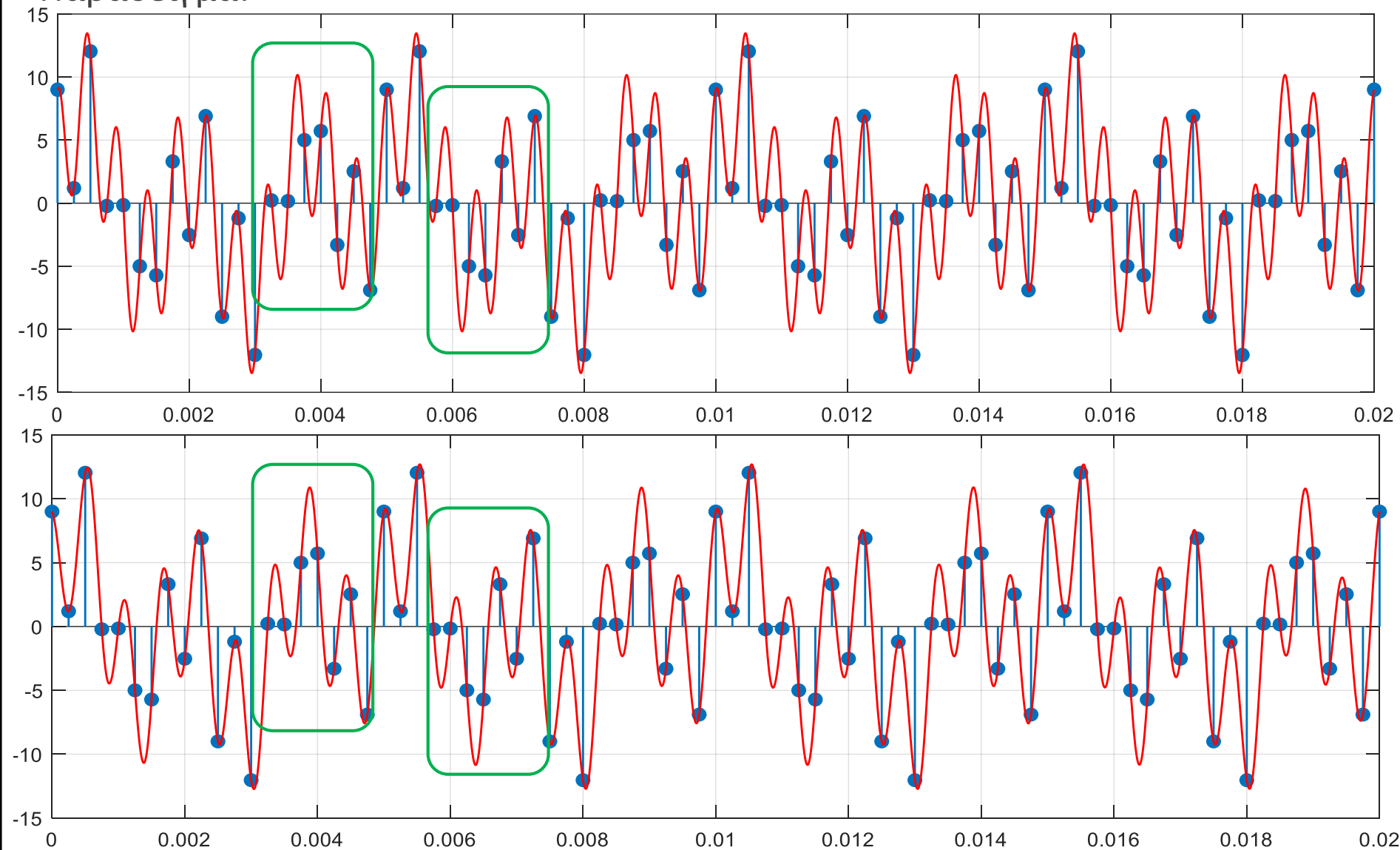
• Δειγματοληψία

• Παράδειγμα:



• Δειγματοληψία

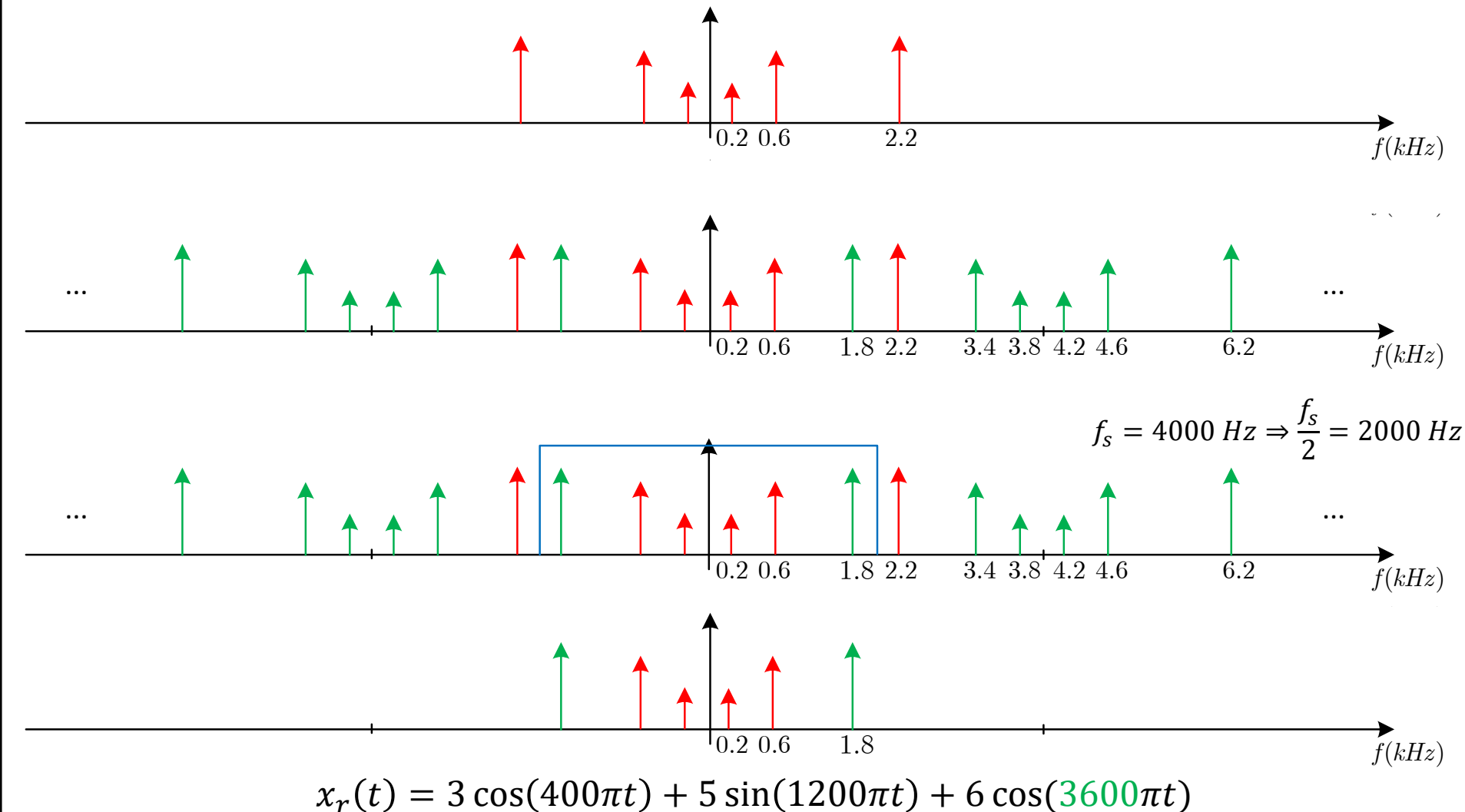
• Παράδειγμα:



Δειγματοληψία

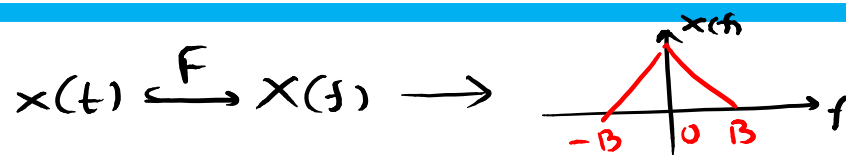
- Ποιο είναι το φασματικό περιεχόμενο του ανακατασκευασμένου σήματος?

$$x(t) = 3 \cos(400\pi t) + 5 \sin(1200\pi t) + 6 \cos(4400\pi t)$$



• Δειγματοληψία

• Παράδειγμα:



○ Έστω το σήμα $x(t)$ με μετασχ. Fourier $X(f)$, ο οποίος έχει μη μηδενικές τιμές στο διάστημα $[-B, B]$. Βρείτε το ρυθμό Nyquist για τα παρακάτω σήματα

(α') $x(t)$

(γ') $x(t)e^{j2\pi f_0 t}$

(ε') $\frac{dx(t)}{dt}$

(β') $x(t - t_0)$

(δ') $x(t - t_0) + x(t + t_0)$

(ζ') $x(t)x(t)$

(ζ') $x(t) * x(t)$

α) Ρυθμός Nyquist: $2f_{max} = 2B$

β) Είναι $x(t - t_0) \xrightarrow{F} X(f)e^{-j2\pi f t_0}$, άρα Ρυθμός Nyquist: $2B$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $[-B, B] \cdot (-\infty, +\infty)$

γ) Είναι $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \xrightarrow{F} X(f - f_0)$, άρα Ρυθμός Nyquist: $2(f_0 + B)$

δ) Είναι $x(t - t_0) + x(t + t_0) \xrightarrow{F} 2X(f) \cos(2\pi f t_0)$, όφειλετε (B) : $2B$

ε) Είναι $x'(t) \xrightarrow{F} (j2\pi f)X(f)$, όφειλετε (B, δ) : $2B$

στ) Είναι $x^2(t) \xrightarrow{F} X(f) * X(f)$, από ιδιότητα εύρους, Ρυθμός Nyquist: $4B$

ζ) Είναι $x(t) * x(t) \xrightarrow{F} X^2(f)$, ρυθμός Nyquist: $2B$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

