

# HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 21<sup>Η</sup>

- Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες



- Συσχετίσεις (review...)

- Περιοδική Συσχέτιση

$$\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t)y(t + \tau)dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Σήματα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)y(t + \tau)dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- Σήματα Ισχύος (απεριοδικά)

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)x(t + \tau)dt$$

$$\phi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t)y(t + \tau)dt, \quad \phi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^*(t)x(t + \tau)dt$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier των συσχετίσεων
- Θα λάβουμε ιδιαίτερη βοήθεια σχετικά με τα σήματα ισχύος που δεν έχουν μετασχηματισμό Fourier
  - Εξίσου σημαντικές είναι όμως και για τα σήματα ενέργειας
- Ας προσπαθήσουμε να δούμε αν οι φασματικές πυκνότητες σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς *Fourier* των σημάτων
- Ας ξεκινήσουμε με τα τελευταία (σήματα ενέργειας)
- Ο μετασχ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Spectral Density – ESD)
- Ο μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο σημάτων ενέργειας ονομάζεται **Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας** (Energy Interspectral Density – EID)
- Μας πληροφορούν για την **κατανομή** της ενέργειας σημάτων στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

- Είναι

$$\begin{aligned}
 F\{\phi_x(\tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)x(t+\tau) dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) (X(f) e^{j2\pi ft}) dt \\
 &= X(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = X(f) X^*(f) = |X(f)|^2
 \end{aligned}$$

- Άρα ο μετ. Fourier της αυτοσυσχέτισης ενός σήματος ενέργειας ισούται με  $|X(f)|^2$

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Παρατηρήστε ότι πρόκειται για πραγματική, θετική συνάρτηση της συχνότητας, και ανεξάρτητη της αρχικής φάσης του σήματος

- Ιδιότητες

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f), \quad x(t) \in \mathfrak{R}$$

$$\Phi_x(f) \geq 0, \quad \forall f$$

- Φασματικές Πυκνότητες
- Φασματική Πυκνότητα Ενέργειας

$$\phi_x(\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = |X(f)|^2$$

- Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\phi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

- Αν θέσουμε  $\tau = 0$ , παίρνουμε

$$\begin{aligned} \phi_x(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = E_x \end{aligned}$$

Parseval

- Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df = E_x$$

- Βλέπουμε ότι η φασματική πυκνότητα ενέργειας μας περιγράφει πράγματι πως κατανέμεται η ενέργεια του σήματος στο χώρο της συχνότητας

- **Φασματικές Πυκνότητες**
- Διαφασματική Πυκνότητα Ενέργειας
- Οι ετεροσυσχετίσεις σημάτων ενέργειας έχουν μετασχ. Fourier τις περίφημες **Διαφασματικές Πυκνότητες Ενέργειας**
- Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι

$$\phi_{xy}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$$

$$\phi_{yx}(\tau) \leftrightarrow \Phi_{yx}(f) = Y^*(f)X(f)$$

- Παρατηρήστε ότι αφού

$$\phi_{xy}(\tau) = \phi_{yx}(-\tau)$$

ισχύει ότι

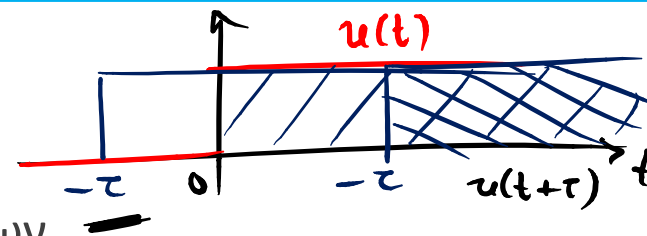
$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$$

όπως προβλέπεται από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier

## • Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε την ετεροσυσχέτιση  $\phi_{xy}(\tau)$  των σημάτων



$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad y(t) = e^{-2at}u(t), \quad a > 0$$

(α) απ'ευθείας και (β) μέσω της διαφασματικής πυκνότητας ενέργειας τους,  $\Phi_{xy}(f)$

(α) Είναι

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-2a(t+\tau)}u(t+\tau)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-2at} \cdot e^{-2a\tau}u(t)u(t+\tau)dt \\ &= e^{-2a\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3at}u(t)u(t+\tau)dt \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } u(t) = 1, \boxed{t > 0}, \quad u(t+\tau) = 1, \quad t+\tau > 0 \Rightarrow \boxed{t > -\tau}$$

## • Φασματικές Πυκνότητες

### • Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad -\tau > 0 \Rightarrow \underline{\tau < 0} : \quad \varphi_{xy}(\tau) &= e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at} \cdot 1 \cdot 1 \, dt = \\
 &= e^{-2a\tau} \int_{-\tau}^{+\infty} e^{-3at} \, dt = e^{-2a\tau} \left[ \frac{1}{-3a} e^{-3at} \right]_{-\tau}^{+\infty} = -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left( e^{-3at} \right)_{-\tau}^{+\infty} \\
 &= -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-3at} - e^{-3a(-\tau)} \right) = -\frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \left( 0 - e^{3a\tau} \right) \\
 &= \frac{1}{3a} e^{-2a\tau} \cdot e^{3a\tau} = \frac{1}{3a} e^{a\tau}, \quad \tau < 0. = \frac{1}{3a} e^{a\tau} u(-\tau).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad -\tau < 0 \Rightarrow \underline{\tau > 0} : \quad \varphi_{xy}(\tau) &= e^{-2a\tau} \int_0^{+\infty} e^{-3at} \, dt = e^{-2a\tau} \left[ \frac{1}{-3a} e^{-3at} \right]_0^{+\infty} \\
 &= e^{-2a\tau} \frac{1}{-3a} (-1) = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau}, \quad \tau > 0 = \frac{1}{3a} e^{-2a\tau} u(\tau).
 \end{aligned}$$

$$\text{Συνολικά,} \quad \varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a} \left( e^{-2a\tau} u(\tau) + e^{a\tau} u(-\tau) \right).$$



## • Φασματικές Πυκνότητες

• Παράδειγμα:

$$(P) \quad \phi_{xy}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} \varphi_{xy}(\tau) \quad \Bigg| \quad \text{Είναι} \quad \phi_{xy}(f) = X^*(f) Y(f)$$

με  $x(t) = e^{-at} u(t)$  και  $y(t) = e^{-2at} u(t)$ . Από νίκες Ιευγών Μ.Φ.

έχουμε :

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \rightarrow X^*(f) = \frac{1}{a - j2\pi f}$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} Y(f) = \frac{1}{2a + j2\pi f}$$

$$\text{Οπότε} \quad \phi_{xy}(f) = X^*(f) Y(f) = \frac{1}{(a - j2\pi f)(2a + j2\pi f)} = \frac{A}{a - j2\pi f} + \frac{B}{2a + j2\pi f}$$

$$\text{με} \quad A = \frac{1}{2a + j2\pi f} \Bigg|_{j2\pi f = a} = \frac{1}{3a} \quad \text{και} \quad B = \frac{1}{a - j2\pi f} \Bigg|_{j2\pi f = -2a} = \frac{1}{3a}$$

$$\text{Τέλος,} \quad \phi_{xy}(f) = \frac{1}{3a} \left( \frac{1}{a - j2\pi f} + \frac{1}{2a + j2\pi f} \right) \xleftrightarrow{F^{-1}} \varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{3a} \left( e^{a\tau} u(-\tau) + e^{-2a\tau} u(\tau) \right).$$

- **Φασματικές Πυκνότητες**

- Φασματική Πυκνότητα Ισχύος - Περιοδικά Σήματα

- Για τα περιοδικά σήματα, μπορούμε να δουλέψουμε όμοια με τη διαδικασία υπολογισμού του μετασχ. Fourier των περιοδικών σημάτων

- Ας ξεκινήσουμε με την περιοδική αυτοσυσχέτιση

- Δείξαμε ότι

$$\phi_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$$

Parseval ξανά!:

$$\phi_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = P_x$$

και σύμφωνα με όσα ξέρουμε, ο μετασχ. Fourier της θα είναι

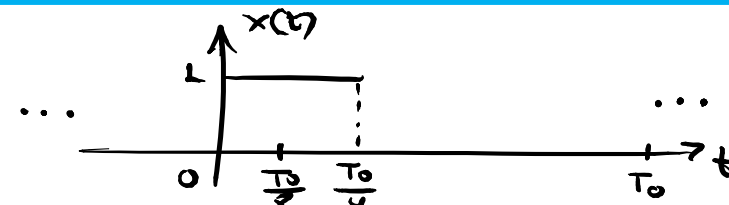
$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

- Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντελεστές  $|X_k|^2$  μπορούν να προκύψουν δειγματοληπτώντας τη φασματική πυκνότητα **ενέργειας μιας περιόδου** του περιοδικού σήματος, δηλ.

$$|X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \Phi_x(f, T_0) \Big|_{f=k f_0}$$

## • Φασματικές Πυκνότητες

### • Παράδειγμα:



- Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του περιοδικού σήματος που εκφράζεται σε μια περίοδο ως

$$x(t, T_0) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{T_0}{4} \\ 0, & \frac{T_0}{4} < t < T_0 \end{cases}$$

Θεωρώ μια περίοδο του περιοδικού σήματος,  $x(t, T_0)$ . Είναι

$$x(t, T_0) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T_0}{8}}{\frac{T_0}{4}}\right) \xleftrightarrow{F} X(f, T_0) = \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(\frac{T_0}{4} \cdot f\right) e^{-j 2\pi f \frac{T_0}{8}}$$

$$= \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(\frac{T_0}{4} \cdot f\right) e^{-j n f \frac{T_0}{4}} \quad \text{Λεα} \quad \Phi_x(f, T_0) = |X(f, T_0)|^2$$

$$= \left| \frac{T_0}{4} \text{sinc}\left(\frac{T_0}{4} \cdot f\right) e^{-j n f \frac{T_0}{4}} \right|^2 = \left(\frac{T_0}{4}\right)^2 \left| \text{sinc}\left(\frac{T_0}{4} f\right) \right|^2 \cdot \left| e^{-j n f \frac{T_0}{4}} \right|^2$$

• Φασματικές Πυκνότητες

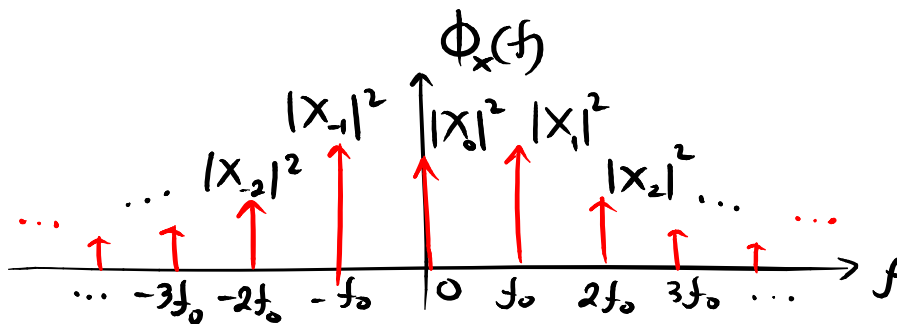
• Παράδειγμα:

$$= \frac{T_0^2}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT_0}{4}\right). \text{ Οπότε } |X_k|^2 = \frac{1}{T_0^2} \left( \frac{T_0^2}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{fT_0}{4}\right) \right) \Big|_{f=kf_0}$$

$$= \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kf_0 T_0}{4}\right) = \frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right).$$

Τελικά,

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{\frac{1}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right)}^{|X_k|^2} \cdot \delta(f - kf_0), \text{ με } f_0 = \frac{1}{T_0}.$$



← Φασματική Πυκνότητα  
 Ισχύος των περιοδικών  
 σήματων

## • Φασματικές Πυκνότητες

• Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Περιοδικά Σήματα

• Ευθέως ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος αποτελεί το μετασχ. Fourier της ετεροσυσχέτισης δυο περιοδικών σημάτων

$$\Phi_{xy}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k^* Y_k \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k Y_k^* \delta(f - kf_0)$$

με

$$X_k = \frac{1}{T_0} X(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

$$Y_k = \frac{1}{T_0} Y(f, T_0) \Big|_{f=kf_0}$$

όπως ήδη γνωρίζουμε

## • Φασματικές Πυκνότητες

- Διαφασματική Πυκνότητα Ισχύος – Απεριοδικά Σήματα
- Ως τώρα δείξαμε ότι οι φασματικές πυκνότητες μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Fourier των σημάτων
- Για απεριοδικά σήματα ισχύος, κάτι τέτοιο δεν ισχύει! ☹
- Μπορεί κανείς να δείξει ότι για σήματα ισχύος ισχύει η σχέση

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2$$

με

$$X(f, T) = F \left\{ x(t) \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right) \right\}$$

δηλ. το μετασχ. Fourier ενός τμήματος του σήματος ισχύος, διάρκειας  $T$

- Το κακό είναι ότι το παραπάνω όριο μπορεί να μην υπάρχει!
- Αναγκαστικά λοιπόν η μελέτη των σημάτων ισχύος στο χώρο της συχνότητας θα γίνεται μέσω του μετασχ. Fourier της συσχέτισής τους
  - ...και όχι μέσω του μετασχ. Fourier των ίδιων των σημάτων ισχύος

- Φασματικές Πυκνότητες

- Παράδειγμα:

- Υπολογίστε τη Φασματική Πυκνότητα Ισχύος του σήματος  $x(t) = u(t)$

$$\text{Δείξατε ότι } \varphi_x(\tau) = \frac{1}{2}, \forall \tau$$

$$\text{Οπότε } \Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\} = \frac{1}{2} \delta(f).$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση  $h(t)$  και την απόκριση συχνότητας  $H(f)$ , με είσοδο  $x(t)$  και έξοδο  $y(t)$

- Θα συμβολίζουμε με  $\phi_x(\tau)$ ,  $\phi_y(\tau)$  τις αυτοσυσχετίσεις εισόδου και εξόδου και με  $\Phi_x(f)$ ,  $\Phi_y(f)$  τις αντίστοιχες πυκνότητες

- Ξέρουμε ότι

$$\phi_y(\tau) = y(\tau) * y(-\tau)$$

$$= (x(\tau) * h(\tau)) * (x(-\tau) * h(-\tau))$$

$$= (x(\tau) * x(-\tau)) * (h(\tau) * h(-\tau))$$

$$= \phi_x(\tau) * \phi_h(\tau)$$

$$x(at) * y(at) = \frac{1}{|a|} c_{xy}(at)$$

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$



- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για σήματα ενέργειας:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = |X(f)|^2|H(f)|^2 = |Y(f)|^2$$

όπως αναμενόταν

- Για περιοδικά σήματα:

$$\Phi_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |Y_k|^2 \delta(f - kf_0)$$

με

$$Y_k = X_k H(kf_0)$$

- Οπότε

$$\Phi_y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 |H(kf_0)|^2 \delta(f - kf_0)$$

- **Συσχετίσεις, Πυκνότητες, και ΓΧΑ συστήματα**

- Στο χώρο του Fourier

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f)$$

- Για σήματα ισχύος:

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f)\Phi_h(f) = \Phi_x(f)|H(f)|^2$$

μια και δεν υπάρχει πάντα σχέση των αυτοσυσχετίσεων των σημάτων ισχύος με το μετασχ. Fourier τους

- Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να προκύψουν και για τις ετεροσυσχετίσεις και τις διαφασματικές πυκνότητες

# ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

