

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 19^Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace



• ΓΧΑ Συστήματα στο χώρο του Laplace (review...)

- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^N s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^M s^l b_l X(s)$$

- Ρητή συνάρτηση μεταφοράς

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l s^l}{\sum_{i=0}^N a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^M (s + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (s + \kappa_i)}, \quad R_H$$

- Λύσαμε τρία προβλήματα

☐ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

☐ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

☐ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

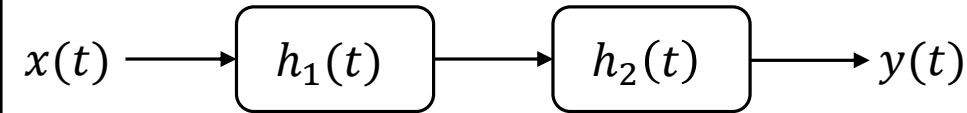
○ Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία

○ Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

- Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι **ευσταθές** αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του

• Διατάξεις Συστημάτων

• Διάταξη σε σειρά

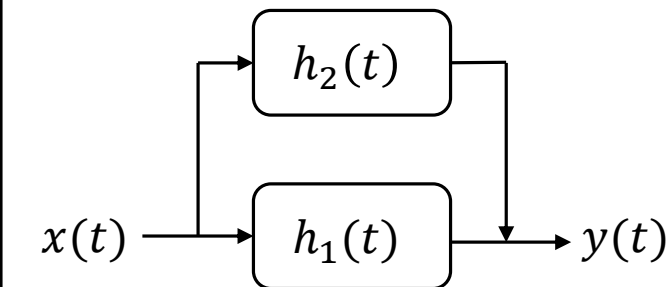


$$y(t) = \underbrace{h_1(t) * h_2(t)}_{h_{total}(t)} * x(t)$$

• Στο χώρο του Laplace:

$$Y(s) = \underbrace{H_1(s)H_2(s)}_{H_{total}(s)}X(s)$$

• Διάταξη σε παραλληλία



$$\begin{aligned} y(t) &= (h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)) \\ &= \underbrace{(h_1(t) + h_2(t))}_{h_{total}(t)} * x(t) \end{aligned}$$

• Στο χώρο του Laplace:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)X(s) + H_2(s)X(s) \\ &= \underbrace{(H_1(s) + H_2(s))}_{H_{total}(s)}X(s) \end{aligned}$$

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

- Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = \infty$
- Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου $H(s) = 0$
- Έχουμε ήδη δει ότι οι ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς αποτελούν πόλους και μηδενικά του συστήματος
 - Είναι μόνο αυτά??

- Για παράδειγμα, έστω $H(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+1)}$, $\sigma > 3$
- Έχει δυο πόλους $s = 3, s = -1$, και ένα μηδενικό $s = 2$
- Προσέξτε όμως ότι

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\cancel{s} \left(1 - \frac{2}{s}\right)}{s^2 \left(1 - \frac{3}{s}\right) \left(1 + \frac{1}{s}\right)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{2}{s}\right)}{s \left(1 - \frac{3}{s}\right) \left(1 + \frac{1}{s}\right)} = 0$$

- Άρα υπάρχει **ένα** έξτρα μηδενικό στο άπειρο!
- Άρα το σύστημα έχει **2 πόλους και 2 μηδενικά**!

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

• Γενικότερα

$$H(s) = A \frac{\prod_{i=1}^M (s - c_i)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} = A \frac{s^M \prod_{i=1}^M \left(1 - \frac{c_i}{s}\right)}{s^N \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{d_k}{s}\right)} = A s^{M-N} \frac{\prod_{i=1}^M \left(1 - \frac{c_i}{s}\right)}{\prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{d_k}{s}\right)}$$

- Αν $M > N \Leftrightarrow M - N > 0$, και τότε $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \infty$, άρα υπάρχουν $M - N$ πόλοι
- Αν $M < N \Leftrightarrow M - N < 0$, και τότε $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$, άρα υπάρχουν $N - M$ μηδενικά
- Αν $M = N$, τότε δεν υπάρχουν επιπλέον πόλοι ή μηδενικά στο άπειρο

• Άρα :

- Σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, το πλήθος των πόλων ισούται με το πλήθος των μηδενικών

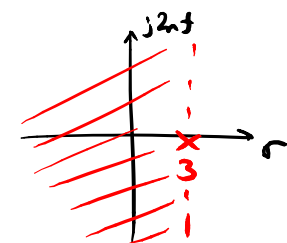
$$\# \text{ πόλων} = \# \text{ μηδενικών}$$

• Πόλοι και Μηδενικά Συνάρτησης Μεταφοράς

• Παράδειγμα:

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$ και έναν πόλο στη θέση $s = 3$

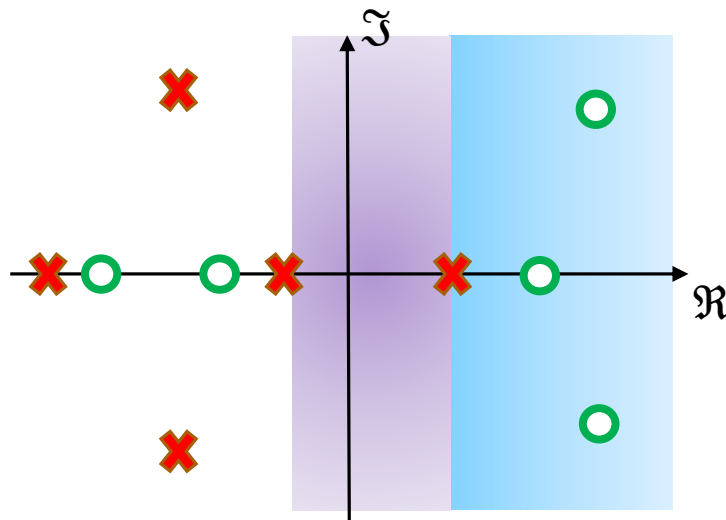
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι πεπερασμένης διάρκειας?
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αριστερόπλευρο σήμα?
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι δεξιόπλευρο σήμα?
- Μπορεί η κρουστική απόκριση να είναι αμφίπλευρο σήμα?



- α) Όχι, γιατί τα πεπερασμένα διαρκείας σήματα δεν έχουν πόλους.
- β) Ναι, αφού το $\int |h(t)| dt < +\infty$ σημαίνει ότι το ROC περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, άρα το ROC είναι προς τα αριστερά:
Προϋπόθεση για το παραπάνω είναι να μην υπάρχει άλλος πόλος με $-\infty < \sigma_p < 0$ ή να υπάρχουν πόλοι μόνο με $0 < \sigma_p < 3$.
- γ) Όχι, λόγω β).
- δ) Ναι, αν υπάρχουν πόλοι με $-\infty < \sigma_p < 0$.

• Ευστάθεια και Αιτιατότητα

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι μια **ρητή** συνάρτηση μεταφοράς αντιστοιχεί σε αιτιατό, αντι-αιτιατό, ή μη αιτιατό σύστημα (κρουστική απόκριση)
 - Ανάλογα με το πεδίο σύγκλισης
- Έστω το ακόλουθο διάγραμμα πόλων-μηδενικών που αντιστοιχεί σε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς



- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα **αιτιατό**?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι το σύστημα **ευσταθές**?
- Για ποιο πεδίο σύγκλισης είναι **και** αιτιατό **και** ευσταθές? 😞
- Για να είναι ένα σύστημα **ευσταθές και αιτιατό**, πρέπει όλοι οι πόλοι να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου
- Εναλλακτικά, όλοι οι πόλοι θα πρέπει να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος

• Αντίστροφο Σύστημα

- Το αντίστροφο σύστημα ενός δοθέντος ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h(t)$ ικανοποιεί τη σχέση:

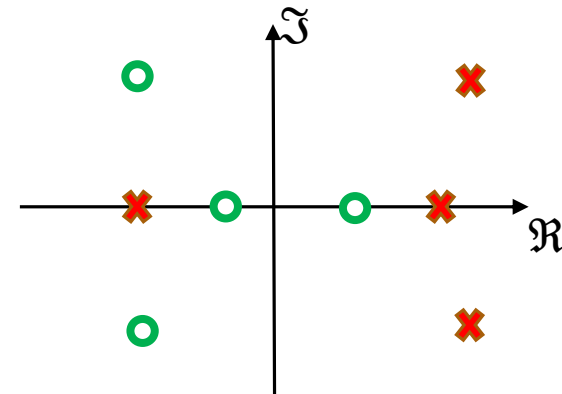
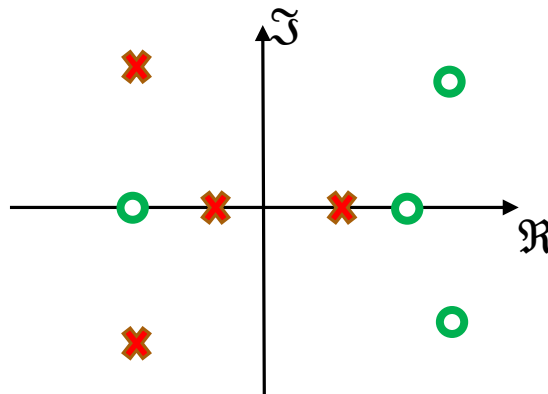
$$h(t) * h_{inv}(t) = \delta(t)$$

- Στο χώρο του Laplace:

$$H(s)H_{inv}(s) = 1, \quad R_H \cap R_{H_{inv}} \neq \emptyset$$

- Στο αντίστροφο σύστημα, οι πόλοι και τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται μηδενικά και πόλοι του αντιστρόφου συστήματος, αντίστοιχα

$$H(s) = A \frac{\prod_{i=1}^M (s - c_i)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \rightarrow H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}{\prod_{i=1}^M (s - c_i)}$$

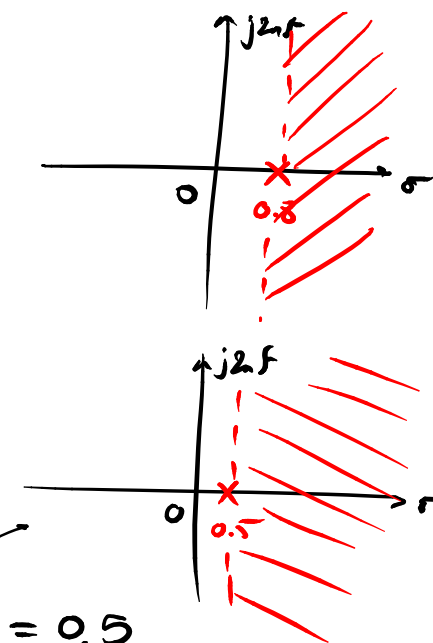


• Αντίστροφο Σύστημα

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s - \frac{4}{5}}, \quad \sigma > \frac{4}{5} = 0.8$$



Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

Είναι $H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s - \frac{4}{5}}{s - \frac{1}{2}}, \quad R_{H_{inv}} = ? \quad \sigma > \frac{1}{2} = 0.5$

γιατί $R_{H_{inv}} \cap R_H \neq \emptyset$. Η επιλογή $\sigma < \frac{1}{2}$ θα δίνει το κενό σύνολο.

Οότε

$$\frac{s - \frac{4}{5}}{s - \frac{1}{2}} \Bigg| \frac{s - \frac{1}{2}}{1} = \frac{s - \frac{4}{5} - (s - \frac{1}{2})}{1} = \frac{0 - \frac{3}{10}}{1} = -\frac{3}{10}$$

είναι $H_{inv}(s) = 1 - \frac{\frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}, \quad \sigma > \frac{1}{2}$

Πίνακας
Συγγών $\downarrow L^{-1}$

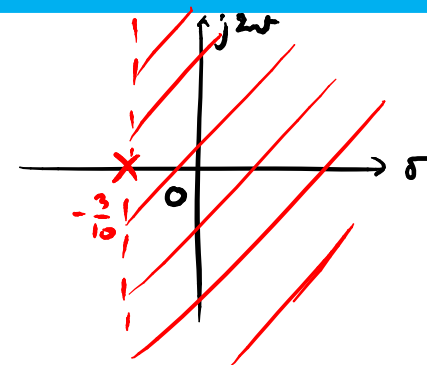
$$h_{inv}(t) = \delta(t) - \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t)$$

• Αντίστροφο Σύστημα

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με

$$H(s) = \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{3}{10}}, \quad \sigma > -\frac{3}{10}$$



Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_{inv}(t)$.

Είναι $H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s + \frac{3}{10}}{s - \frac{1}{2}}$, $R_{H_{inv}} = ?$ Είτε $\sigma > \frac{1}{2}$ είτε $\sigma < \frac{1}{2}$

το $H_{inv}(s)$ ορίζεται αφού $R_{H_{inv}} \cap R_H \neq \emptyset$.

• $\sigma > \frac{1}{2}$: $H_{inv}(s) = \frac{s}{s - \frac{1}{2}} + \frac{3}{10} \frac{1}{s - \frac{1}{2}} = s \underbrace{\frac{1}{s - \frac{1}{2}}}_{X(s)} + \frac{3}{10} \frac{1}{s - \frac{1}{2}} \xrightarrow{L^{-1}}$

$\xrightarrow{L^{-1}} h_{inv}(t) = \frac{d}{dt} \left[e^{\frac{1}{2}t} u(t) \right] + \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t)$

$sX(s) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{d}{dt} x(t)$

• Αντίστροφο Σύστημα

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
 &= (e^{\frac{1}{2}t})' u(t) + u'(t) e^{\frac{1}{2}t} + \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} u(t) + \underbrace{e^{\frac{1}{2}t} \cdot \delta(t)}_{e^0 \cdot \delta(t)} + \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t) \\
 &= \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} u(t) + \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t) + \delta(t) = \delta(t) + \frac{8}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(t).
 \end{aligned}$$

ΑΙΤΙΑΤΟ: ✓
ΕΥΣΤΑΘΕΣ: X

• $\sigma < \frac{1}{2}$: $H_{inv}(s) = s \underbrace{\frac{1}{s - \frac{1}{2}}}_{sX(s)} + \frac{3}{10} \frac{1}{s - \frac{1}{2}}$, $\underline{\underline{\sigma < \frac{1}{2}}}$

$\downarrow L^{-1}$

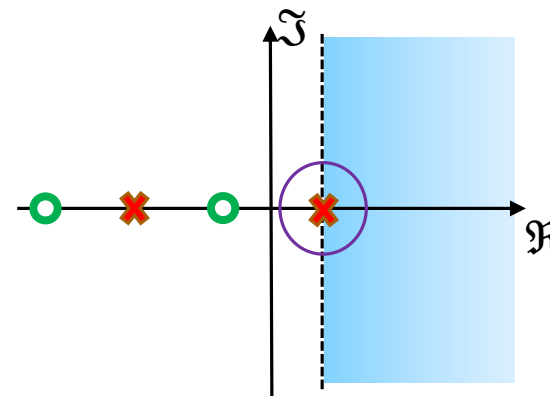
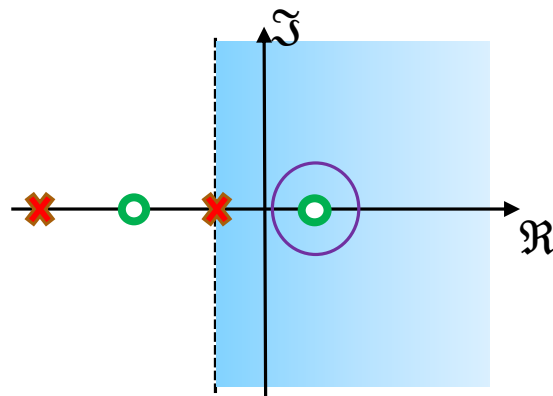
$$\begin{aligned}
 h_{inv}(t) &= \frac{d}{dt} (-e^{\frac{1}{2}t} u(-t)) - \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(-t) \\
 &= -(e^{\frac{1}{2}t})' u(-t) - u'(-t) e^{\frac{1}{2}t} - \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(-t) \\
 &= -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} u(-t) - \underbrace{\delta(t) e^{\frac{1}{2}t}}_{\delta(t)} - \frac{3}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(-t) \\
 &= \delta(t) - \frac{8}{10} e^{\frac{1}{2}t} u(-t).
 \end{aligned}$$

ΑΙΤΙΑΤΟ: X

ΕΥΣΤΑΘΕΣ: ✓

• Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

- Από το προηγούμενο παράδειγμα, είδαμε ότι μπορεί να μην μπορούμε να έχουμε ευσταθές **και** αιτιατό αντίστροφο σύστημα (ταυτόχρονα), ακόμα κι αν το σύστημά μας είναι ευσταθές **και** αιτιατό!
- **Ερώτηση**: τι πρέπει να ισχύει για ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έτσι ώστε αν αυτό είναι ευσταθές και αιτιατό, να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα?
- Ας το δούμε με ένα παράδειγμα



- Ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα **μόνον** όταν όλοι πόλοι και όλα τα μηδενικά του συστήματος βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο!
- Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ελάχιστης φάσης (minimum phase)**
 - ...για λόγους που δεν είναι εμφανείς 😊

• Συστήματα All-pass

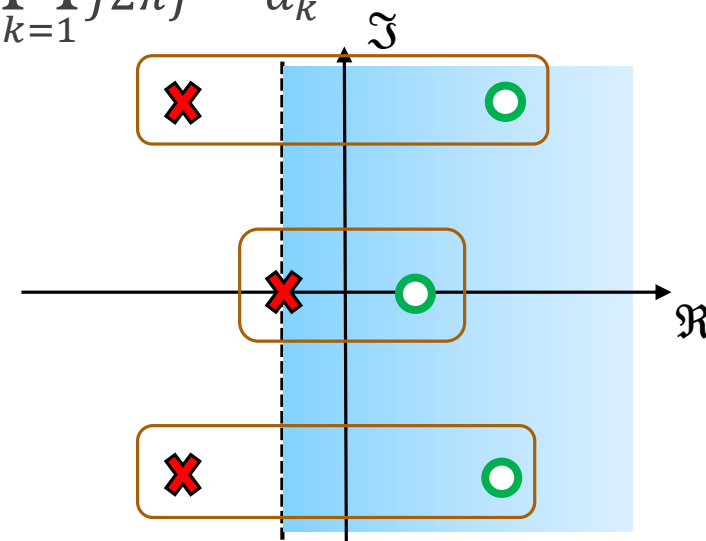
- Μια επίσης σημαντική κατηγορία συστημάτων είναι τα συστήματα all-pass
 - Ολοπερατά (in Greek ☺), δηλ. αφήνουν να περάσουν **όλες** οι συχνότητες στην έξοδο
- Η απόκριση πλάτους τους δίνεται ως

$$|H_{ap}(f)| = 1, \quad \forall f$$

- Προφανώς η απόκριση φάσης τους είναι μη σταθερή
- Στο χώρο του Laplace:

$$H_{ap}(s) = \prod_{k=1}^M \frac{s + a_k^*}{s - a_k} \Rightarrow H_{ap}(f) = \prod_{k=1}^M \frac{j2\pi f + a_k^*}{j2\pi f - a_k}$$

- Οι πόλοι και τα μηδενικά ενός all-pass συστήματος βρίσκονται σε ζεύγη $(a_k, -a_k^*)$, δηλ. εκατέρωθεν του φανταστικού άξονα
 - Με ίδιο φανταστικό αλλά αντίθετο πραγματικό μέρος



- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση x All-pass**

- Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε κάθε ΓΧΑ σύστημα σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα all-pass:

$$H(s) = H_{ap}(s)H_{min}(s)$$

- Γιατί είναι χρήσιμη μια τέτοια παραγοντοποίηση?
- Απόκριση πλάτους:

$$|H(s)| \Big|_{s=j2\pi f} = |H_{ap}(s)| |H_{min}(s)| \Big|_{s=j2\pi f}$$

δηλ:

$$|H(f)| = |H_{ap}(f)| |H_{min}(f)| = 1 \cdot |H_{min}(f)| = |H_{min}(f)|$$

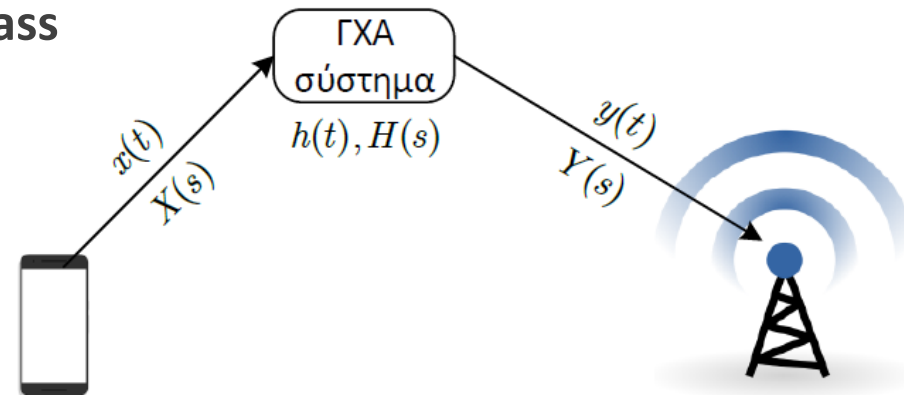
- Το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει **την ίδια απόκριση πλάτους** με το ΓΧΑ σύστημα!
 - Προφανώς όμως δε θα έχει την ίδια απόκριση φάσης
- Απόκριση φάσης:

$$\angle H(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle H_{min}(f)$$

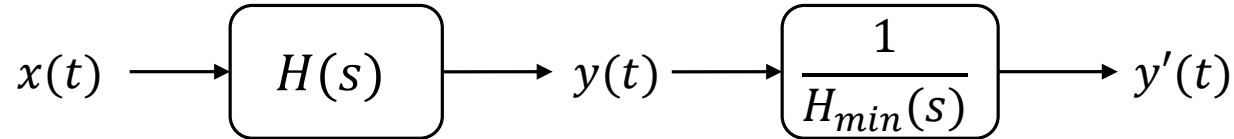
• Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass

• Επιστρέφοντας στο πρόβλημα...

- Αν το σύστημα $\frac{1}{H(s)}$ δεν είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε δεν μπορούμε να το υλοποιήσουμε



- Μπορούμε όμως να υλοποιήσουμε το $\frac{1}{H_{min}(s)}$!!
- Εγγυημένα, το σύστημα αυτό θα είναι ευσταθές και αιτιατό! 😊



- Τι συμβαίνει στην έξοδο της παραπάνω διάταξης?

$$Y(s)' = Y(s) \frac{1}{H_{min}(s)} = H(s)X(s) \frac{1}{H_{min}(s)} = \left[H(s) \frac{1}{H_{min}(s)} \right] X(s)$$

- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|} \frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}} |X(f)| = |X(f)|$$

- **Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass**

- Στο χώρο του Fourier:

$$|Y'(f)| = \cancel{|H(f)|} \frac{1}{\cancel{|H_{min}(f)|}} |X(f)| = |X(f)|$$

- **Πλήρης** ακύρωση της απόκρισης πλάτους του καναλιού!
- Το λαμβανόμενο σήμα έχει **ακριβώς το ίδιο φάσμα πλάτους** με αυτό που έφυγε από τον πομπό! 😊
- Προφανώς, η φάση του ληφθέντος σήματος θα διαφέρει από αυτή του πομπού
- Ας δούμε πόσο:

$$\angle Y'(f) = \angle H(f) - \angle H_{min}(f) + \angle X(f) = \angle H_{ap}(f) + \angle X(f)$$

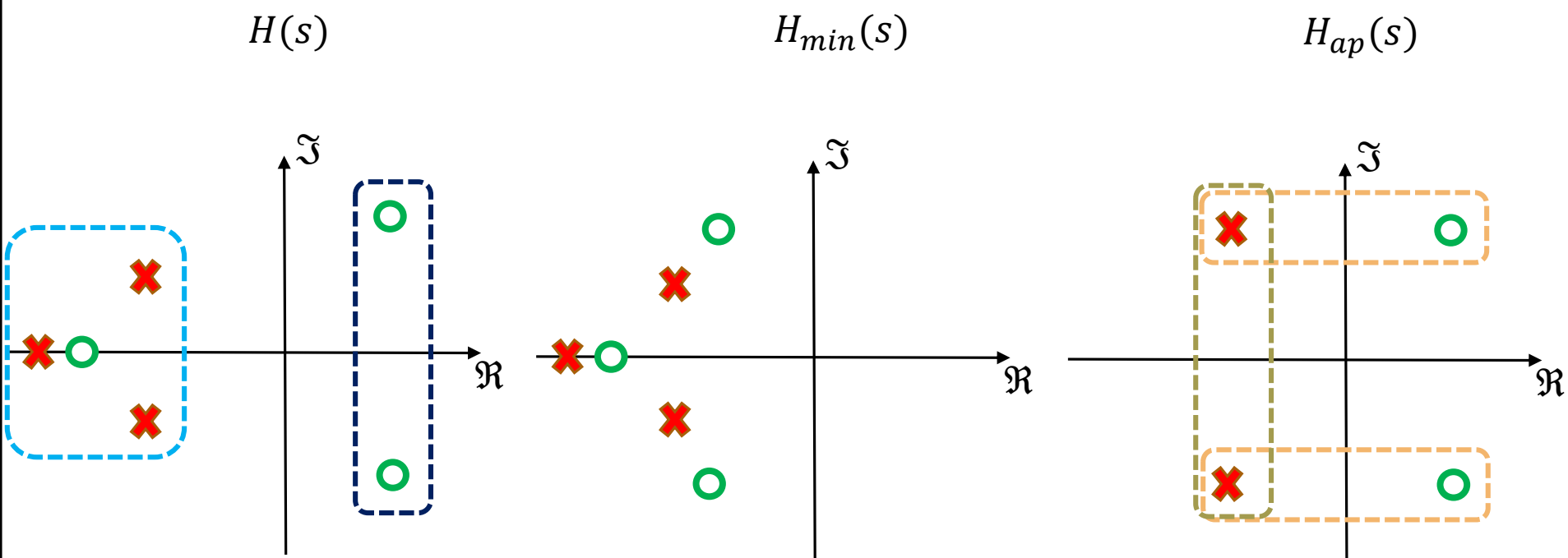
- Ανάλογα με την εφαρμογή, η διαταραχή στη φάση μπορεί να είναι ανεπαίσθητη ή αρκετά σοβαρή
- Σε επικοινωνίες φωνής, δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα...

- Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:

Παραγοντοποίηση σε Ελάχιστης Φάσης και all-pass

1. Οι πόλοι και τα μηδενικά του αριστερού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης.
2. Τα μηδενικά του δεξιού μιγαδικού επιπέδου μεταφέρονται στο σύστημα all-pass. Για να είναι αυτό έγκυρο all-pass σύστημα, προσθέτουμε πόλους σε συμμετρικές θέσεις εκατέρωθεν του άξονα των φανταστικών.
3. Οι πόλοι που προστέθηκαν στο all-pass σύστημα πρέπει να ακυρωθούν στο σύστημα Ελάχιστης Φάσης. Έτσι, προσθέτουμε μηδενικά στο τελευταίο σύστημα, στις ίδιες ακριβώς θέσεις με τους πόλους του all-pass συστήματος.

- Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass
- Πως κάνουμε αυτήν την τόσο σημαντική παραγοντοποίηση?
- Τρια βήματα:



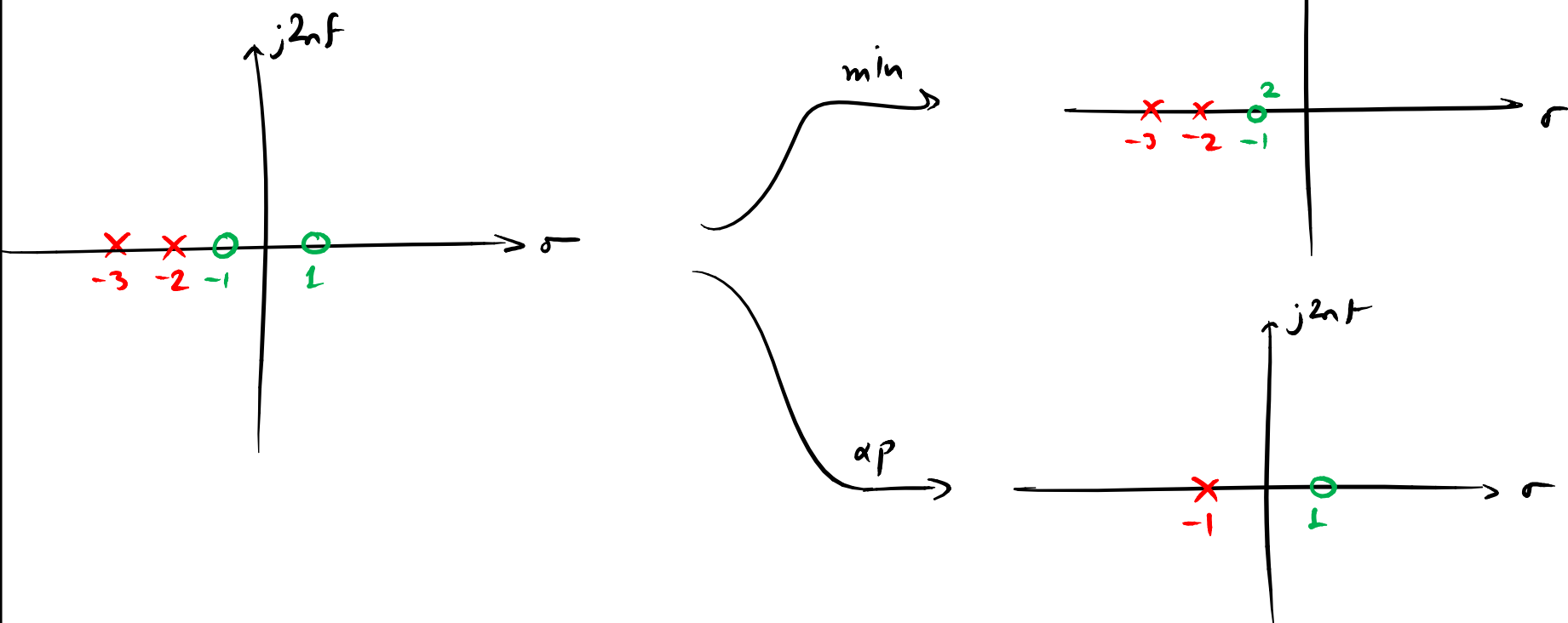
• Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{(s - 1)(s + 1)}{(s + 2)(s + 3)}, \quad \sigma > -2$$

Παραγοντοποιήστε το σε ελάχιστης φάσης και all-pass.



- Παραγοντοποίηση Ελάχιστη Φάση + All-pass

- Παράδειγμα:

$$H(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+2)(s+3)}, \quad \sigma > -2$$

$$H_{\min}(s) = \frac{(s+1)(s+1)}{(s+3)(s+2)}, \quad \sigma > -2 = \frac{(s+1)^2}{(s+3)(s+2)}, \quad \sigma > -2$$

$$H_{\text{ap}}(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)}, \quad \sigma > -1$$

Check:

$$H_{\text{ap}}(s) H_{\min}(s) = \frac{\cancel{s-1}}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{(s+1)^{\cancel{2}}}{(s+3)(s+2)} = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+3)(s+2)} = H(s)$$

✓

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

