ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 18Η

- Συστήματα στο χώρο του Laplace

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace (review…)**

- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Σύστημα ΓΧΑ και αιτιατό $\Leftrightarrow$ **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι **αρχικές συνθήκες** συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

- [ ] Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος
- [ ] Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- [ ] Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και δίνει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα τη συνάρτηση μεταφοράς
  - …και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

- Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} s^i a_i Y(s) = \sum_{l=0}^{M} s^l b_l X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s)}$$

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}, \qquad R_H$$

αποτελείται από πολυώνυμα του s και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = \frac{\prod_{l=1}^{M}(s+\mu_l)}{\prod_{i=1}^{N}(s+\kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (<u>μόνο αν</u> $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s+\kappa_i}, \qquad R_H$$

- Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων, και ελέγχοντας το πεδίο σύγκλισης

❑ Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

○ Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται ως

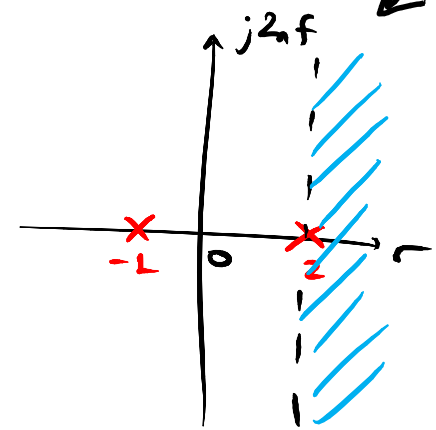
$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

Ζητείται η κρουστική απόκριση, αν το σύστημα είναι αιτιατό.

Το ROC θα είναι "δεξιόπλευρο"

$\Uparrow$

$h(t) = 0,\ t<0$



Είναι

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t)$$

$$\Updownarrow \mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

$$Y(s)(s^2 - s - 2) = X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s-2)(s+1)}$$

Πόλοι: $s = 2$, $s = -1$

με $\sigma > 2$, αφού είναι αιτιατό.

Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος

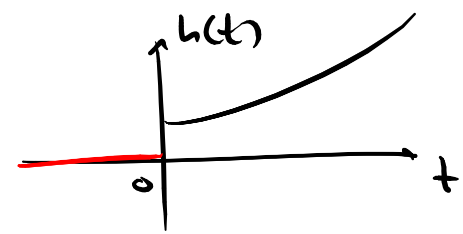
- Παράδειγμα:

Μερικά κλάσματα: $H(s) = \dfrac{A}{s-2} + \dfrac{B}{s+1}$, με $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$

άρα $H(s) = \dfrac{1}{3}\underbrace{\dfrac{1}{s-2}}_{\substack{\bullet\ \underline{\sigma>2} \\ \bullet\ \sigma<2}} - \dfrac{1}{3}\underbrace{\dfrac{1}{s+1}}_{\substack{\bullet\ \underline{\sigma>-1} \\ \bullet\ \sigma<-1}}$, $\sigma > 2$.

$\{\sigma>2\} \cap \{\sigma>-1\} = \{\sigma>2\}$

Οπότε $H(s) = \dfrac{1}{3}\underset{\sigma>2}{\dfrac{1}{s-2}} - \dfrac{1}{3}\underset{\sigma>-1}{\dfrac{1}{s+1}}$, και από γνωστούς πίνακες



έχουμε

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

που είναι αιτιατό $(h(t)=0,\ t<0)$ όπως αναμενόταν.

$e^{at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \dfrac{1}{s-a}$, $\sigma>a$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η σχέση της συνέλιξης στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Laplace

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

και αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και το σήμα εισόδου, θα είναι

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} \frac{\sum_{m=0}^{K} d_m s^m}{\sum_{n=0}^{L} c_n s^n}$$

- Με γνωστές τεχνικές και μεθόδους μπορούμε να βρούμε το σήμα στο χρόνο $y(t)$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

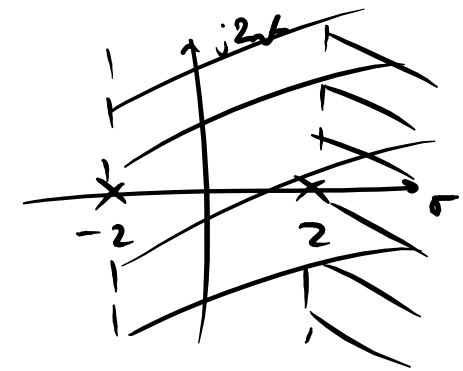
○ Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $\underline{x(t) = e^{-2t}u(t)}$

Βρήκαμε πριν ότι

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)}, \quad \sigma > 2$$

Ξέραμε ότι

$$\left.\begin{array}{l} Y(s) = H(s)X(s) \\ x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \dfrac{1}{s+2}, \quad \sigma > -2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$



$$\Rightarrow Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+1)(s+2)}, \quad R_Y = R_X \cap R_H = \{\sigma > 2\} \cap \{\sigma > -2\}$$
$$= \sigma > 2.$$

Μερικά Κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}, \quad \text{με } A = \frac{1}{12}, \; B = -\frac{1}{3}, \; C = \frac{1}{4}$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος

- Παράδειγμα:

○ Στο ίδιο παράδειγμα με πριν, βρείτε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t) = e^{-2t}u(t)$

Οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}, \quad \sigma > 2$$

$$\frac{\bullet\ \sigma > 2}{\bullet\ \sigma < 2} \qquad \frac{\bullet\ \sigma > -1}{\bullet\ \sigma < -1} \qquad \frac{\bullet\ \sigma > -2}{\bullet\ \sigma < -2}$$

Άρα

$$y(t) = \frac{1}{12}e^{2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-2t}u(t)$$

που είναι δεξιόπλευρο (και αιτιατό) όπως αναμενόταν.

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad \sigma > -a$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

- Ένα σύστημα με **μη** μηδενικές αρχικές συνθήκες **δεν** είναι ΓΧΑ
- Όμως ο *μονόπλευρος* μετασχ. Laplace μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε εξόδους με σχεδόν ίδιο τρόπο λύσης με τα ΓΧΑ συστήματα
  - Θεωρούμε την έξοδο αιτιατή
- Θα έχουμε λοιπόν

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

με

$$\frac{d^n}{dt^n} y(0^-) \neq 0, \qquad n = 0,1, \dots N-1$$

- Η ιδιότητα που εφαρμόζουμε τώρα είναι η

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-)$$

$$\sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(0^-) = s^{n-1} x(0^-) + s^{n-2} x'(0^-) + s^{n-3} x''(0^-) + \cdots + x^{(n-1)}(0^-)$$

Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^n Y(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-)$$

- Παράδειγμα:
  - Λύστε τη διαφορική εξίσωση

$$\underline{\frac{d^2}{dt^2}y(t)} + 5\underline{\frac{d}{dt}y(t)} + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ και είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$

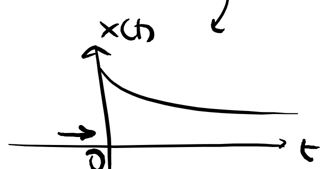
Είναι:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} s^2Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{2-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-) = s^2Y(s) - s\overbrace{y(0^-)}^{2} - s^0\cdot\overbrace{y'(0^-)}^{1}$$

$$= s^2Y(s) - 2s - 1$$

$$\frac{d}{dt}y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sY(s) - \sum_{i=1}^{1} s^{1-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}y(0^-) = sY(s) - s^0y(0^-) = sY(s) - 2$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s) - s^0\cancel{x(0^-)}^{\,0} = sX(s) - 0 = sX(s)$$



$$e^{-4t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+4},\ \sigma > -4$$

❑ Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος

• Παράδειγμα:

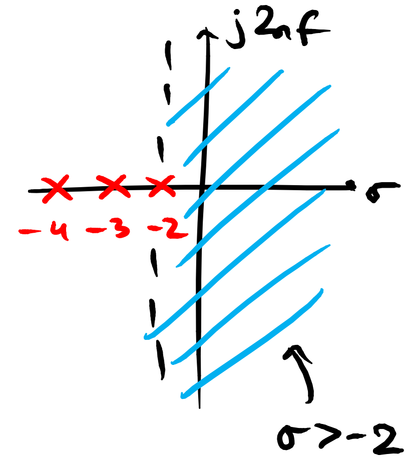
Οπότε:

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5(sY(s) - 2) + 6Y(s) = X(s) + sX(s)$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 5sY(s) - 10 + 6Y(s) = X(s) + sX(s)$$

$$Y(s)(s^2 + 5s + 6) - 2s - 11 = X(s)(1+s) = \frac{s+1}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{\frac{s+1}{s+4} + 2s + 11}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2s^2 + 20s + 45}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$



Άρα

$$Y(s) = \frac{13}{2}\frac{1}{s+2} - 3\frac{1}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{1}{s+4}, \quad \sigma > -2$$

οπότε

$$y(t) = \frac{13}{2}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) - \frac{3}{2}e^{-4t}u(t).$$

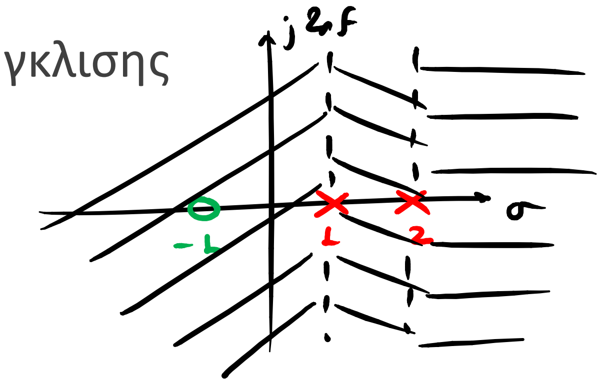
- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**

- Παράδειγμα:

○ Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 - 3s + 2}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης



Είναι $H(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)(s-2)}$, δύο πόλοι: $s=1$
$s=2$

Πεδία Σύγκλισης:
- $\sigma > 2$
- $1 < \sigma < 2$
- $\sigma < 1$

Είναι $H(s) = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-2}$, με $A=3$, $B=-1$, οπότε:

$H(s) = 3\dfrac{1}{s-1} - \dfrac{1}{s-2}$, R_H ένα από τα παραπάνω τρία.

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**

- Παράδειγμα:

- $\sigma > 2$: $H(s) = 3\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s-1}$, $\sigma > 2$
  - $\sigma > 2$ • $\sigma > 1$
  - $\sigma < 2$ • $\sigma < 1$

  $\Rightarrow h(t) = 3e^{2t}u(t) - e^{t}u(t)$.

  Δεξ.

- $\sigma < 1$: $H(s) = 3\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s-1}$, $\sigma < 1$
  - $\sigma > 2$ • $\sigma > 1$
  - $\sigma < 2$ • $\sigma < 1$

  $\Rightarrow h(t) = -3e^{2t}u(-t) + e^{t}u(-t)$

  Αριστ.

- $1 < \sigma < 2$: $H(s) = 3\dfrac{1}{s-2} - \dfrac{1}{s-1}$
  - $\sigma > 2$ • $\sigma > 1$
  - $\sigma < 2$ • $\sigma < 1$

  $\Rightarrow h(t) = -3e^{2t}u(-t) - e^{t}u(t)$.

  Αμφ.

- **Κριτήριο Ευστάθειας Συστήματος στο χώρο του Laplace**
- Ευστάθεια: $|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \quad B_x, B_y \in \Re_+$
- Ισοδύναμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

- Δηλ. η κρουστική απόκριση πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη
- Ισοδύναμα, πρέπει να υπάρχει ο Μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος
- Ισοδύναμα ☺, το πεδίο σύγκλισης του Μετασχ. Laplace πρέπει να περιέχει το φανταστικό άξονα
- Άρα: **ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν ο φανταστικός άξονας περιέχεται στο πεδίο σύγκλισής της συνάρτησης μεταφοράς του**

Συνεχίζεται... ☺