ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 17Η

- Μετασχηματισμός Laplace
- Συστήματα στο χώρο του Laplace

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace (review)

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s)$,	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n-οστη παραγώγιση στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

- **Ο Μονόπλευρος Μετασχ. Laplace**
- Μονόπλευρος μετασχ. Laplace

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Ουσιαστικά αποτελεί το μετασχ. Laplace που ξέρουμε ήδη, αλλά για αιτιατά σήματα
- Κάποιες ιδιότητες είναι λίγο διαφορετικές

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Laplace			
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x(t)\Big]_{t=0}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2}-e^{-sT/2})$	Όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

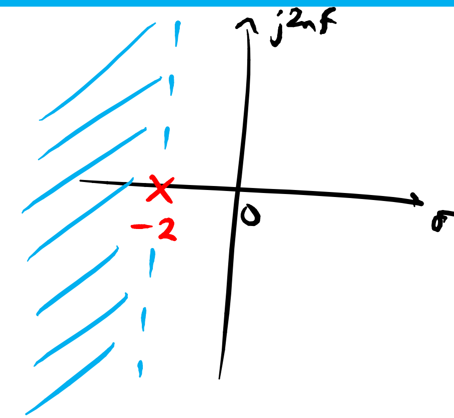
Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Laplace

Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$e^{-a\|t\|},\ a>0$	$\frac{2a}{a^2-s^2}$	$a > \mathrm{Re}\{s\} > -a$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\mathrm{Re}\{s\} < -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -\mathrm{Re}\{a\}$
$t\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s^2-(2\pi f_0)^2}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$t\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2s2\pi f_0}{(s^2+(2\pi f_0)^2)^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$

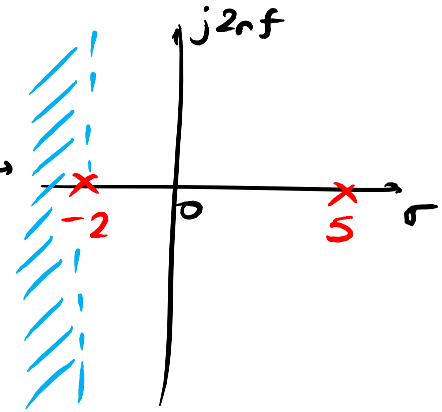
- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2 - 3s - 10}, \qquad \sigma < -2$$



Είναι $X(s) = \dfrac{s+7}{s^2-3s-10} = \dfrac{s+7}{(s+2)(s-5)}$



$= \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s-5}$, με $A = -\dfrac{5}{7}$, $B = \dfrac{12}{7}$

Άρα $X(s) = -\dfrac{5}{7}\underbrace{\dfrac{1}{s+2}}_{\text{Πόλος: } s=-2} + \dfrac{12}{7}\underbrace{\dfrac{1}{s-5}}_{s=5 \text{ : Πόλος}}, \quad \sigma < -2$

R_1: $\sigma < -2$ ή $\sigma > -2$

R_2: $\sigma < 5$ ή $\sigma > 5$

Επιλέγω τέτοια Πεδία έτσι ώστε $R_1 \cap R_2 = \{\sigma < -2\}$.

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Άρα $X(s) = \underbrace{-\frac{5}{7}\frac{1}{s+2}}_{\sigma<-2} + \underbrace{\frac{12}{7}\frac{1}{s-5}}_{\sigma<5}$

Από γνωστά ζεύγη, είναι:

$$x(t) = -\frac{5}{7}\left(-e^{-2t}u(-t)\right) + \frac{12}{7}\left(-e^{5t}u(-t)\right)$$

$$= \frac{5}{7}e^{-2t}u(-t) - \frac{12}{7}e^{5t}u(-t).$$

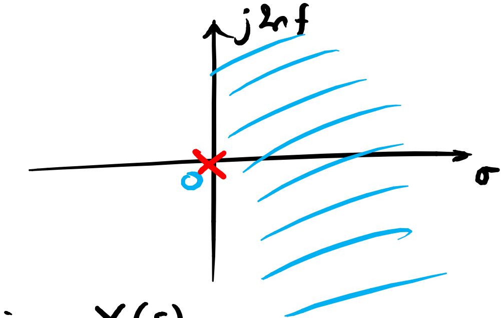
Είναι αριστερόπλευρο, όπως αναμενόταν από το ROC: $\sigma<-2$.

Ζεύγη Ιδιότητες

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}, \sigma > 0$$



Είναι $X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s^2+4)} = \frac{\overbrace{\frac{1}{(s^2+4)}}^{X_1(s)}}{s}$

$= \frac{X_1(s)}{s}$. Ιδιότητα: $\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X_1(s)}{s}$

Από γνωστά ζεύγη: $\sin(2\pi f_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}, \sigma > 0$

Για $2\pi f_0 = 2$, $\sin(2t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{2}{s^2+4}, \sigma > 0$

$\frac{1}{2}\sin(2t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s^2+4}, \sigma > 0$

• Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ζεύγη Ιδιότητες

• Παράδειγμα:

Άρα $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\sin(2\tau)u(\tau)\,d\tau = x(t)$

Είναι

$$x(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\sin(2\tau)\cancel{u(\tau)}^{1,\ \tau>0}\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{0}^{t}\sin(2\tau)\cdot 1\cdot d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2\tau)\right)\Big]_0^t = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t),\quad t>0.$$

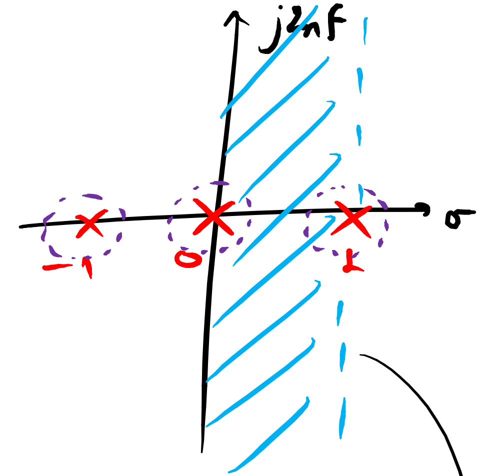
Τελικά,

$$x(t) = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t)\right)u(t).$$

- **Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε τον αντίστροφο Μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{s^2+2}{s^3-s}, \qquad 0 < \sigma < 1$$



Είναι $X(s) = \frac{s^2+2}{s(s^2-1)} = \frac{s^2+2}{s(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$

με $A = -2$, $B = \frac{3}{2}$, $C = \frac{3}{2}$, οπότε:

$$X(s) = -2 \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+1}, \quad 0 < \sigma < 1$$

Πιθανά ROC:

$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s-1}$	$\frac{1}{s+1}$
• $\sigma > 0$	• $\sigma > 1$	• $\sigma > -1$
• $\sigma < 0$	• $\sigma < 1$	• $\sigma < -1$

Επιλέγω τέτοια ROC ώστε η τομή τους να δώσει το $0 < \sigma < 1$.

Από το Πεδίο Σύγκλισης, αναμένω το $x(t)$ να είναι αμφίπλευρο.

Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

- Παράδειγμα:

Άρα

$$X(s) = \underbrace{-2\cdot\frac{1}{s}}_{\sigma>0} + \underbrace{\frac{3}{2}\,\frac{1}{s-1}}_{\sigma<1} + \underbrace{\frac{3}{2}\,\frac{1}{s+1}}_{\sigma>-1}$$

$$-2\cdot\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -2u(t) \qquad \frac{3}{2}\,\frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{3}{2}e^{t}u(-t) \qquad \frac{3}{2}\,\frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{3}{2}e^{-t}u(t)$$

Πίνακες γνωστών ζευγών Μ. Laplace

Άρα

$$x(t) = \overset{\neq 0,\, t>0}{-2u(t)} \overset{\neq 0,\, t<0}{-\frac{3}{2}e^{t}u(-t)} + \overset{\neq 0,\, t>0}{\frac{3}{2}e^{-t}u(t)}.$$

που είναι πράγματι αμφίπλευρο σήμα, όπως αναμενόταν.

- **Θεωρήματα Αρχικής και Τελικής Τιμής**
- **Θεώρημα Αρχικής Τιμής**
- Προϋποθέσεις

i. Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό

ii. Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{s\to\infty} sX(s) = x(0^+)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

- **Θεώρημα Τελικής Τιμής**
- Προϋποθέσεις

i. Το σήμα $x(t)$ είναι αιτιατό

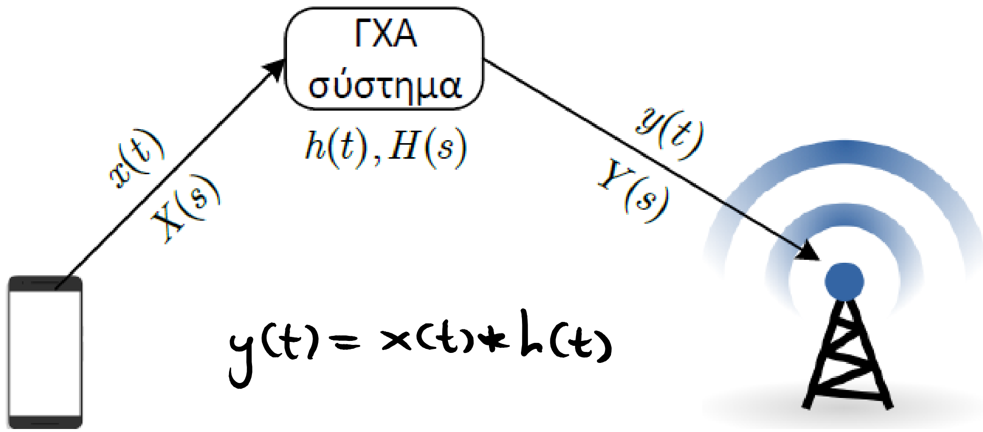
ii. Υπάρχει ο μετασχ. Laplace του, και της παραγώγου του

Τότε ισχύει

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

δεδομένου ότι το παραπάνω όριο υπάρχει (είναι πεπερασμένο)

- **Συστήματα στο χώρο του Laplace**



- Με ιδανικό κανάλι επικοινωνίας, θα είχαμε

$$Y(s) = X(s)$$

- Στην πράξη

$$Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow Y'(s) = \overbrace{\boxed{\frac{1}{\cancel{H(s)}}}}^{H_{inv}(s)}\cancel{H(s)}X(s) = X(s)$$

έτσι ώστε $Y(f) = X(f)$

- Πολλές φορές το $H_{inv}(s)$ δεν είναι πραγματοποιήσιμο, γιατί δεν είναι ευσταθές η/και αιτιατό

- Πως αντιμετωπίζουμε τέτοιες καταστάσεις?

- Μπορούμε έστω να έχουμε $Y(s) \approx X(s) \Rightarrow Y(f) \approx X(f)$?

- **Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος**

- Γνωρίζετε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν

$$|x(t)| < B_x \Rightarrow |y(t)| < B_y, \qquad B_x, B_y \in \Re_+$$

- Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

$$|y(t)| < B_y \Rightarrow |y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau$$

αφού $|x(t)| < B_x$

- **Ευστάθεια Συστήματος**

- Η σχέση

$$|y(t)| < B_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

ισχύει μόνον όταν

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < +\infty$$

δηλ.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty}$$

- Η σχέση αυτή μας λέει ότι η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι **απολύτως ολοκληρώσιμη** και αποτελεί **ικανή συνθήκη** για την **ευστάθεια** του συστήματος!
  - Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι και αναγκαία

- Ταυτόχρονα, η σχέση μας λέει ότι **υπάρχει ο Μ. Fourier** της $h(t)$ μέσω της σύγκλισης του ολοκληρώματος!!

- **Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος**

- Η αιτιατότητα ενός συστήματος έχει να κάνει με τη σχέση αιτίου-αποτελέσματος
  - Ένα σύστημα παράγει εξόδους μόνο αν υπάρχει κάποιο «αίτιο»-είσοδος που το διεγείρει

- Μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη για ένα ΓΧΑ σύστημα που να σχετίζει την κρουστική του απόκριση με την αιτιατότητα (ή μη) του?
  - Ναι!

- Σκεφτείτε ότι όταν εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα ως είσοδος σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα τότε η έξοδος είναι η κρουστική του απόκριση $h(t)$

- Η είσοδος εμφανίζεται για $t = 0$, άρα η έξοδος πρέπει να υπάρξει για $t \geq 0$ αν το σύστημα είναι αιτιατό
  - Παντού αλλού πρέπει να είναι μηδενική!

- Άρα ένα σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$\boxed{h(t) = 0, \qquad t < 0}$$

- **Η συνάρτηση μεταφοράς**

- Όμοια με το μετασχ. Fourier και τα ΓΧΑ συστήματα, το σήμα

$$x(t) = e^{s_0 t} = e^{(\sigma_0 + j2\pi f)t}$$

αποτελεί **ιδιοσυνάρτηση** ενός ΓΧΑ συστήματος

- Η **ιδιοτιμή** του συστήματος είναι

$$H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-s_0 t} dt$$

που προφανώς είναι ο μετασχ. Laplace της κρουστικής απόκρισης του συστήματος για

$$s = s_0$$

- Όπως και στο χώρο του Fourier, έτσι και εδώ θα δώσουμε ένα όνομα σε αυτόν:

συνάρτηση μεταφοράς

Κρουστική απόκριση $h(t) \overset{L}{\longleftrightarrow}$ Συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**
- Πραγματικά ΓΧΑ συστήματα περιγράφονται με διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^{M} \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t)$$

- Για να λύσουμε μια τέτοια διαφορική εξίσωση μοναδικά, χρειαζόμαστε **N το πλήθος βοηθητικές συνθήκες**
  - Όπως π.χ. για να λύσουμε την $f(x) = f'(x) \Rightarrow f(x) = ce^x, c \in \Re$ χρειαζόμαστε μια τιμή της συνάρτησης για να βρούμε το c
  - Π.χ. $f(0) = 2$ και τότε $f(x) = 2e^x$
- Όταν οι βοηθητικές συνθήκες είναι όλες μηδενικές, δηλ.

$$y(t_0) = \frac{d}{dt} y(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} y(t_0) = \cdots = \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t_0) = 0$$

τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ

- **ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις στο χώρο του Laplace**

- Αν επιπλέον οι συνθήκες αυτές αφορούν τη χρονική στιγμή t_0 πριν την εφαρμογή της εισόδου στο σύστημα, τότε ονομάζονται **αρχικές συνθήκες**

- Αν αυτές είναι μηδενικές, τότε το σύστημα είναι ΓΧΑ και αιτιατό, και η κατάσταση του συστήματος ονομάζεται **σε αρχική ηρεμία:**

$$x(t) = 0, t < t_0 \Rightarrow y(t) = 0, t < t_0$$

- Πολλές φορές θεωρούμε ότι μελετάμε το πρόβλημά μας με αναφορά το $t_0 = 0$, οπότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες συμβαίνουν όταν $t = 0^-$
  - Δηλ. ελάχιστα πριν το $t = 0$

- Μας ενδιαφέρουν τρία προβλήματα

- Εύρεση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος
- Εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος
- Εύρεση της εξόδου ενός μη-ΓΧΑ συστήματος
  - Δηλ. ενός συστήματος που **δεν** τελεί σε αρχική ηρεμία
  - Αρχικές συνθήκες μη μηδενικές

Συνεχίζεται... ☺