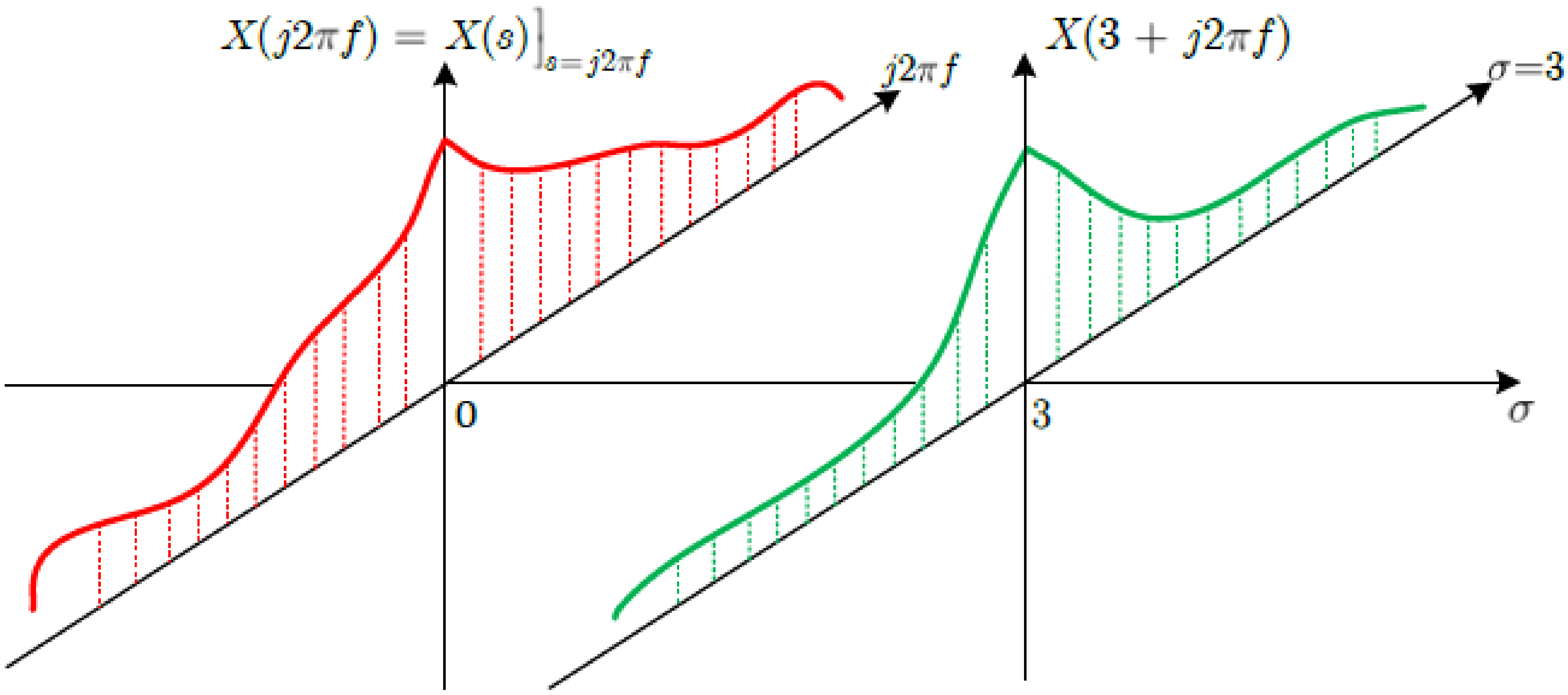
HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 16Η

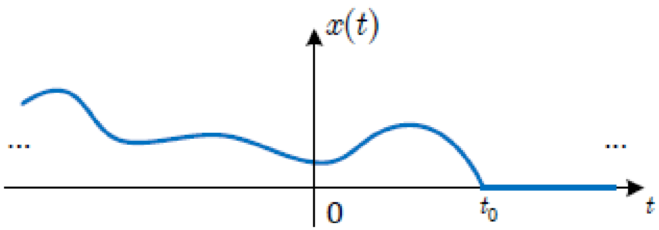
- Μετασχηματισμός Laplace

- **Ο Μετασχηματισμός Laplace (review)**

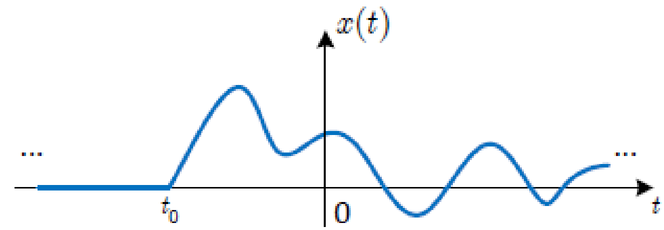


- **Ο Μετασχηματισμός Laplace (review)**
- Ορισμός Μετασχ. Laplace

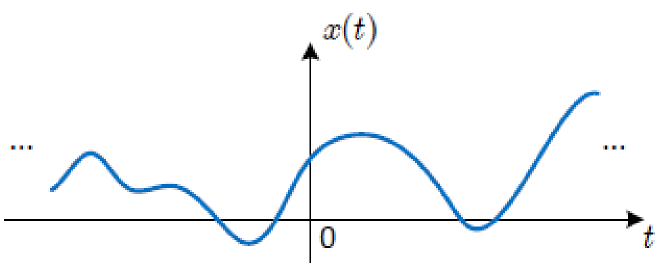
$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}$$



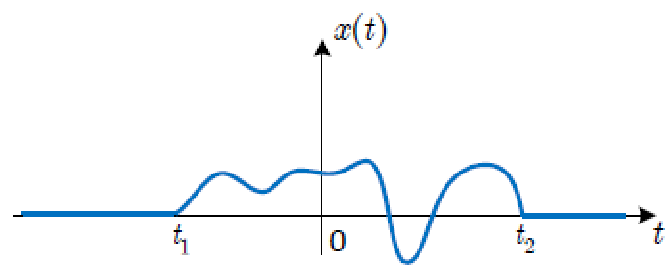
(α') Αριστερόπλευρο σήμα.



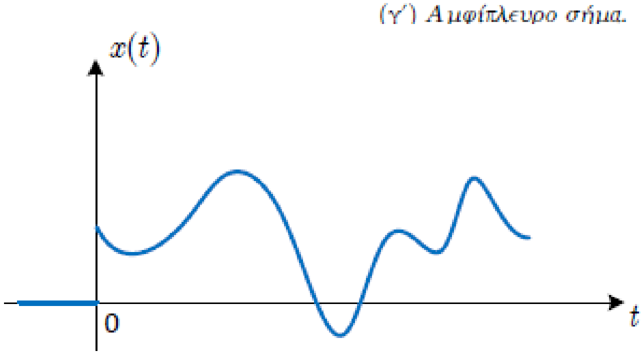
(β') Δεξιόπλευρο σήμα.



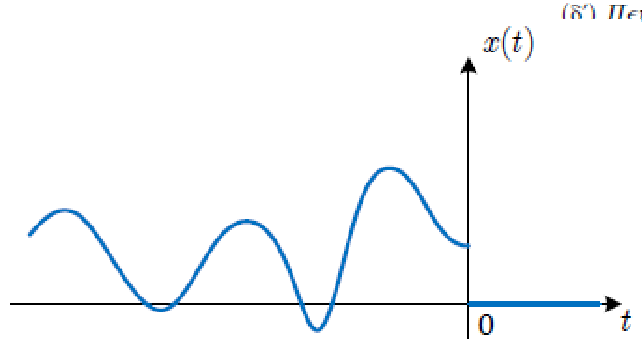
(γ') Αμφίπλευρο σήμα.



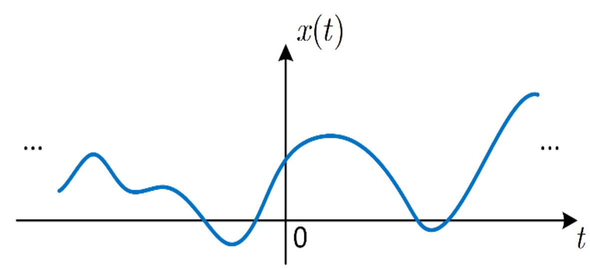
(δ') Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.



(α') Αιτιατό Σήμα.



(β') Αντι-αιτιατό σήμα.



(γ') Μη-αιτιατό σήμα

- **Ο Μετασχηματισμός Laplace (review)**
- Γνωστά ζεύγη

$$x(t) = e^{at}u(t), \qquad a \in \Re \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s-a}, \qquad \sigma > a$$

$$x(t) = -e^{bt}u(-t), \qquad b \in \Re \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s-b}, \qquad \sigma < b$$

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}\,u(-t), a, b \in \Re \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)}, a < \sigma < b$$

$$x(t) = \delta(t) \;\leftrightarrow\; X(s) = 1, \qquad \forall s$$

- **Ο Μετασχηματισμός Laplace (review)**
- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

- **Ο Μετασχηματισμός Laplace (review)**
- Ιδιότητες:

1. Ένα πεδίο σύγκλισης δεν περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
   a) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   b) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου αριστερά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   c) Μια λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
   d) Όλο το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f} = X(\sigma + j2\pi f)\Big|_{\sigma=0}$$

φανταστικός άξονας
του s-επιπέδου

- Άρα ο Μετασχ. Fourier είναι μια «**υποπερίπτωση**» του μετασχ. Laplace?

- Άρα ο μετασχ. Laplace είναι μια «**γενίκευση**» του μετασχ. Fourier?

- Η αλήθεια είναι ότι ο μετασχ. Fourier μπορεί να προκύψει εκτιμώντας το μετασχ. Laplace επάνω στο φανταστικό άξονα, δηλ. για $s = j2\pi f$

- Όπως και ότι μπορούμε – μερικές φορές – να πάρουμε το μετασχ. Laplace από το μετασχ. Fourier θέτοντας $j2\pi f = s$

- Όμως κάποια πράγματα θέλουν προσοχή… ☺

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- **1.** Για να γίνει η εκτίμηση $X(f) = X(s)|_{s=j2\pi f}$ πρέπει το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace να περιέχει το φανταστικό άξονα

- **2.** Ακόμα κι αν δεν τον περιέχει, δε σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει
  - Απλώς δεν υπολογίζεται μέσω του μετασχ. Laplace
  - Μπορεί να υπάρχει μέσω συναρτήσεων Δέλτα π.χ.

- **3.** Αν το ολοκλήρωμα του μετασχ. Fourier συγκλίνει, τότε ο μετασχ. Laplace υπάρχει για κάποιο πεδίο σύγκλισης και μπορεί να υπολογιστεί θέτοντας $j2\pi f = s$
  - Για παράδειγμα, όταν ο μετασχ. Fourier είναι ρητή συνάρτηση του $j2\pi f$
  - Ενώ αν χρησιμοποιούμε γενικευμένες συναρτήσεις $\left(\pi.\chi.\, \delta(t)\right)$, η γενίκευση αυτή δε δουλεύει

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

- Βρήκαμε πριν ότι

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{a + s}, \sigma > -a$$

- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) = X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) = X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

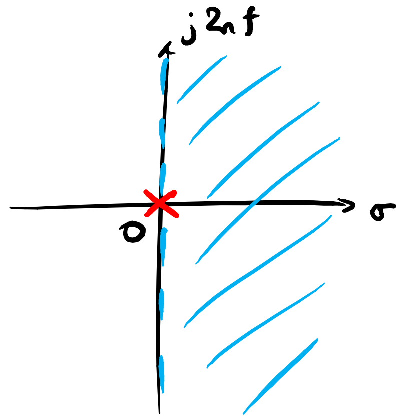
- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**

- Αντίθετα, ξέρουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$x(t) = u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \sigma > 0$$



- Παρατηρήστε ότι

$$X(f) \neq X(s)\Big|_{s=j2\pi f}$$

αλλά και ότι

$$X(s) \neq X(f)\Big|_{j2\pi f=s}$$

- Ο λόγος είναι ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού δεν περιέχει το φανταστικό άξονα, αλλά και το ότι ο μετασχ. Fourier δεν προκύπτει από σύγκλιση του ορισμού
  - Χρειαζόμαστε γενικευμένη συνάρτηση για τη σύγκλιση

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**
- Πέρα όμως από τις τυπικές μαθηματικές σχέσεις, τι άλλο υπάρχει?
- Ας δούμε ένα παράδειγμα
- Ας υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$ για $a = 2$ και $a = 4$
- Προφανώς μπορούμε εύκολα να βρούμε ότι

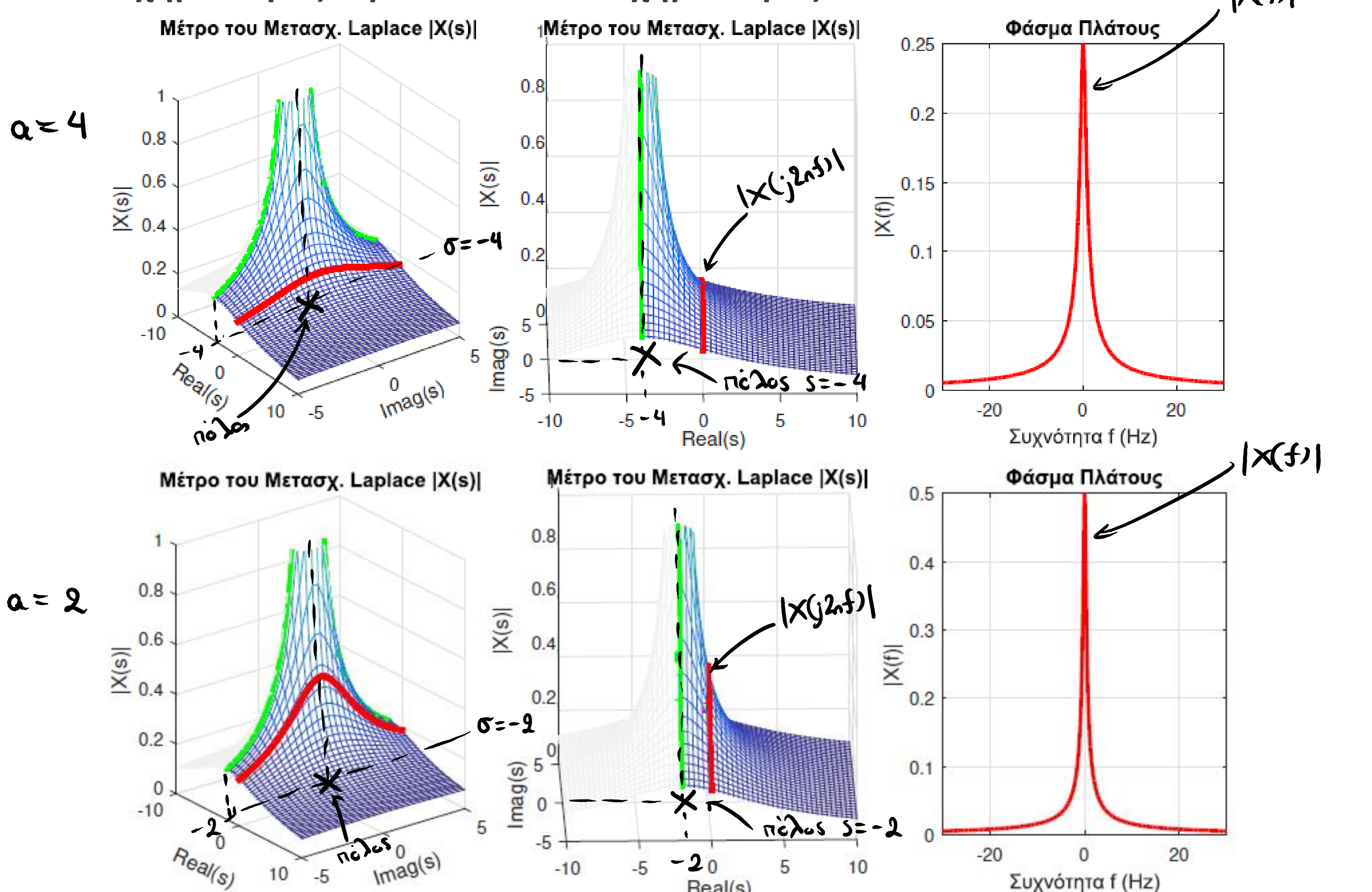
$$X(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} \Rightarrow |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

και

$$X(s) = \frac{1}{a + s} \Rightarrow |X(s)| = \frac{1}{\sqrt{(a + \sigma)^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

- Ας απεικονίσουμε τις δυο περιπτώσεις για τις διαφορετικές τιμές του a
- Προσέξτε ότι το $s = -a$ είναι ο πόλος του μετασχηματισμού Laplace!

- **Μετασχηματισμός Laplace και Μετασχηματισμός Fourier**



• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Πίνακας Ιδιοτήτων Δίπλευρου Μετασχηματισμού Laplace

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
	$\mathbf{x(t)}$ $\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{X(s)}$ $\mathbf{Y(s)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
Μετατόπιση στο χώρο του s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-s),$	$-R_x$
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
n-οστή παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
n-οστη παραγώγιση στη συχνότητα	$(-1)^n t^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \left(R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}\right)$

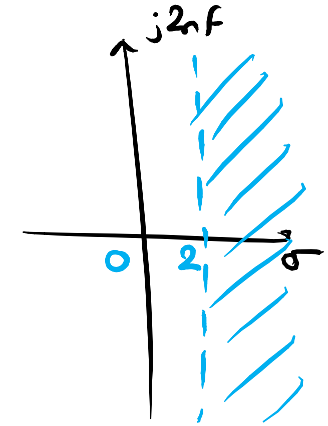
- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Γραμμικότητα: $$ax(t)+\beta y(t) \xleftrightarrow{L} aX(s)+\beta Y(s)$$

$$R \supseteq R_x \cap R_y$$

Παράδειγμα: Έστω $X(s)=\dfrac{1}{s-2}$, $\sigma>2$

$$Y(s) = -\frac{1}{(s-1)(s-2)}, \quad \sigma>2$$



Είναι $$Z(s) = X(s)+Y(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

$$= \frac{s-1-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{\cancel{s-2}}{(s-1)\cancel{(s-2)}} = \frac{1}{s-1}$$

Ο πόλος είναι ο $s-1=0 \Longrightarrow \boxed{s=1}$. Άρα $R=\{\sigma>1\}$.

Το πεδίο σύγκλισης έγινε υπερσύνολο της $\underbrace{R_x \cap R_y}_{\sigma>2}$, λόγω αλληλοαναίρεσης πόλων-μηδενικού.

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Συζυγία στο χρόνο: $x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*)$

Παράδειγμα: Έστω

- $x(t) \in \mathbb{R}$ με Μ.L. $X(s)$
- ένας πόλος στη θέση $s_1 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}$ και $s_2 = ?$
- ένα μηδενικό —"— $s = -1$
- $X(0) = 2$

Βρείτε όσα περισσότερα μπορείτε για το $X(s)$.

Αφού $x(t) \in \mathbb{R}$: $x(t) = x^*(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = X^*(s^*)$

Άρα αφού το $X(s)$ έχει πόλο/μηδενικό στη θέση $s = s_0$,

υποχρεωτικά και το $X^*(s^*)$ θα έχει πόλο/μηδενικό πού?

$X\left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}\right) = \infty$

$X^*\left(\left(\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^*\right) = \infty$

$X(-1) = 0$

$X^*(-1) = 0$

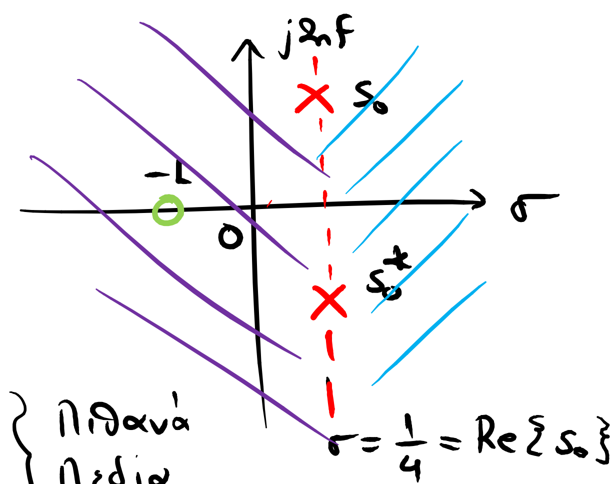
- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Άρα το $X(s)$, εφόσον έχει πόλο στο $s_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$, θα έχει και πόλο στη θέση $s_1^* = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$. Άρα: $s_2 = s_1^*$, οπότε:

$$X(s) = A\,\frac{(s+1)}{\left(s-\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)\left(s-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)} = A\,\frac{s+1}{s^2-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}}.$$

Επειδή $X(0)=2$, τότε $X(0) = A\,\frac{0+1}{0^2-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{1}{4}} = 4A$

δηλ. $4A = 2 \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{2}}$.



Οπότε:

$$X(s) = \frac{1}{2}\,\frac{(s+1)}{s^2-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}}.$$

Δυο επιλογές για το ROC:
- $\rightarrow \sigma > \frac{1}{4}$ R_1
- $\rightarrow \sigma < \frac{1}{4}$ R_2

} Πιθανά Πεδία Σύγκλισης

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace**

Συνέλιξη στο χρόνο:

$$x(t) * y(t) \xleftrightarrow{L} X(s)Y(s), \quad R \supseteq R_x \cap R_y$$

Παράδειγμα: Έστω $x(t) = e^{at}u(t)$, $y(t) = e^{2at}u(t)$ $\Big\} \longrightarrow c(t) = \frac{1}{a}\left(e^{2at} - e^{at}\right)u(t)$.

Είναι $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s-a}, \; \sigma > a$

$y(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{s-2a}, \; \sigma > 2a$

$$X(s)Y(s) = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}, \quad R = R_x \cap R_y = \{\sigma > 2a\}$$

$c(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)(s-2a)}\right\}$, οπότε $C(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-2a}$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

με $$A = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-a)\Big|_{s=a} = -\frac{1}{a}$$

$$B = \frac{1}{(s-a)(s-2a)}(s-2a)\Big|_{s=2a} = \frac{1}{a}$$

Άρα

$$C(s) = -\frac{1}{a}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{a}\frac{1}{s-2a}, \quad \sigma > 2a$$

$\sigma > a \quad \updownarrow L^{-1} \qquad \sigma > 2a \quad \updownarrow L^{-1}$

$$c(t) = -\frac{1}{a}e^{at}u(t) + \frac{1}{a}e^{2at}u(t)$$

$$= \frac{1}{a}\left(e^{2at} - e^{at}\right)u(t), \text{ που}$$

είναι ίδιο αποτέλεσμα με το πεδίο χρόνου.

Το $\frac{1}{s-a}$ έχει πόλο στο $s=a$, άρα θα έχει είτε $\sigma>a$ είτε $\sigma<a$ ως ROC. Το $\frac{1}{s-2a}$ έχει πόλο στο $s=2a$ άρα θα έχει είτε $\sigma>2a$ είτε $\sigma<2a$ ως ROC. Επιλέξαμε αυτά που δίνουν $R_1 \cap R_2 \subseteq \{\sigma > 2a\}$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ