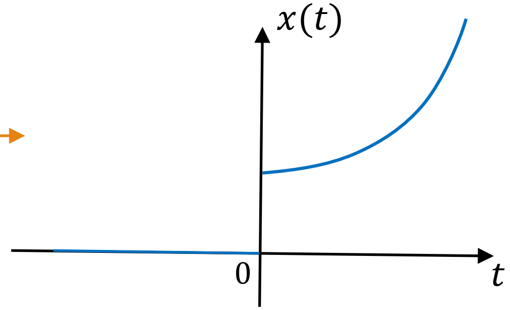
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 15^{Η}

- Μετασχηματισμός Laplace

- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Μετασχ. Fourier: πανίσχυρο (?) εργαλείο ανάλυσης συστημάτων και σημάτων
- Σήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier (== δε συγκλίνει το ολοκλήρωμα)
  - Κάποια σήματα ισχύος
  - Κάποια σήματα ούτε ενέργειας ούτε ισχύος
- Για παράδειγμα, το σήμα $x(t) = e^{at}u(t), a > 0$
  - Δεν έχει μετασχ. Fourier
  - Τι θα έπρεπε να ισχύει για να έχει?



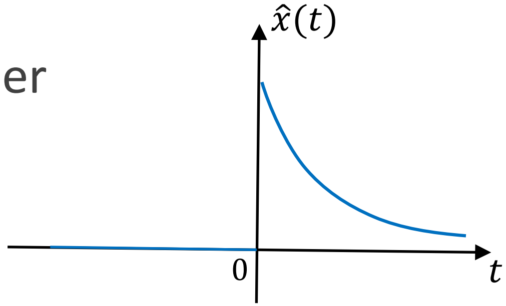
$$a < 0$$

- Ας το κάνουμε να έχει! ☺
- Δημιουργούμε ένα νέο σήμα

$$\hat{x}(t) = e^{at}e^{-\sigma t}u(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t), \qquad \sigma \in \Re$$

- Τώρα αν $a - \sigma < 0 \Rightarrow \sigma > a$, το σήμα $\hat{x}(t)$ έχει μετασχ. Fourier

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)e^{-j2\pi ft}dt$$



- **Προς το μετασχ. Laplace**

- Δηλ.

$$\hat{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{(a-\sigma)t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{(\sigma - a) + j2\pi f}, \sigma > a$$

- Ελέγχοντας έτσι την τιμή του σ μπορούμε να μετασχηματίζουμε το σήμα

- Όμως εμείς ενδιαφερόμαστε για το $x(t)$, όχι για το $\hat{x}(t)$! ☺

- Από την παραπάνω σχέση

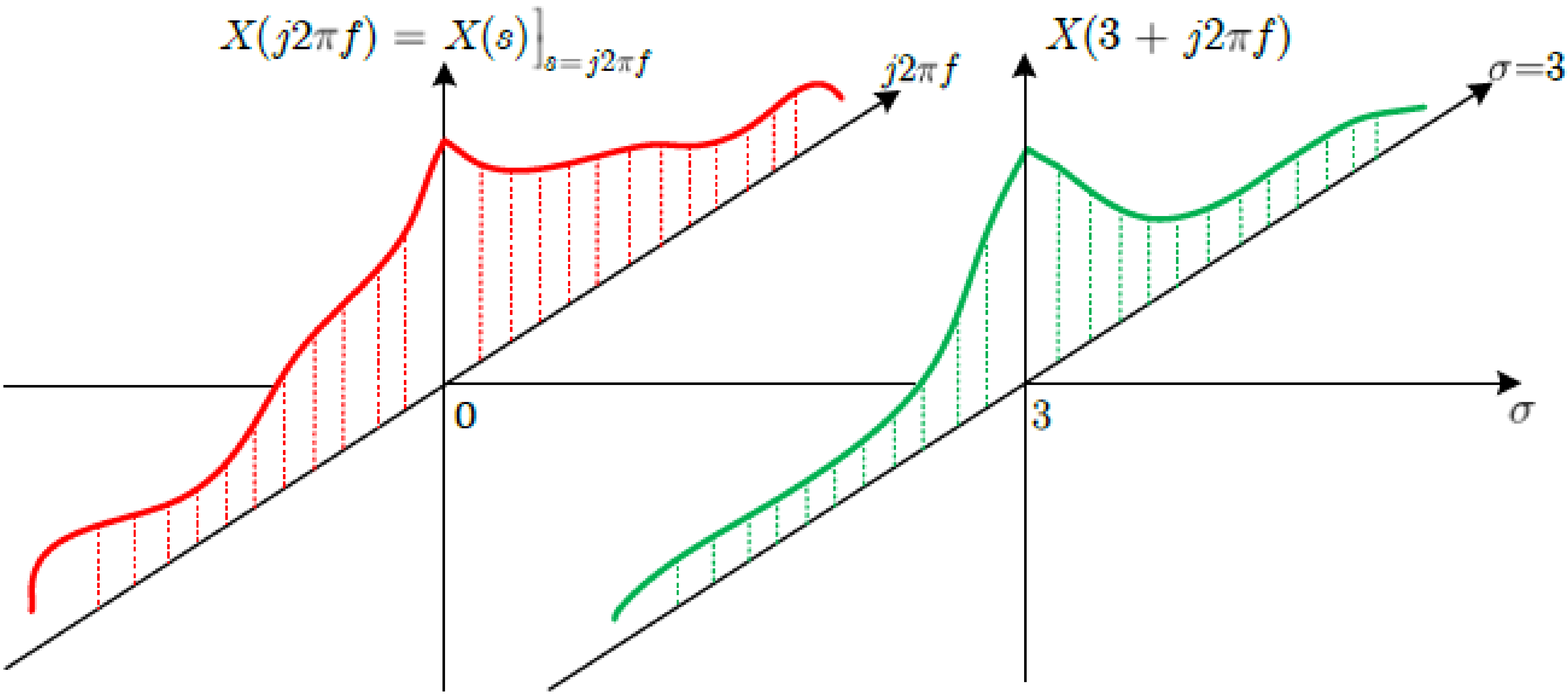
$$\hat{X}(f) = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-\sigma t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-(\sigma + j2\pi f)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{x(t)}{\boxed{e^{at} u(t)}} e^{-st} dt = X(s)$$

- Οπότε βρήκαμε έναν άλλο μετασχηματισμό ο οποίος προβάλλει το σήμα όχι στις γνωστές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις αλλά σε κάποιες άλλες της μορφής e^{-st}

- Αν θεωρήσουμε ότι ο μετασχ. Fourier εξαρτιόνταν από τη μεταβλητή $j2\pi f$, τώρα ο νέος μετασχηματισμός εξαρτάται από τη μεταβλητή $s = \sigma + j2\pi f$
  - Μιγαδικές συχνότητες!!!???? ☹☹

- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace**

- **Προς το μετασχ. Laplace**



- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Προφανώς καταλαβαίνετε ότι μπορούμε να επιλέξουμε άπειρα σ για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας
  - Αρκεί πάντα να έχουμε $\sigma > a$
- Η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου στην οποία συγκλίνει ο μετασχ. Laplace ονομάζεται **πεδίο σύγκλισης (region of convergence)**
  - Μπορείτε να το φαντάζεστε σαν το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων μιας μεταβλητής
- Ορισμός Μετασχ. Laplace

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

- Αντίστροφος μετ. Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

  - Δε θα τον χρησιμοποιήσουμε…

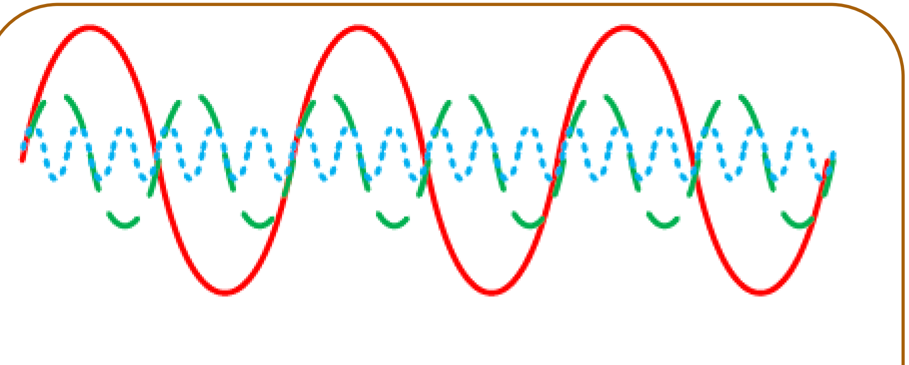
- **Προς το μετασχ. Laplace**
- Η χρήση μιγαδικών συχνοτήτων ξενίζει...
- Ας δούμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier στο σήμα $x(t)$ μέσω του $\hat{x}(t) = e^{(a-\sigma)t}u(t)$

$$x(t) = \hat{x}(t)e^{+\sigma t} = e^{+\sigma t}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(f)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\hat{X}(f)e^{\sigma t}\right)e^{j2\pi ft}df$$

- Θεωρώντας ότι αναλύουμε πραγματικά σήματα, ο μετασχ. Fourier έχει τις γνωστές συμμετρίες και το $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

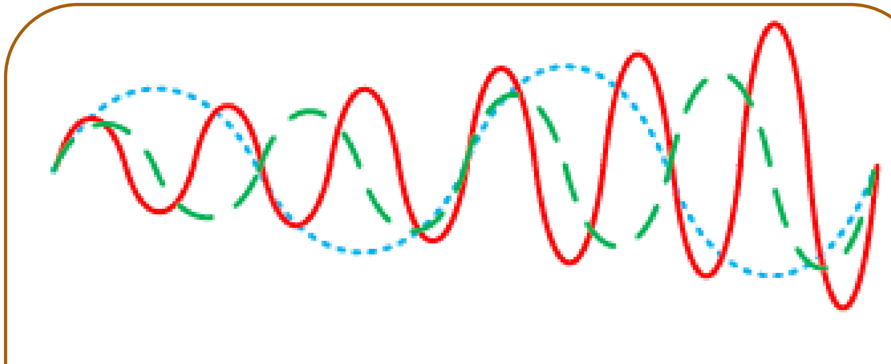
$$x(t) = \int_{0}^{+\infty} 2\left|\hat{X}(f)\right|e^{\sigma t}\cos\left(2\pi ft + \hat{\phi}(f)\right)df$$

$\sigma = 0$



(α΄) Σταθερού πλάτους ημίτονα

$\sigma \neq 0$

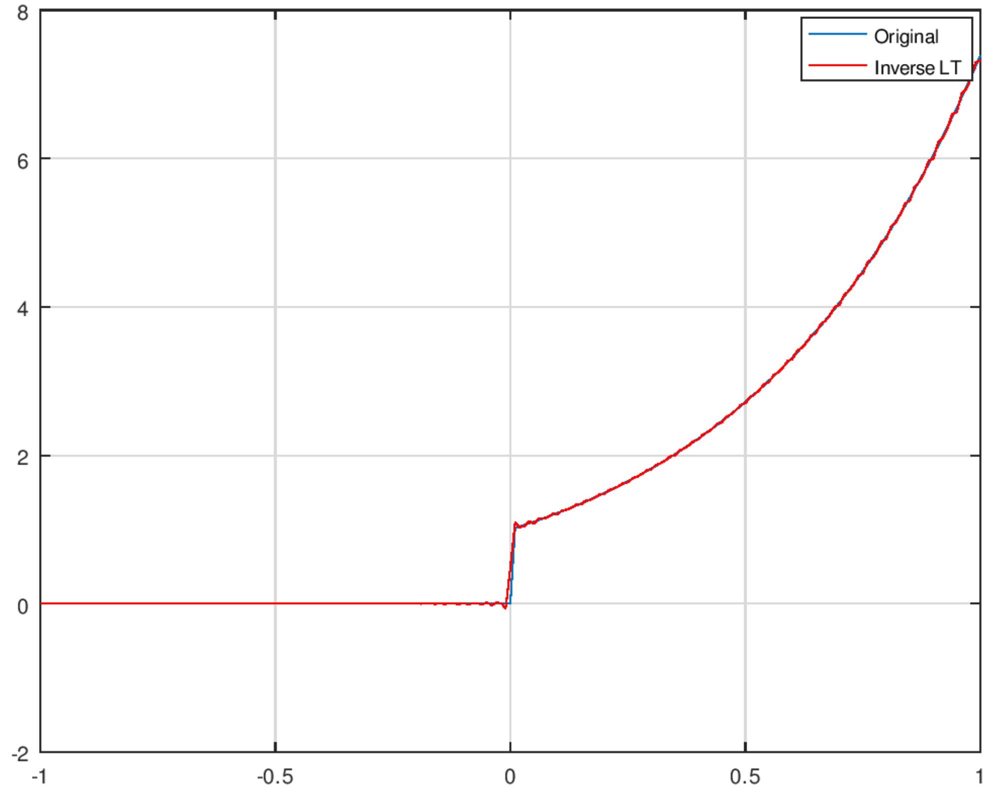


(β΄) Μεταβλητού πλάτους ημίτονα

- **Μετασχηματισμός Laplace**

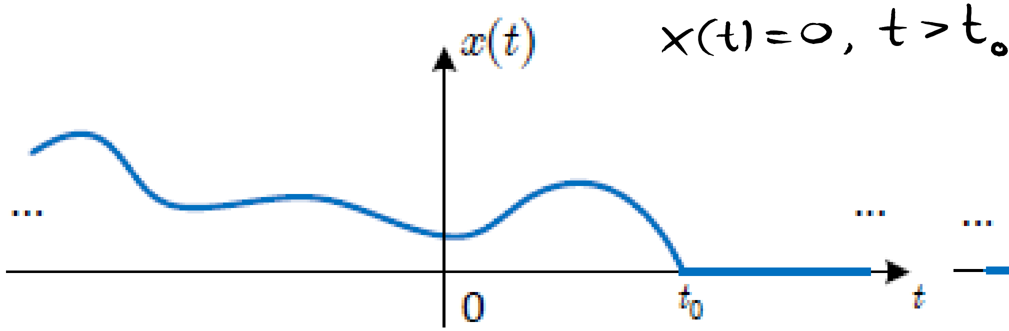
- Κώδικας:

```
% alpha parameter (must be > 0)
a = 2;
% Time step
dt = 0.01;
% Time axis
t = -1:dt:1;
% Frequency step
df = 0.01;
% Frequency axis (the usual one)
f = -40:df:40;
% Signal (0 for t<0, exp(at) for t > 0)
x = [zeros(size(t(t<=0))) exp(a*t(t>0))];
% Sigma selection
sigma = 4;
% Laplace Transform
X = 1./(sigma - a + j*2*pi*f);
% Memory allocaton
x_est = zeros(size(x));
% Synthesizing x(t) from Laplace Transform
for i=1:length(f)
  x_est = x_est + X(i).*exp((sigma + j*2*pi*f(i))*t);
endfor
% Normalize
x_est = df*x_est;
% Plotting
plot(t, x); grid; hold on;
plot(t, real(x_est), 'r'); hold off;
```

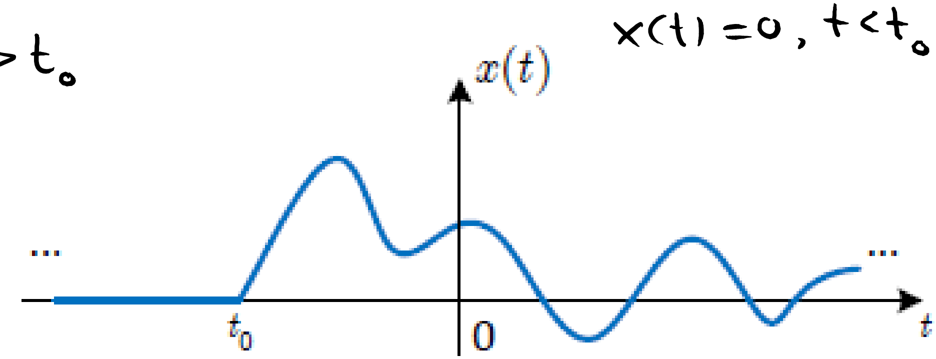


- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

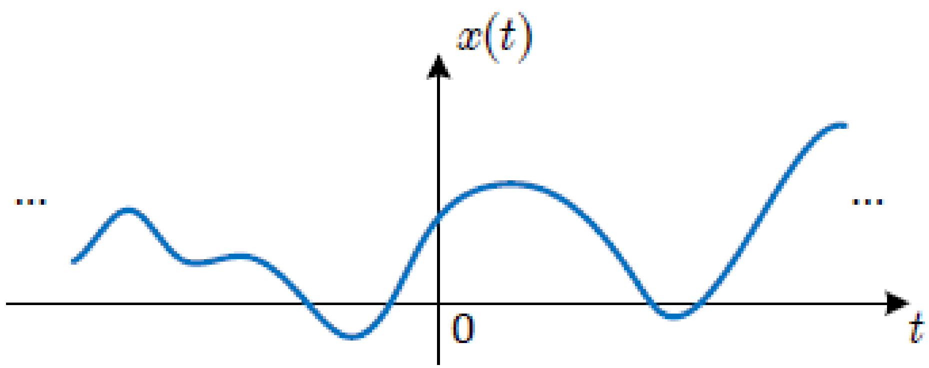
- Πλευρικότητα



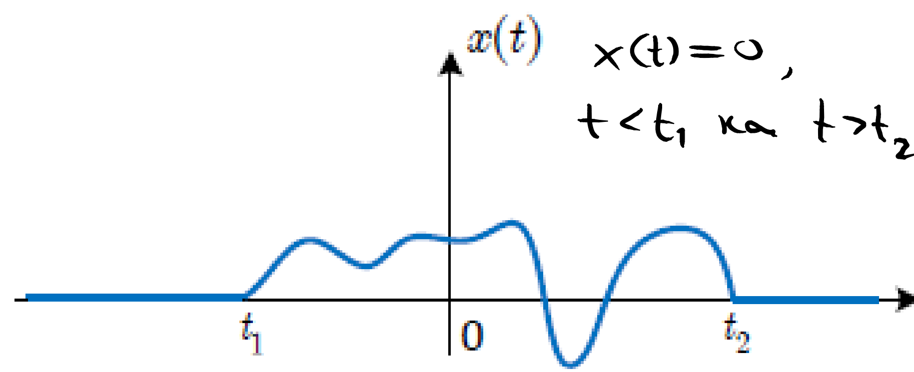
(α΄) *Αριστερόπλευρο σήμα.*



(β΄) *Δεξιόπλευρο σήμα.*



(γ΄) *Αμφίπλευρο σήμα.*

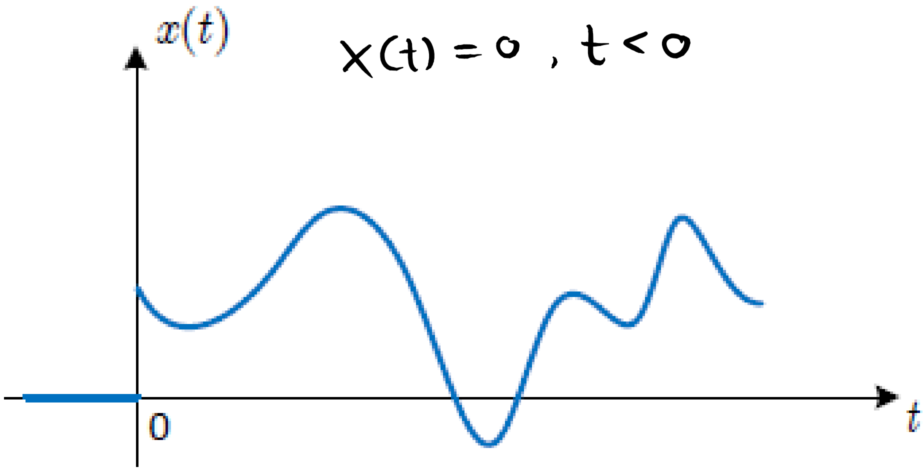


(δ΄) *Πεπερασμένης διάρκειας σήμα.*

- **Πλευρικότητα και Αιτιατότητα**

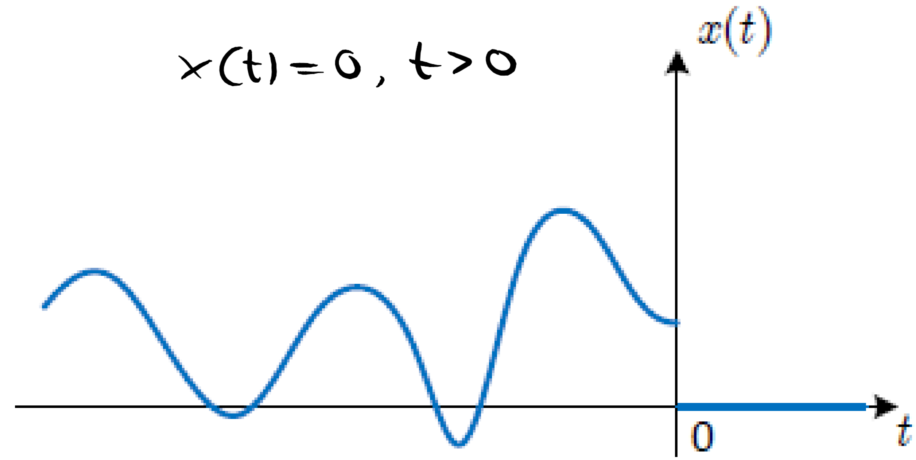
- Αιτιατότητα

$x(t) = 0 \,, \; t < 0$

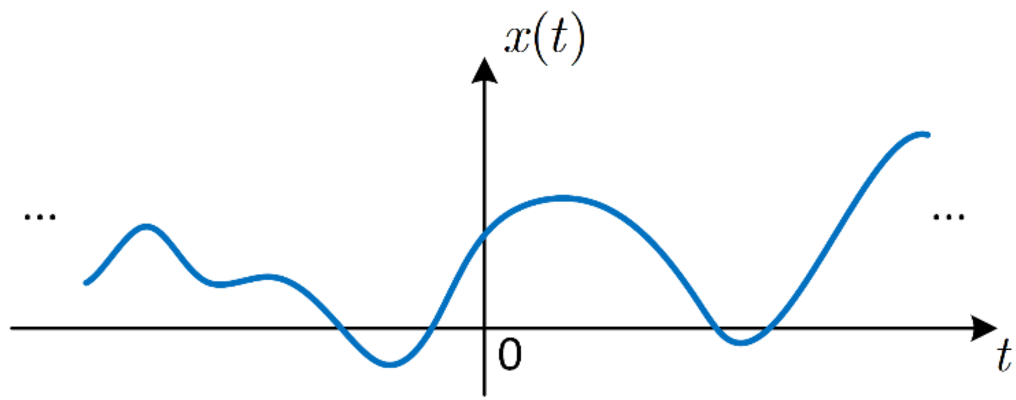


(α′) *Αιτιατό Σήμα.*

$x(t) = 0 \,, \; t > 0$



(β′) *Αντι-αιτιατό σήμα.*



(γ’) *Μη-αιτιατό σήμα*

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = e^{at}u(t), a \in \Re$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(t) e^{-st} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{at} e^{-st} dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} - 1 \right) \quad (1)$$

Είναι $\lim_{t \to +\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t \to +\infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{-j2\pi f t} = \lim_{t \to +\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot \underline{\underline{e^{-j2\pi f t}}}$

$= 0$, μόνον αν $a - \sigma < 0 \iff \boxed{\sigma > a}$

Άρα (1) $\Rightarrow X(s) = \frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$, $\sigma = Re\{s\} > a$

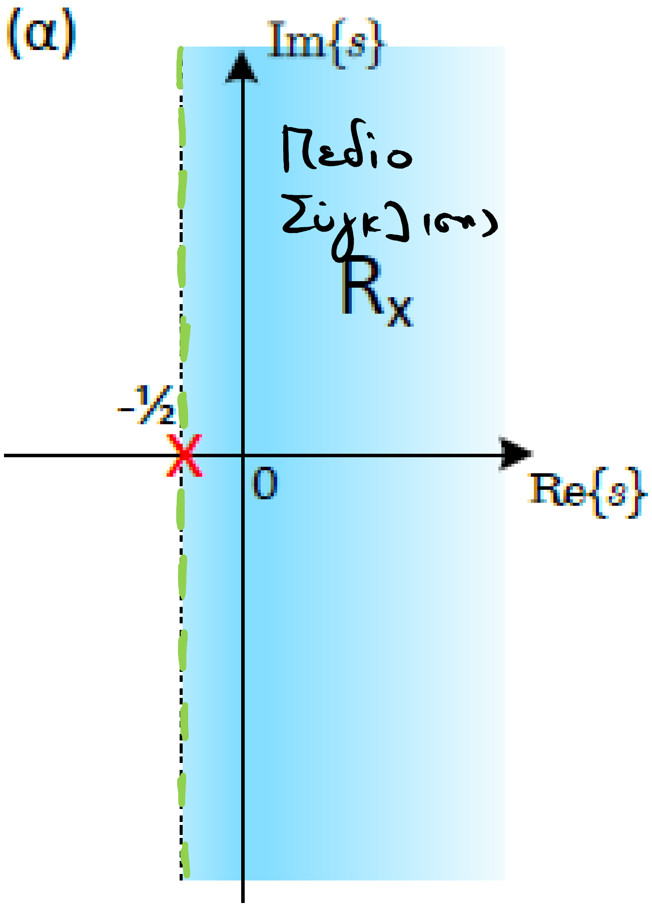
Πεδίο σύγκλισης

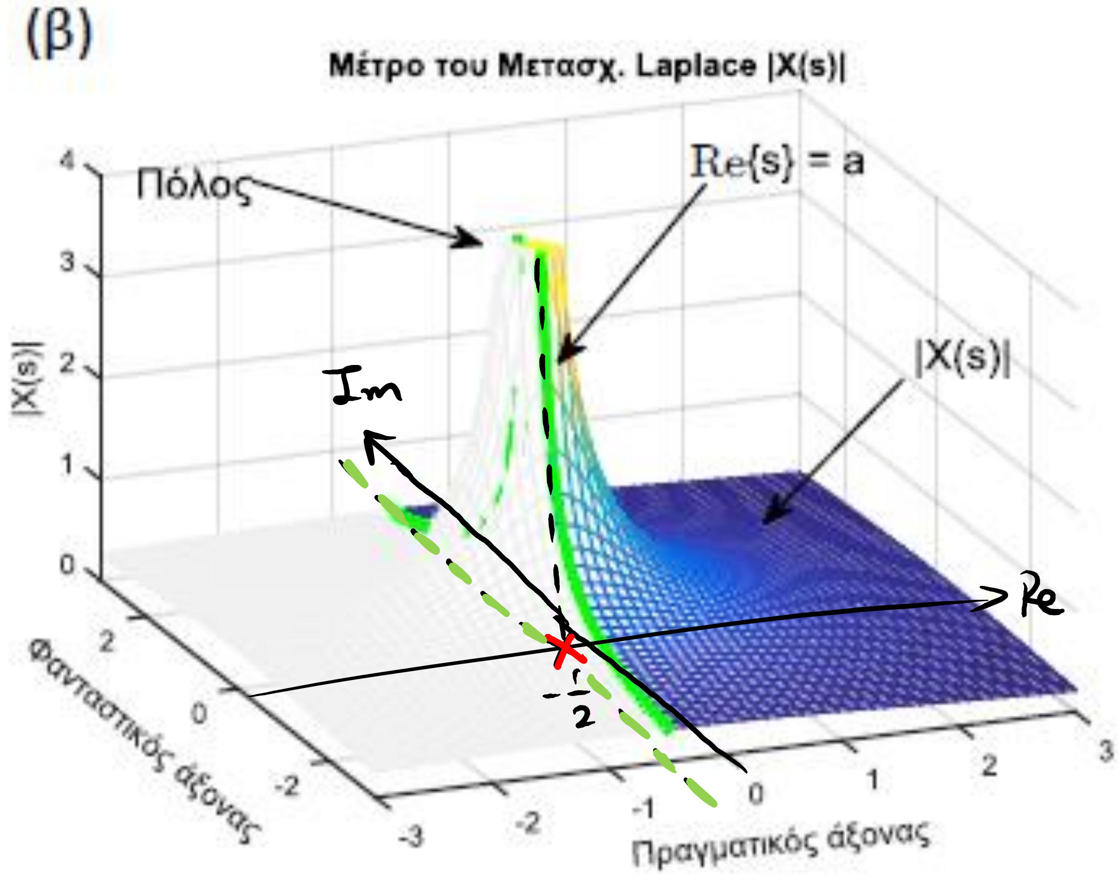
Οπότε

$$\boxed{x(t) = e^{at}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s-a}, \ \sigma > a.}$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Έστω ότι $a = -\frac{1}{2}$.

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma > a$$





Ρίζα παρονομαστή: $s - a = 0 \Leftrightarrow \boxed{s = a}$: Πόλος

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος $x(t) = -e^{at}u(-t), a \in \Re$

Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{at} \underbrace{u(-t)}_{1,\ t<0} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{at} e^{-st} dt$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t} dt = -\frac{1}{a-s}\left(1 - \lim_{t\to-\infty} e^{(a-s)t}\right) \quad (1)$$

Είναι $\lim_{t\to-\infty} e^{(a-s)t} = \lim_{t\to-\infty} e^{at} \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{j2\pi f t} = \lim_{t\to-\infty} e^{(a-\sigma)t} \cdot e^{j2\pi f t} = 0$

αν $a - \sigma > 0 \Leftarrow \boxed{\sigma < a}$: Πεδίο σύγκλισης

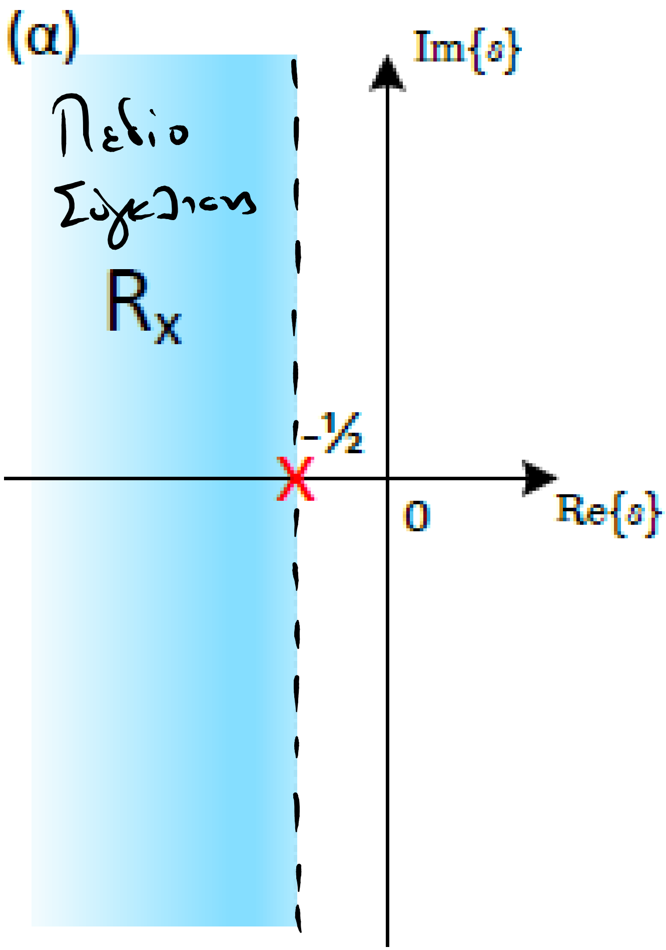
$$(1) \Longrightarrow X(s) = -\frac{1}{a-s}(1-0) = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma < a.$$

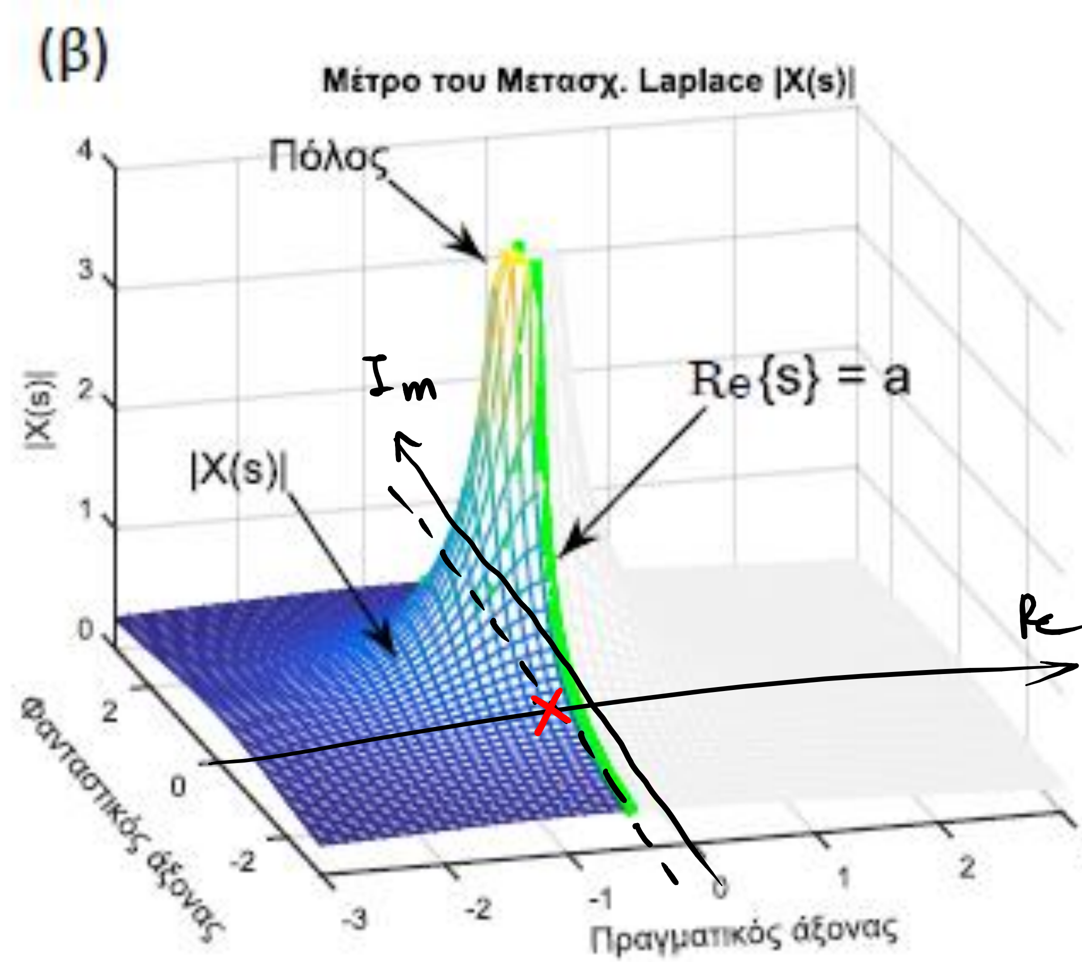
Οπότε

$$\boxed{x(t) = -e^{at}u(-t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s-a}, \quad \sigma < a}$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα: Έστω $a = -\frac{1}{2}$.

$X(s) = \frac{1}{s-a}, \ \sigma < a$





Πόλος: $s - a = 0 \Rightarrow \boxed{s = a}$

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = e^{at}u(t) - e^{bt}\,u(-t),\ a, b \in \Re$$

Είναι

$$X(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(t)e^{-st}dt}_{L\{e^{at}u(t)\}} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{bt}u(-t)e^{-st}dt}_{L\{-e^{bt}u(-t)\}}$$

$$= \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}$$

$\frac{1}{s-a}$: $\sigma > a$, R_{x_1}

$\frac{1}{s-b}$: $\sigma < b$, R_{x_2}

Θα πρέπει να υπάρχει Πεδίο Σύγκλισης τέτοιο ώστε

$$R_{x_1} \cap R_{x_2} \neq \emptyset$$

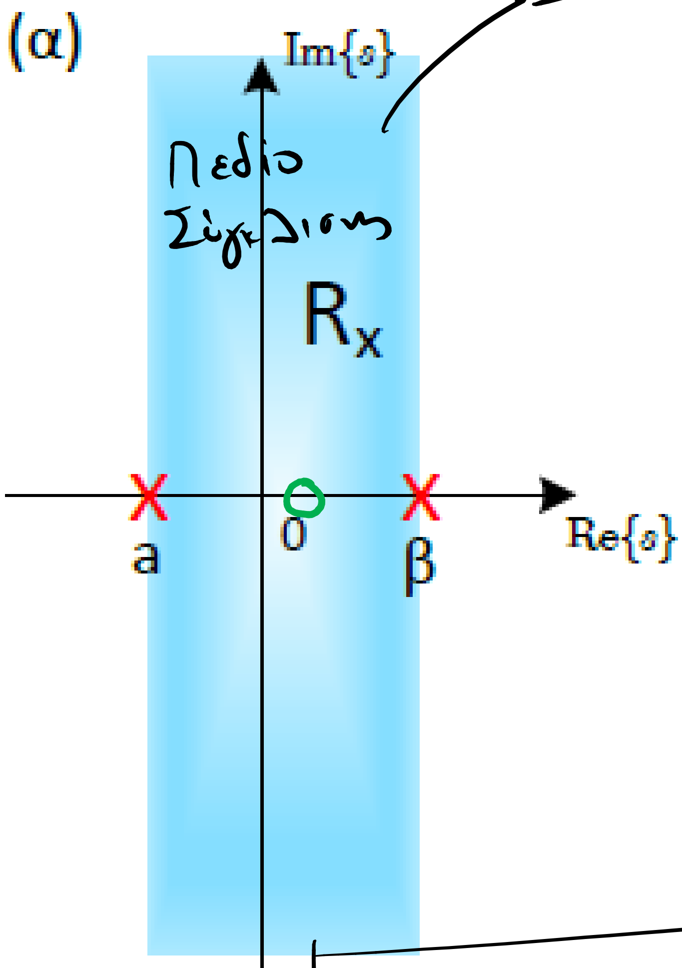
Πρέπει $a < b$.

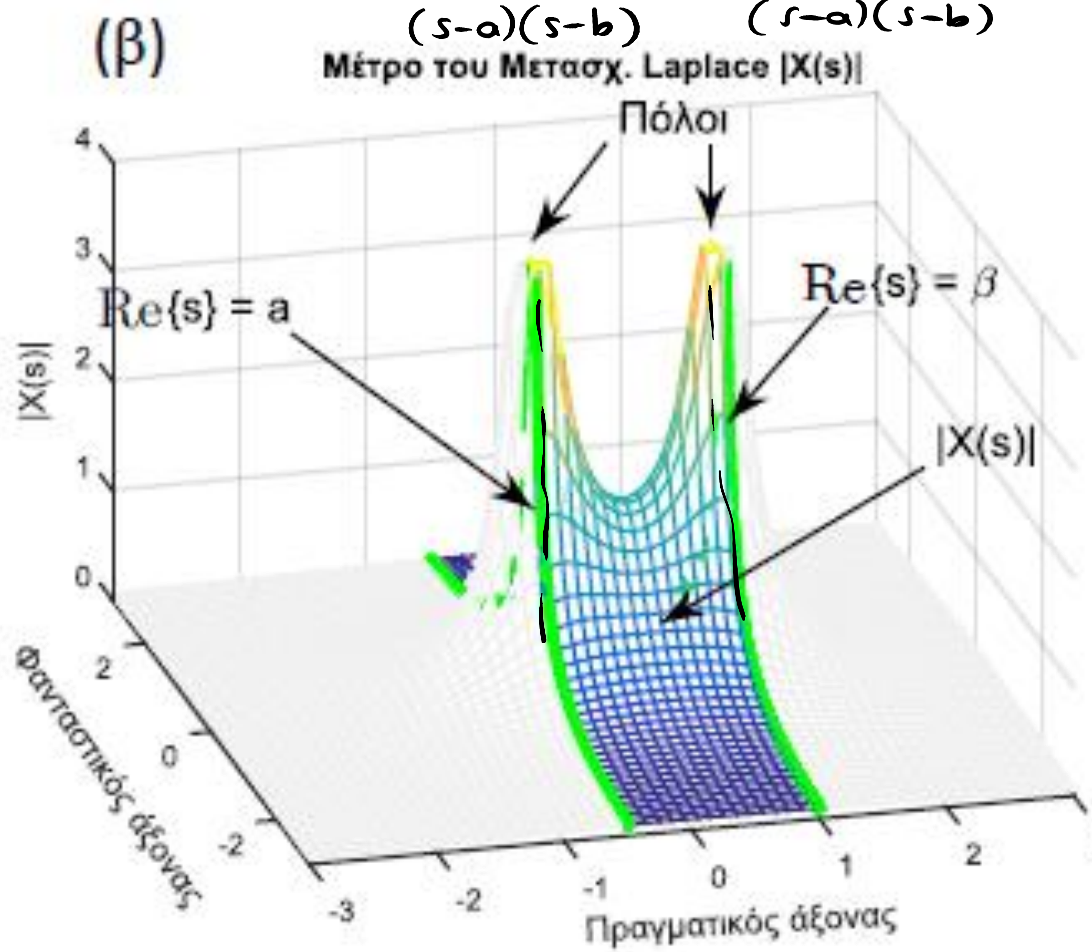
- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:

$\boxed{a < \sigma < b}$

$$X(s) = \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b}, \quad a<b$$

$$= \frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)} = \frac{2s-(a+b)}{(s-a)(s-b)}$$





Πόλοι: $\boxed{s=a, \ s=b}$, Μηδενικά: $2s-(a+b)=0 \Rightarrow s = \frac{a+b}{2}$.

- **Μετασχηματισμός Laplace**

- Παράδειγμα: Βρειτε το μετασχ. Laplace του σήματος

$$x(t) = \delta(t)$$

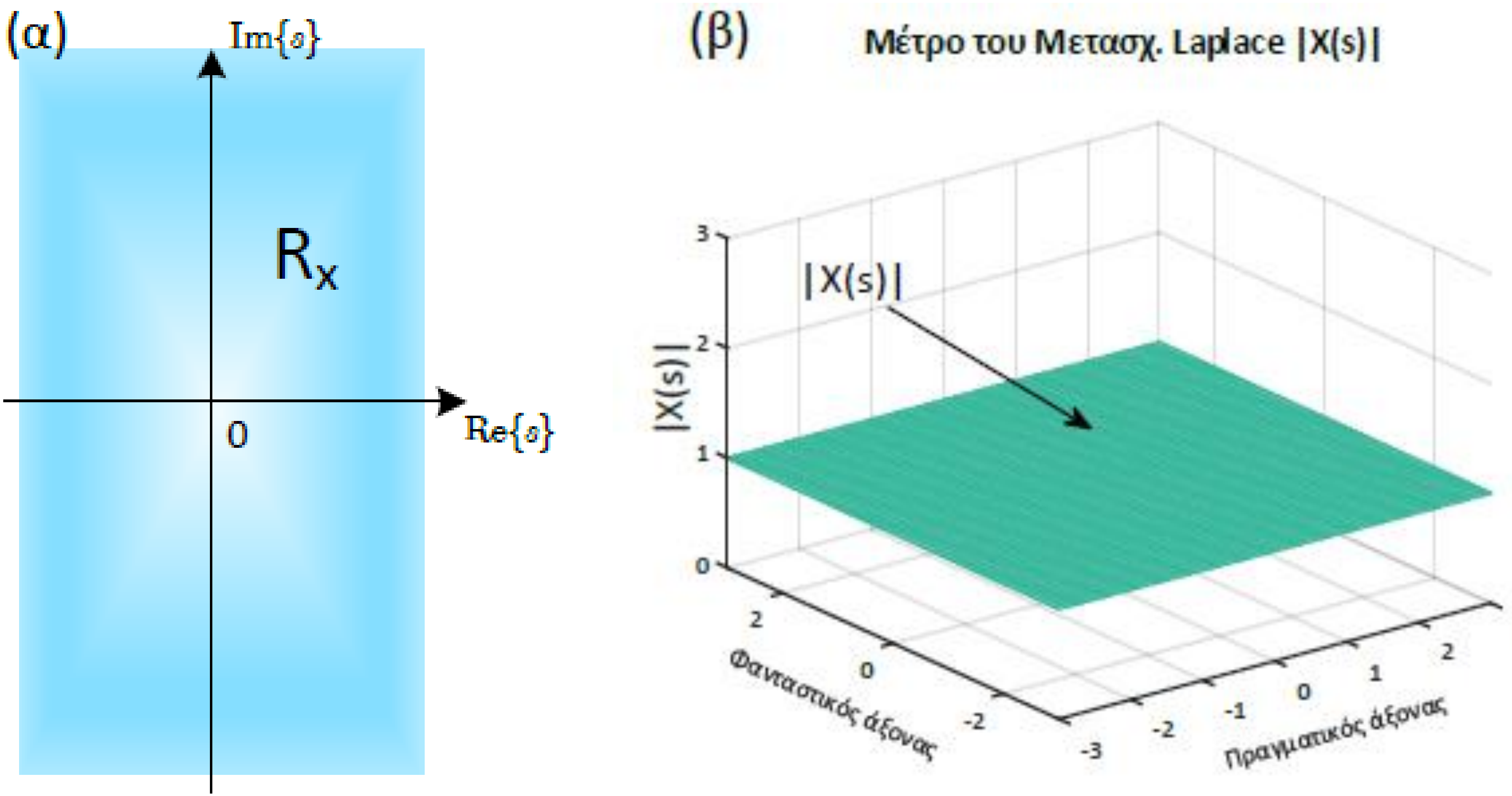
Είναι

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \overbrace{e^{-st}}^{\varphi(t)} dt = \varphi(0) = e^{-st}\Big]_{t=0} = 1$$

Άρα

$$\boxed{x(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = 1, \ \forall \ s}$$

- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παράδειγμα:



- **Μετασχηματισμός Laplace**
- Παρατηρήσεις:

1. Το πεδίο σύγκλισης καθορίζει μοναδικά κάθε ζεύγος μετασχ. Laplace

2. Πόλοι: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που απειρίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του παρονομαστή είναι πόλοι

3. Μηδενικά: θέσεις του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό
   - Αν ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του s, οι ρίζες του αριθμητή είναι μηδενικά

4. Πεδία σύγκλισης: προκύπτουν από την ανάγκη σύγκλισης του ολοκληρώματος του μετασχηματισμού Laplace

- **Μετασχηματισμός Laplace – Πεδίο Σύγκλισης**

- Ιδιότητες:

1. Ένα πεδίο σύγκλισης δεν περιέχει ΠΟΤΕ πόλους!
2. Ένα πεδίο σύγκλισης μπορεί να είναι
   a) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου δεξιά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   b) Ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου αριστερά από μια ευθεία που ορίζει ένας πόλος
   c) Μια λωρίδα του μιγαδικού επιπέδου μεταξύ δυο ευθειών που ορίζονται από δυο πόλους
   d) Όλο το μιγαδικό επίπεδο
3. Ο Μετασχ. Laplace μπορεί να έχει κανέναν, έναν, ή περισσότερους πόλους. Το ίδιο και μηδενικά.
4. Αν ένα σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2a).
5. Αν ένα σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2b).
6. Αν ένα σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace είναι το 2c).
7. Αν ένα σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Laplace του είναι το 2d).

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ