

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 14^Η

- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας

Ύλη της προόδου:
ΩΣ ΚΑΙ ΑΥΤΗ ΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ (1^η – 14^η)



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier (επανάληψη...)**
- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = (Ae^{j\phi})e^{j2\pi f_0 t}$, $A > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = Ae^{j\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau))}d\tau \\&= Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = H(f_0)[Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}] \\&= H(f_0)x(t)\end{aligned}$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού
- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier (επανάληψη...)**
- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνотική απόκριση** (frequency response)
- **Απόκριση πλάτους – magnitude response** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης – phase response** : $\phi_h(f)$
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier (επανάληψη...)**
- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου

- Ας το δούμε:
- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$
- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

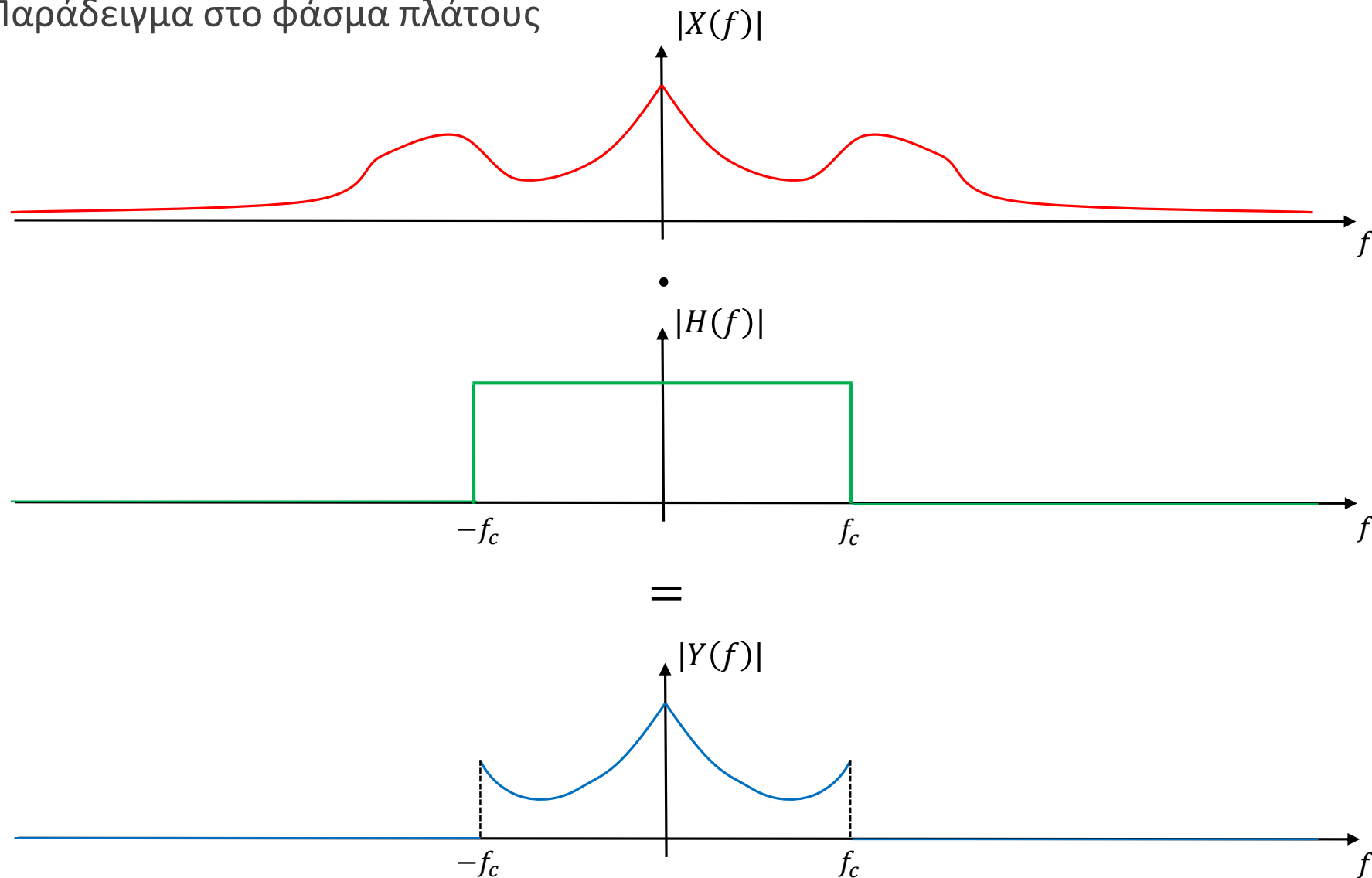
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

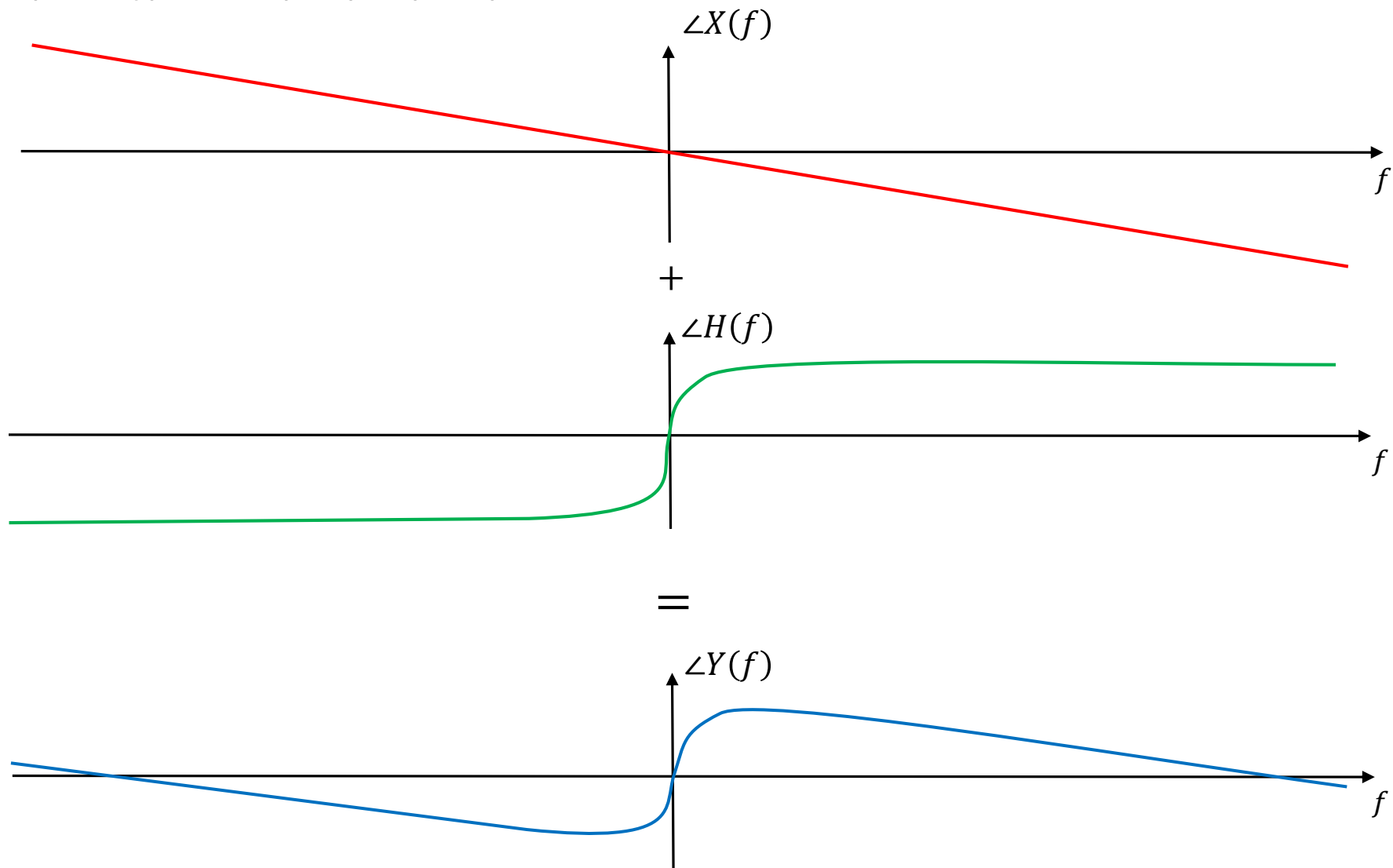
$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier (επανάληψη...)
- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier (επανάληψη...)
- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier (επανάληψη...)**

$$|Y(f)| = |X(f)| |H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**
- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
 - Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους
 - Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Η σχέση

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εύρεση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μιας εξόδου, ως

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

• Δοθείσας μιας διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα, μπορούμε να βρούμε γρήγορα και εύκολα την απόκριση συχνότητας

- ...και αν θέλουμε στη συνέχεια την κρουστική απόκριση

• Ας δούμε πως:

$$\sum_{i=0}^N \frac{d^i}{dt^i} a_i y(t) = \sum_{l=0}^M \frac{d^l}{dt^l} b_l x(t) \leftrightarrow \sum_{i=0}^N (j2\pi f)^i a_i Y(f) = \sum_{l=0}^M (j2\pi f)^l b_l X(f)$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Η σχέση

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i}$$

αποτελείται από πολυώνυμο του $(j2\pi f)$ και μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$H(f) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i} = \frac{\prod_{l=1}^M (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (j2\pi f + \kappa_i)}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα (μόνο αν $M < N$) να καταλήξουμε στο

$$H(f) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{\kappa_i + j2\pi f}$$

• Εύκολα μπορεί κανείς να βρει, τέλος, την κρουστική απόκριση, μέσω πινάκων:

$$h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{-\kappa_i t} u(t)$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 3x(t) - 6\frac{d}{dt}x(t)$$

Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται ως

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)$$

Είναι $(j2\pi f)Y(f) + 2Y(f) = 3X(f) - 6(j2\pi f)X(f)$

$$Y(f)(2 + j2\pi f) = X(f)(3 - 6(j2\pi f))$$

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{3 - 6(j2\pi f)}{2 + j2\pi f} = \frac{3}{2 + j2\pi f} - 6 \frac{j2\pi f}{2 + j2\pi f}$$

Αρα $h(t) = 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}z(t) = 3e^{-2t}u(t) - 6\frac{d}{dt}e^{-2t}u(t)$

$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$
 $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$
 Γνωστό γεγονός
 $Z(f)$
 $-6 \frac{1}{2 + j2\pi f} \cdot j2\pi f$
 $-6 \frac{j2\pi f}{2 + j2\pi f}$
 $-6Z(f) \cdot j2\pi f$
 $*$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Οπότε $h(t) = 3e^{-2t}u(t) - 6 \frac{d}{dt} e^{-2t} \cdot u(t)$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6 \left((e^{-2t})'u(t) + \underbrace{u'(t)}_{\delta(t)} \cdot e^{-2t} \right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) - 6 \left(-2e^{-2t}u(t) + \delta(t) \cdot e^{-2t} \right)$$

$$= 3e^{-2t}u(t) + 12e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)e^{-2t}$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t)e^{-2t} \quad \text{---} * \rightarrow f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6 \left[\cancel{e^{-2t}} \right]_{t=0}^1 \cdot \delta(t)$$

$$= 15e^{-2t}u(t) - 6\delta(t).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} u(t) = \delta(t) \\ !! \end{array} \right.$$

Ιδιότητα
Σειριακής
*

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

• Συστήματα και Σειρές Fourier

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
 - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
- Το περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$


- Αναπτύσσεται δηλαδή σε άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων του ΓΧΑ συστήματος! ☺
- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(k f_0) X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

και αν το σύστημα $h(t)$ είναι πραγματικό τότε

$$y(t) = H(0)X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|H(k f_0)||X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k + \phi_h(k f_0))$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω το ΓΧΑ σύστημα της μορφής

$$\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t)$$

$$f_0 = 2\pi \frac{4}{2\pi} t$$

Βρείτε την έξοδό του όταν στην είσοδό του παρουσιαστεί το σήμα

$$x(t) = 3 + 2 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ξέρουμε ότι $y(t) = 3 \cdot \frac{H(0)}{?} + 2 \cdot \frac{|H(\frac{4}{2\pi})|}{?} \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} + \frac{\phi_h(\frac{4}{2\pi})}{?}\right)$

Είναι $\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = x(t) \xrightarrow{F} j2\pi f Y(f) + 3X(f) = X(f)$

Οπότε $(3 + j2\pi f)Y(f) = X(f) \Rightarrow \frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{3 + j2\pi f}$

Άρα $H(0) = \frac{1}{3 + j0} = \frac{1}{3}$, $H\left(\frac{4}{2\pi}\right) = \frac{1}{3 + j2\pi \frac{4}{2\pi}} = \frac{1}{3 + j4}$

Χρειάζεται το $|H(\frac{4}{2\pi})|$ και το $\phi_h(\frac{4}{2\pi})$.

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$\text{Άρα } H\left(\frac{4}{2\pi}\right) = \frac{1}{3+j4} \Rightarrow |H\left(\frac{4}{2\pi}\right)| = \frac{|1|}{|3+j4|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Επίσης, } \varphi_n(f) = \tan^{-1} \frac{H_I(f)}{H_R(f)} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{1}{3+j4} &= \frac{3-j4}{(3+j4)(3-j4)} = \frac{3-j4}{|3+j4|^2} = \frac{3-j4}{3^2+4^2} = \frac{3-j4}{25} = \\ &= \underbrace{\frac{3}{25}}_{\text{Re}} + j \underbrace{\frac{-4}{25}}_{\text{Im}}, \text{ οπότε } (1) \text{ δίνει:} \end{aligned}$$

$$\varphi_n\left(\frac{4}{2\pi}\right) = \tan^{-1} \frac{-4/25}{3/25} = \tan^{-1} \left(-\frac{4}{3}\right) = -\tan^{-1} \frac{4}{3} \approx -53^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα τελικά: } y(t) &= 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 53^\circ\right) \\ &= 1 + \frac{2}{5} \cdot \cos(4t + 7^\circ). \end{aligned}$$

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Είναι $y(t) = 1 + \frac{2}{5} \cos(4t + \pi) \xleftrightarrow{F}$

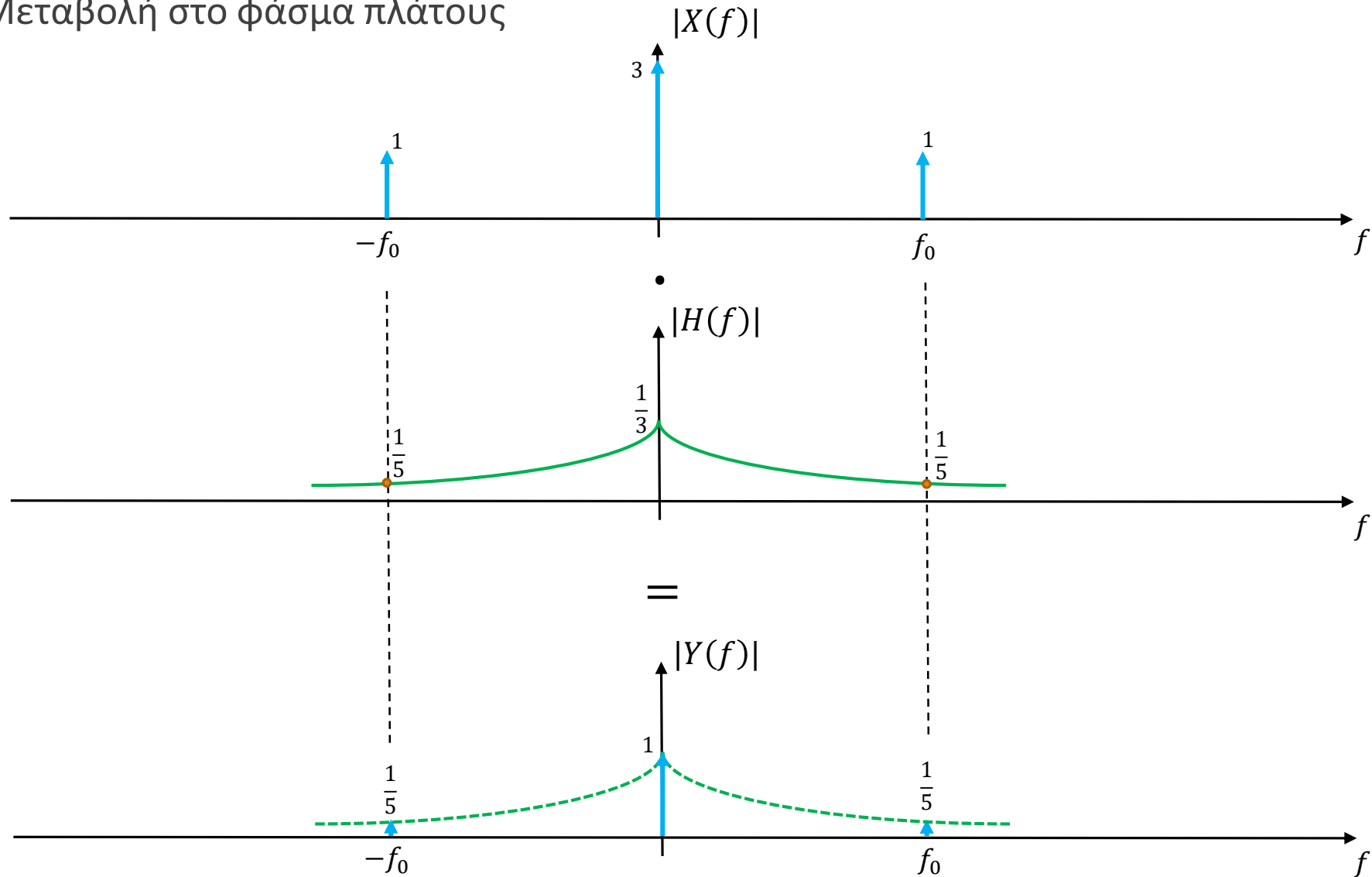
$$Y(f) = \delta(f) + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{2} \delta(f - \frac{4}{2\pi}) \cdot e^{j\pi} + \frac{1}{2} \delta(f + \frac{4}{2\pi}) e^{-j\pi} \right)$$

Ενώ για το $x(t) = 3 + 2\cos(4t + \frac{\pi}{3}) \xleftrightarrow{F}$

$$X(f) = 3\delta(f) + \delta(f - \frac{4}{2\pi}) e^{j\frac{\pi}{3}} + \delta(f + \frac{4}{2\pi}) e^{-j\frac{\pi}{3}}.$$

Ας δούμε την επίδραση της απόκρισης ηρώτας του συστήματος στο γάμα ηρώτας της εισόδου.

- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier
- Μεταβολή στο φάσμα πλάτους



• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Ας πούμε ότι ένα πραγματικό απεριοδικό σήμα $x(t)$ εμφανίζεται στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος
 - Μπορούμε να βρούμε την έξοδο?
 - Η έξοδος δίνεται από τη συνέλιξη της εισόδου με την κρουστική απόκριση
- Συνέλιξη στο χρόνο $\leftrightarrow$ Γινόμενο στη συχνότητα
- Οπότε αν η απόκριση συχνότητας είναι $H(f)$ πολύ εύκολα μπορούμε να βρούμε ότι

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

- Αν η είσοδος και η απόκριση συχνότητας μπορούν να γραφούν ως ρητές συναρτήσεις (πολυώνυμα) του $j2\pi f$, τότε

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{\sum_{l=0}^M b_l (j2\pi f)^l}{\sum_{i=0}^N a_i (j2\pi f)^i} \frac{\sum_{k=0}^K d_k (j2\pi f)^k}{\sum_{p=0}^L c_p (j2\pi f)^p} \\ &= \frac{\prod_{l=1}^M (j2\pi f + \mu_l)}{\prod_{i=1}^N (j2\pi f + \kappa_i)} \frac{\prod_{k=1}^K (j2\pi f + m_k)}{\prod_{p=1}^L (j2\pi f + q_p)} \end{aligned}$$

και αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

• Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = e^{-3t}u(t)$, στο οποίο παρουσιάζεται η είσοδος $x(t) = (2e^{-t} + e^{-2t})u(t)$. Βρείτε την έξοδο $y(t)$.

1^η λύση: συνέλιξη ...

2^η λύση: $Y(f) = X(f)H(f)$

$$X(f) = F\{x(t)\} = F\{2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)\}$$

$$= \frac{2}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} = \frac{4 + 2j2\pi f + 1 + j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$$

$$= \frac{5 + 3j2\pi f}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$$

$$H(f) = F\{h(t)\} = \frac{1}{3+j2\pi f}$$

Γνωστά $\int$ ω η
(από πίνακες)

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Οπότε $Y(f) = \frac{5 + 3j2\pi f}{(1 + j2\pi f)(2 + j2\pi f)(3 + j2\pi f)} = \frac{5 + 3u}{(1 + u)(2 + u)(3 + u)}$ $\leftarrow$

$= \frac{A}{\underbrace{1 + j2\pi f}_u} + \frac{B}{\underbrace{2 + j2\pi f}_u} + \frac{C}{\underbrace{3 + j2\pi f}_u}$ $\leftarrow$ (Θέτω $u = j2\pi f$ για ευκολία)

Έτσι

$$A = \frac{5 + 3u}{(1 + \cancel{u})(2 + u)(3 + u)} \bigg|_{u=-1} = \frac{5 + 3u}{(2 + u)(3 + u)} \bigg|_{u=-1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$B = \frac{5 + 3u}{(1 + u)(2 + \cancel{u})(3 + u)} \bigg|_{u=-2} = \frac{5 + 3u}{(1 + u)(3 + u)} \bigg|_{u=-2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$C = \frac{5 + 3u}{(1 + u)(2 + u)(3 + \cancel{u})} \bigg|_{u=-3} = \frac{5 + 3u}{(1 + u)(2 + u)} \bigg|_{u=-3} = \frac{-4}{2} = -2$$

- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Παράδειγμα:

Οπότε
$$Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} + \frac{-2}{3+j2\pi f}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f} \\ a > 0 \end{array} \right.$$

Άρα
$$y(t) = e^{-t} u(t) + e^{-2t} u(t) - 2e^{-3t} u(t),$$
 λόγω του ζεύγους μετασχ. Fourier πάνω δεξιά.

Εξασκηθείτε, υπολογίζοντας αναλυτικά τη συνέλιξη στο χρόνο και δείξτε ότι καταλήγει στο ίδιο αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω.

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

- Συστήματα που επιτρέπουν τη διέλευση ορισμένων συχνοτήτων στην έξοδό τους ονομάζονται **φίλτρα επιλογής συχνοτήτων**
- Θα μελετήσουμε τα ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων (μηδενικής φάσης)
 - Ιδανικά : μη πραγματοποιήσιμα (θεωρητικά μοντέλα)

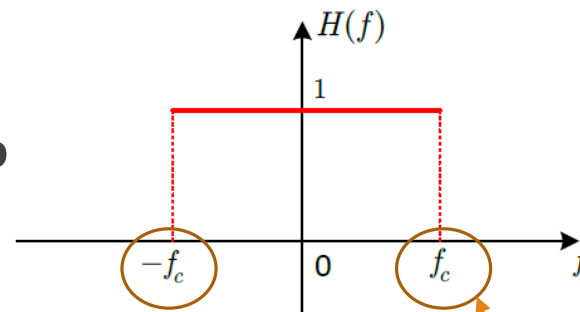
• Τέσσερις κατηγορίες

• Χαμηλοπερατό φίλτρο

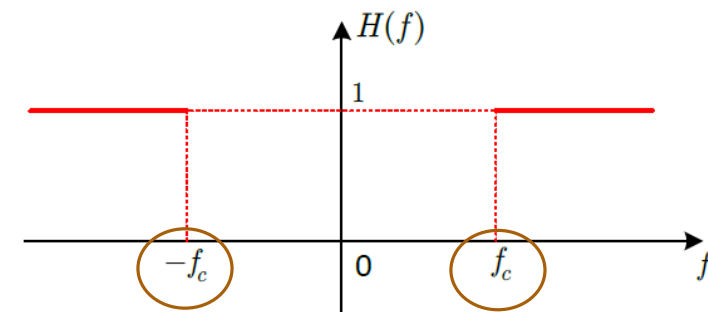
• Υψηλοπερατό φίλτρο

• Ζωνοπερατό φίλτρο

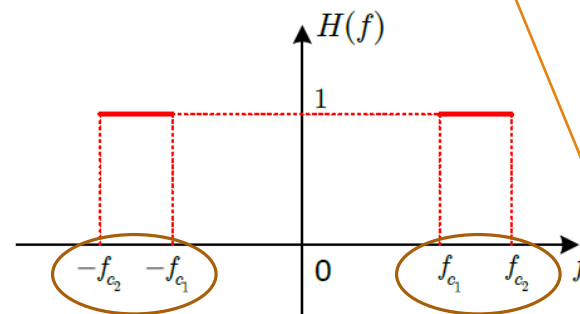
• Ζωνοφρακτικό φίλτρο



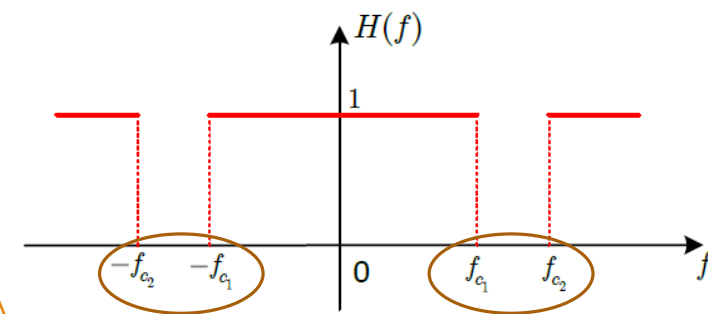
(α) Χαμηλοπερατό



(β) Υψηλοπερατό



(γ) Ζωνοπερατό



(δ) Ζωνοφρακτικό

Συχνότητα αποκοπής

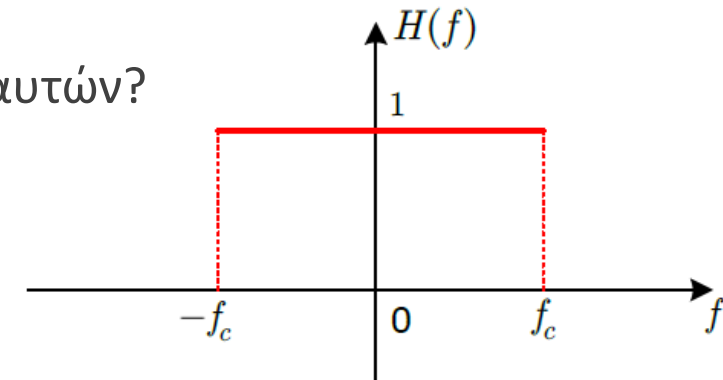
• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?

• Ας πάρουμε το χαμηλοπερατό φίλτρο

$$H(f) = \begin{cases} 1, & -f_c < f < f_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} =$$

$$= \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$



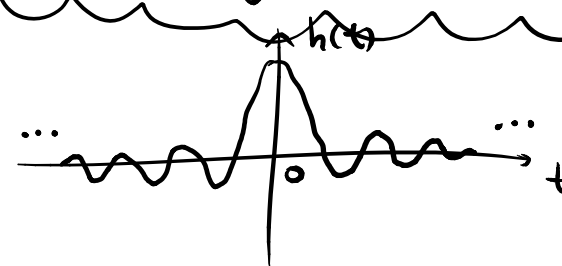
(α) Χαμηλοπερατό

$2f_c$

Δυσικότητα : $A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} AT \text{sinc}(fT)$

$AT \text{sinc}(Tt) \xleftarrow{F} A \text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right) = A \text{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$

Άρα $h(t) = 2f_c \cdot \text{sinc}(2f_c t)$.

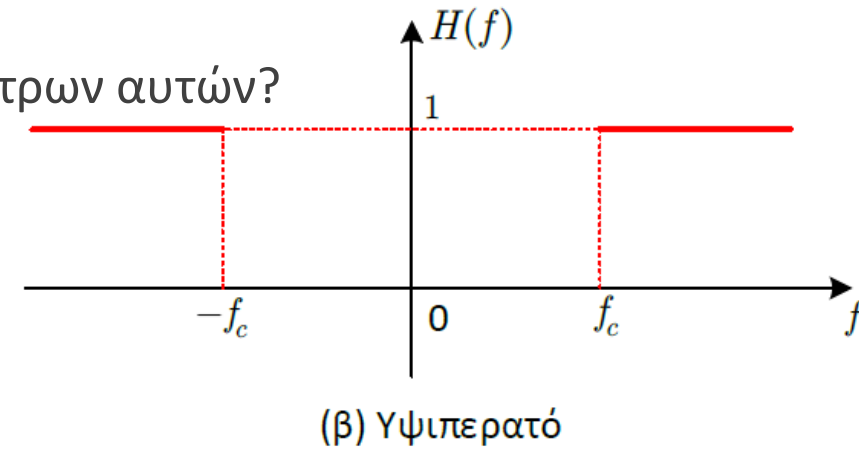


• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Ποιες είναι οι κρουστικές αποκρίσεις των φίλτρων αυτών?

• Ας πάρουμε το υψιπερατό φίλτρο

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f > f_c \text{ και } f < -f_c \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



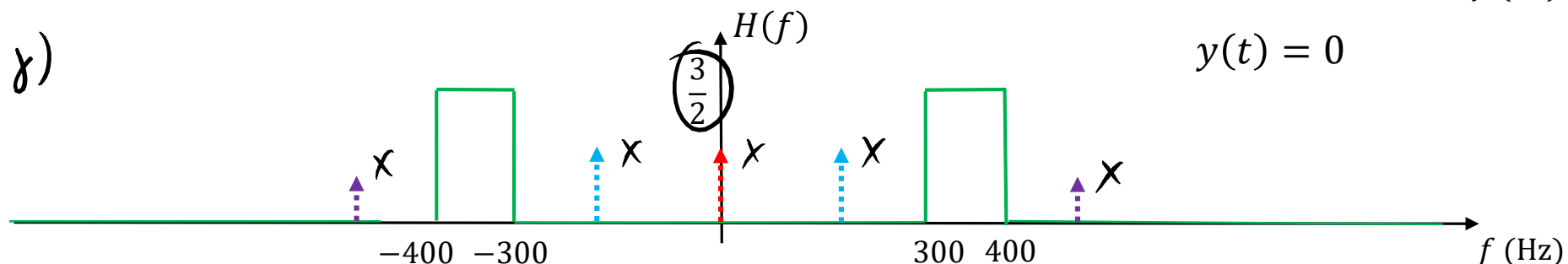
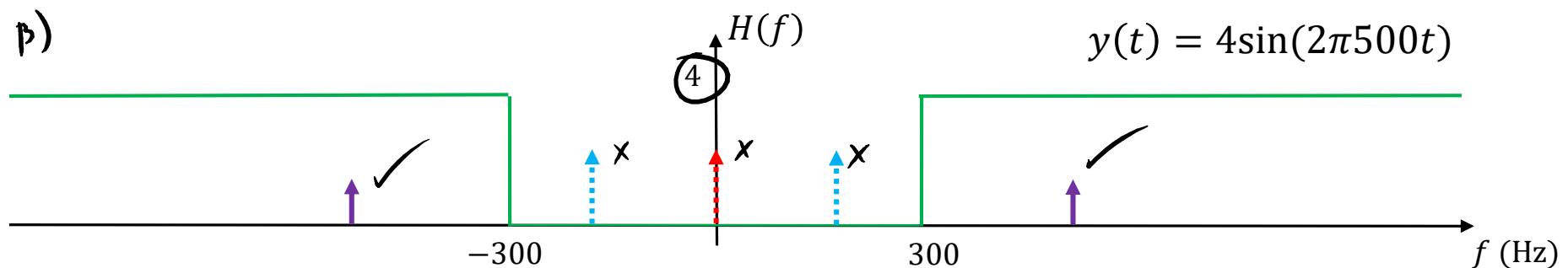
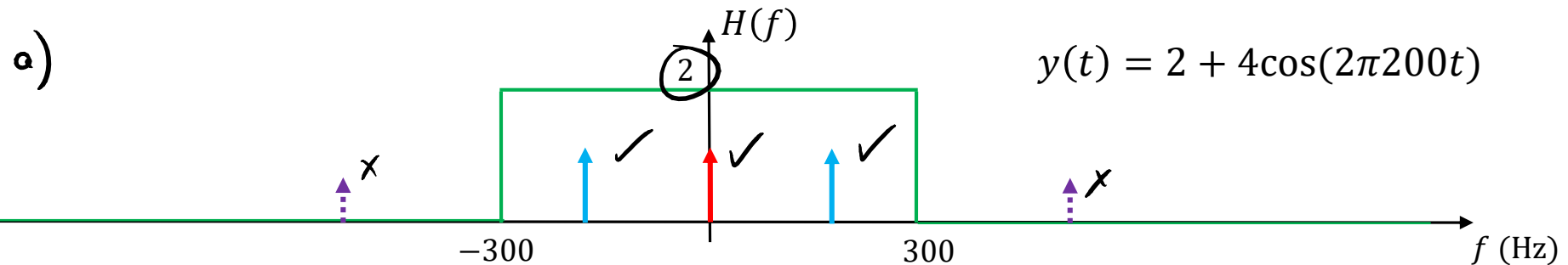
$$\begin{aligned} &= 1 - H_{\text{χαμηλ.}}(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} h(t) = \delta(t) - F^{-1}\{H_{\text{χαμηλ.}}(f)\} \\ &= \delta(t) - 2f_c \cdot \text{sinc}(2f_c t) \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι τα φίλτρα έχουν κρουστική απόκριση $h(t)$ άπειρης διάρκειας και με μη-μηδενικές τιμές για $t < 0$!

• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Παράδειγμα: $X(f) = \delta(f) + \delta(f - 200) + \delta(f + 200) + \frac{1}{2j}\delta(f - 500) - \frac{1}{2j}\delta(f + 500)$

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2\cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?



• Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

• Παράδειγμα:

○ Τι θα συμβεί αν ένα σήμα της μορφής $x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi 200t) + \sin(2\pi 500t)$ περάσει από τα παρακάτω ιδανικά φίλτρα?

Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το έτοιμο αποτέλεσμα από την προηγ. slide, αφού το $x(t)$ είναι περιοδικό, αναπτύσσεται σε Σειρά Fourier!

$$\alpha) y(t) = 1 \cdot \underbrace{H(0)}_2 + 2 \underbrace{|H(200)|}_2 \cdot \cos(2\pi 200t + \underbrace{\phi_h(200)}_0) + \underbrace{|H(500)|}_0 \sin(2\pi 500t + \underbrace{\phi_h(500)}_0) \\ = 2 + 4 \cos(2\pi 200t) + 0 = 2 + 4 \cos(2\pi 200t).$$

$$\beta) y(t) = 1 \cdot \underbrace{H(0)}_0 + 2 \underbrace{|H(200)|}_0 \cdot \cos(2\pi 200t + \underbrace{\phi_h(200)}_0) + \underbrace{|H(500)|}_4 \cdot \sin(2\pi 500t + \underbrace{\phi_h(500)}_0) \\ = 0 + 0 + 4 \sin(2\pi 500t) = 4 \sin(2\pi 500t)$$

$$\gamma) y(t) = 1 \cdot \cancel{H(0)} + 2 \cancel{|H(200)|} \cdot \cos(2\pi 200t + \cancel{\phi_h(200)}) + \cancel{|H(500)|} \cdot \sin(2\pi 500t + \cancel{\phi_h(500)}) \\ = 0 + 0 + 0 = 0 !$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

