

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 13^Η

- Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Ισχύος
- Αντίστροφος Μετασχ. Fourier
- ΓΧΑ συστήματα στο χώρο του χρόνου και της συχνότητας



- **Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος**
- Γνωρίζουμε ότι τα σήματα ισχύος δεν είναι απολύτως ή τετραγωνικώς ολοκληρώσιμα, οπότε δεν έχουν Μετασχ. Fourier
- Μπορούμε άραγε να εκμεταλλευτούμε τη χρήση «ιδιαίτερων» συναρτήσεων όπως η συνάρτηση Δέλτα για να βρούμε μια τέτοια έκφραση?
- Μπορούμε να γράψουμε ένα απεριοδικό σήμα ισχύος ως

$$\hat{x}(t) = x_0 + x_z(t)$$

με

- x_0 τη μέση τιμή του σήματος (αριθμός)

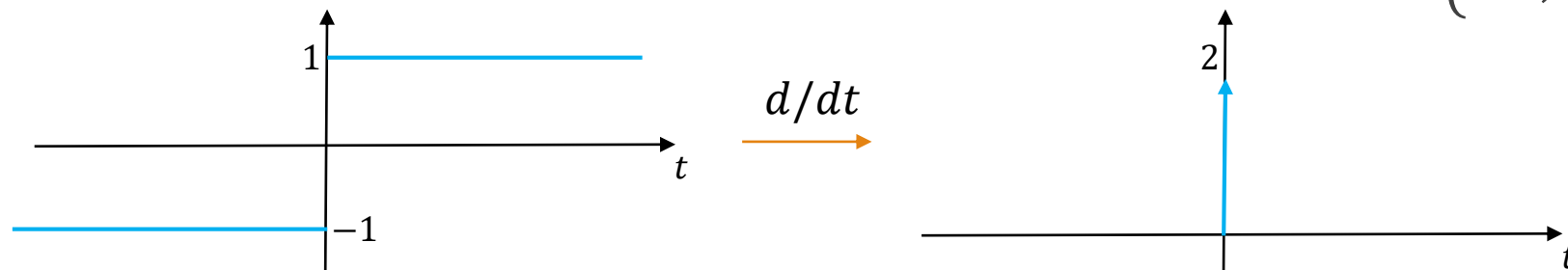
$$x_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

- $x_z(t)$ το υπόλοιπο σήμα μηδενικής μέσης τιμής
- Τότε

$$\hat{X}(f) = x_0 \delta(f) + X_z(f)$$

Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, για το μετασχ. Fourier του σήματος $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$



- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $x_0 = 0$

- Άρα

$$\text{sgn}(t) = \hat{x}(t) = 0 + x_z(t) \leftrightarrow \hat{X}(f) = 0 \cdot \delta(f) + X_z(f) = X_z(f)$$

- Παραγωγίζοντας το σήμα έχουμε

$$\frac{d}{dt} x_z(t) = 2\delta(t) \leftrightarrow j2\pi f X_z(f) = 2 \Leftrightarrow X_z(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

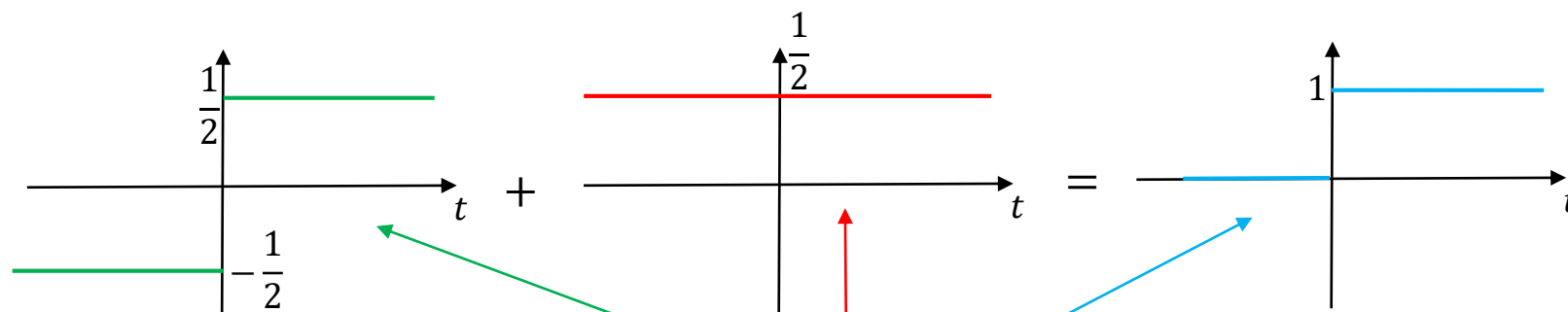
σύμφωνα με την ιδιότητα της παραγωγίσης του μετασχ. Fourier

- Οπότε

$$\hat{X}(f) = X_z(f) = F\{\text{sgn}(t)\} = \frac{1}{j\pi f}$$

• Μετασχηματισμός Fourier και Απεριοδικά Σήματα Ισχύος

- Ως παράδειγμα, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$



- Το σήμα $u(t)$ γράφεται ως

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t)$$

- Άρα

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2}\right\} + F\left\{\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

- Οπότε

$$F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

• Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

Συνήθη Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk2\pi f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
$\cos(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{j\phi}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\phi}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t + \phi)$	$\frac{1}{2}e^{-j\phi}e^{-j\pi/2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}e^{j\phi}e^{j\pi/2}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \text{sinc}(fT)$
$A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t)u(t), a > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + 4\pi^2 f_0^2}$
$e^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$te^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^2}$
$-te^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\sigma^2 f^2}{2}}$

- **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier**

- Για την αντίστροφη διαδικασία εύρεσης του σήματος στο χρόνο από το μετασχ. Fourier του, συνήθως ακολουθούμε τις παρακάτω μεθόδους:

- Χρήση του ορισμού

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

- Χρήση ιδιοτήτων (π.χ. δυϊκότητα)

- Χρήση πινάκων γνωστών μετασχηματισμών

ενώ χρησιμοποιείται συχνά η τεχνική του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Έστω ότι γνωρίζετε τα παρακάτω:

■ Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και έχει μόνο θετικές τιμές

■ Ισχύει

$$F^{-1}\{(2 + j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t), \quad A \in \mathbb{R}$$

■ Ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \frac{4}{15}$$

Βρείτε το $x(t)$

$$F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\} = Ae^{-3t}u(t)$$

$$F\{F^{-1}\{(2+j2\pi f)X(f)\}\} = F\{Ae^{-3t}u(t)\}$$

$$(2+j2\pi f)X(f) = \frac{A}{3+j2\pi f} \Rightarrow X(f) = \frac{A}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)}.$$

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Οπότε $X(f) = \frac{A}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)}$. Από Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

Με ενδιαφέρει να υπολογίσω το $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{4}{15}$.

Με ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα:

$$X(f) = A \left(\frac{1}{(3+j2\pi f)(2+j2\pi f)} \right) = A \underbrace{\left(\frac{A_1}{3+j2\pi f} + \frac{A_2}{2+j2\pi f} \right)}_{\text{Αναπτ. με κλάσ.}}$$

Είναι $A_1 = \frac{1}{(3+u)(2+u)} (3+u) \Big|_{u=-3} = \frac{1}{2+u} \Big|_{u=-3} = -1$

$A_2 = \frac{1}{(3+u)(2+u)} (2+u) \Big|_{u=-2} = \frac{1}{3+u} \Big|_{u=-2} = 1$

Οπότε $X(f) = A \left(\frac{-1}{3+j2\pi f} + \frac{1}{2+j2\pi f} \right)$

• Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Από Πινάκα Ίσων Μ.Φ. έχουμε:

$$X(f) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t) = A \left(-e^{-3t} u(t) + e^{-2t} u(t) \right) \\ = A \left(e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t).$$

Parseval: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{4}{15} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(e^{-2t} - e^{-3t}) u(t) \right)^2 dt = \frac{4}{15}$

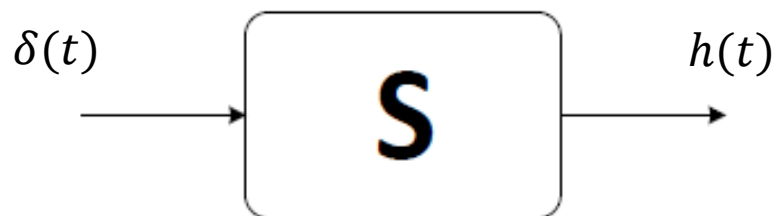
$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} A^2 (e^{-2t} - e^{-3t})^2 dt = \frac{4}{15} \Rightarrow A^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} (e^{-4t} - 2e^{-5t} + e^{-6t}) dt}_{\frac{1}{60}} = \frac{4}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{A^2}{60} = \frac{4}{15} \Rightarrow A^2 = 16 \Rightarrow A = \pm 4$$

Επειδή το $x(t) \geq 0 \quad \forall t$ (από ελεγχόμενη), $A = 4$.

Άρα $x(t) = 4(e^{-2t} - e^{-3t}) u(t).$

- **ΓΧΑ Συστήματα**
- Σκεφτείτε πόσες πιθανές είσοδοι υπάρχουν σε ένα σύστημα!
- Θα θέλαμε να μπορούμε να βρίσκουμε την έξοδο για κάθε είσοδο με έναν ενιαίο τρόπο
- Προς αυτήν την κατεύθυνση θα εισάγουμε την έννοια της **κρουστικής απόκρισης (impulse response)**
- Η κρουστική απόκριση είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση Δέλτα
- Συμβολισμός: $h(t)$



- Πώς μπορούμε να βρούμε την έξοδο $y(t)$ ενός ΓΧΑ συστήματος?
- Δείτε την παρακάτω ακολουθία:

a) κρουστική απόκριση :

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

b) χρονική αμεταβλητότητα:

$$\delta(t - \tau) \rightarrow h(t - \tau)$$

c) γραμμικότητα:

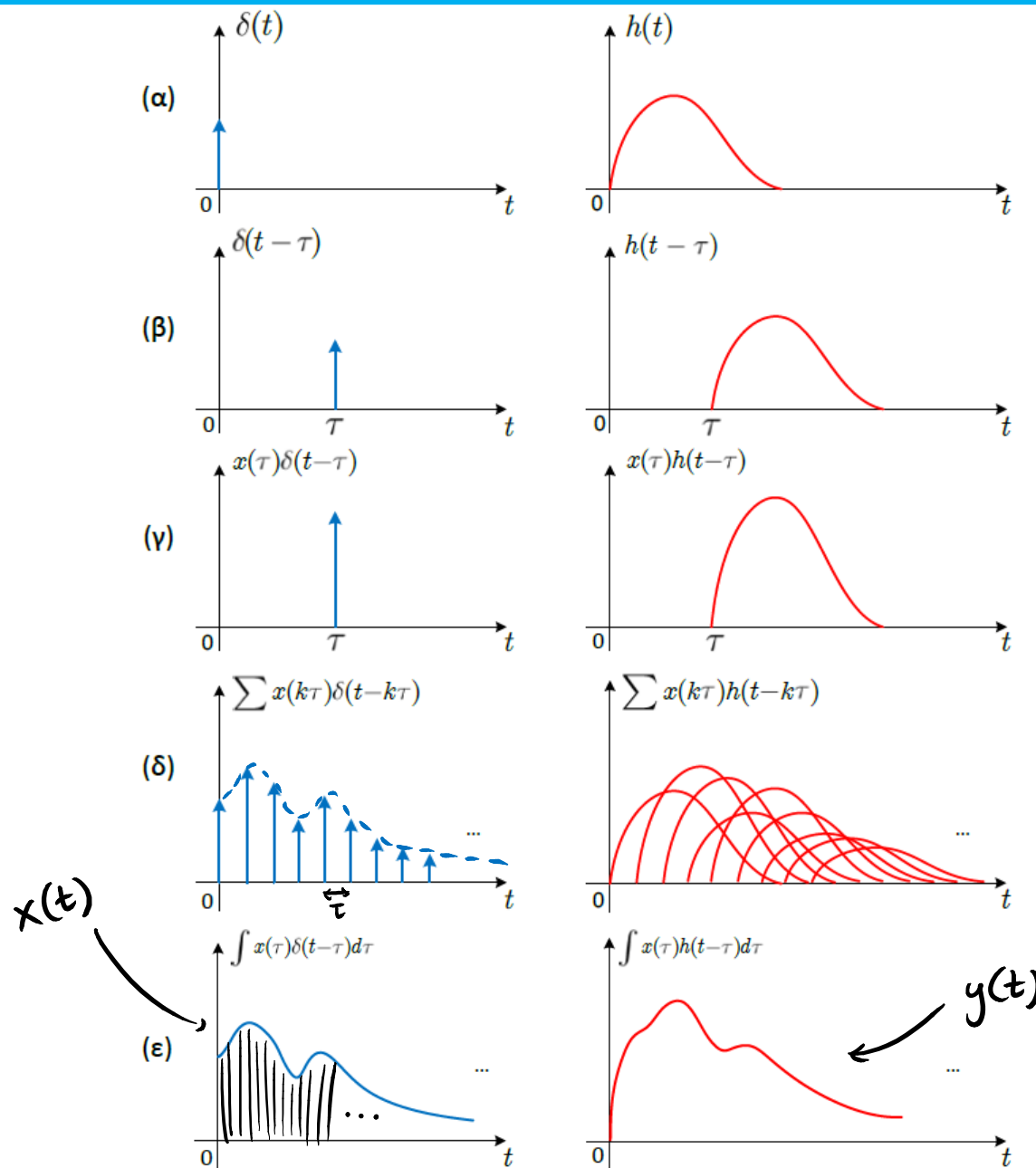
$$x(\tau)\delta(t - \tau) \rightarrow x(\tau)h(t - \tau)$$

d) γραμμικότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$$

e) Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για είσοδο $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$



Χ.Α.

γραφικότητα
(ομογένεια)

γραφικότητα
(αδρεστικότητα)

έξοδος ΓΧΑ
συστήματος

- Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(\tau) \Big|_{\tau=t} = x(t)$$

είναι πολύ σημαντικό και η πράξη που εκτελεί ονομάζεται **συνέλιξη** μεταξύ του $x(t)$ και του $\delta(t)$

- Η πράξη αυτή συμβολίζεται με τον τελεστή $*$: $x(t) * \delta(t)$
 - Από ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα ξέρουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται με $x(t)$, δηλ.

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

- Η πράξη της συνέλιξης μπορεί να οριστεί μεταξύ οποιωνδήποτε σημάτων:

$$c(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- Η **έξοδος** ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται από τη **συνέλιξη** της **εισόδου** του με την **κρουστική απόκριση** του συστήματος

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$

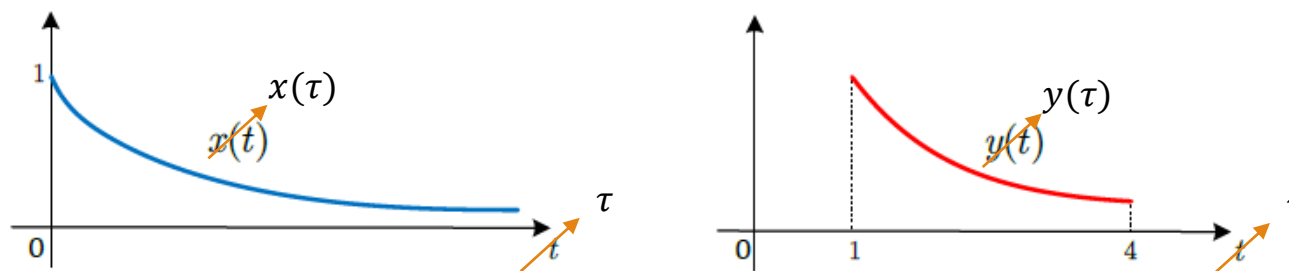
- Ας εξετάσουμε την πράξη της συνέλιξης
- Η συνέλιξη έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες

Ιδιότητες συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax(t) * y(t) = x(t) * ay(t) = a(x(t) * y(t)), a \in \mathbb{R}$
Αντιμεταθετικότητα	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Προσεταιριστικότητα	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Επιμεριστικότητα	$x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1(t) = x_1(t) * y(t) \\ z_2(t) = x_2(t) * y(t) \\ \text{αν } x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ \text{τότε } z(t) = x(t) * y(t) = az_1(t) + bz_2(t) \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x(t) : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ y(t) : [t_3, t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x(t) * y(t) : [t_1 + t_3, t_2 + t_4] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$

- Όλες αποδεικνύονται με τον ορισμό της
- Η συνέλιξη φημίζεται για τη δυσκολία της ως πράξη
 - Ας δούμε πόσο απλή είναι τελικά 😊

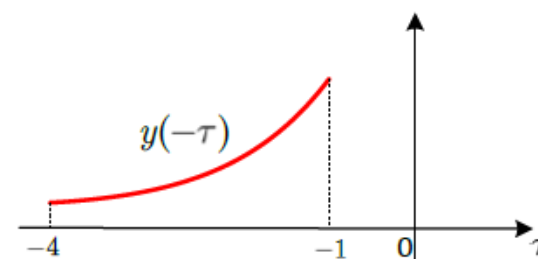
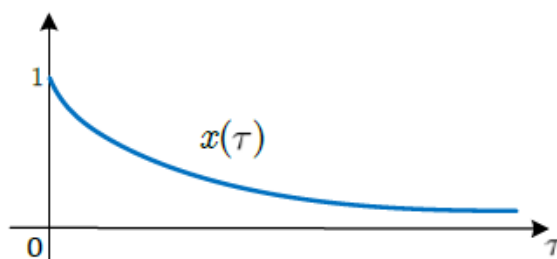
Συνέλιξη

- Έστω δυο σήματα $x(t)$, $y(t)$ των οποίων ζητούμε τη συνέλιξη $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$

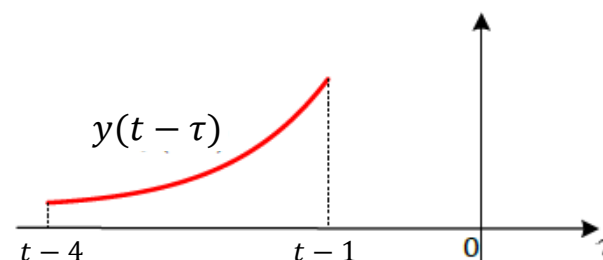
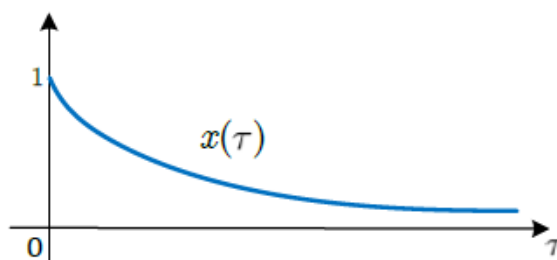


- Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί **χρονική αντιστροφή** και στη συνέχεια **χρονική μετατόπιση**

- Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα



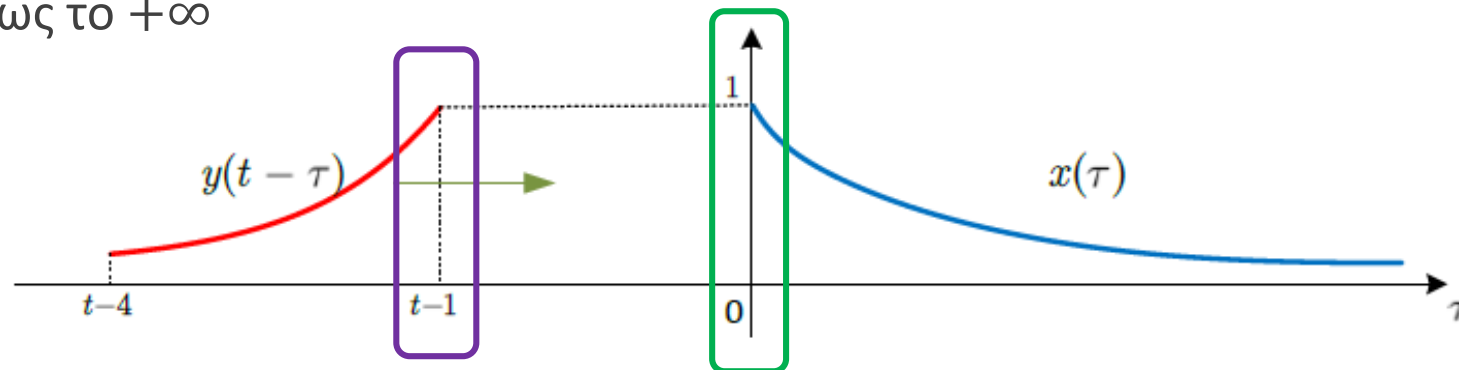
Αντιστροφή



Μετατόπιση

• Συνέλιξη

- Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα τ και ολισθαίνουμε το $y(t - \tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 1 < 0 \Rightarrow t < 1$$

και

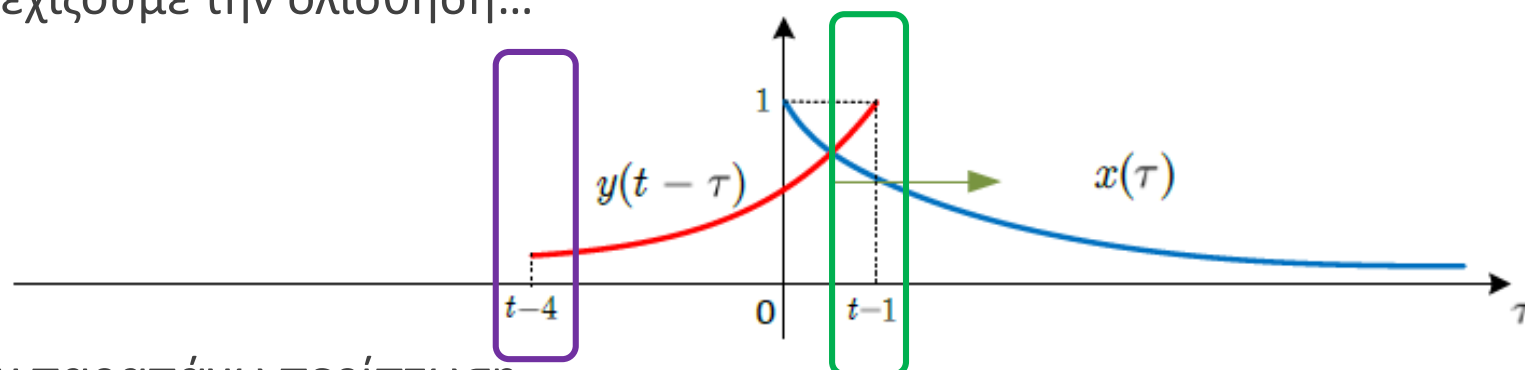
$$c(t) = 0$$

αφού τα δυο σήματα δε «ζουν» σε κοινό διάστημα

- Αυτό θα πάψει να συμβαίνει όταν το $y(t - \tau)$ πλησιάσει το $x(\tau)$ έτσι ώστε το **δεξί «άκρο»** του περάσει το $t = 0$...
 - ...που είναι το **αριστερό «άκρο»** του $x(\tau)$

• Συνέλιξη

• Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



• Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 < 0 \text{ και } t - 1 > 0 \Rightarrow 1 < t < 4$$

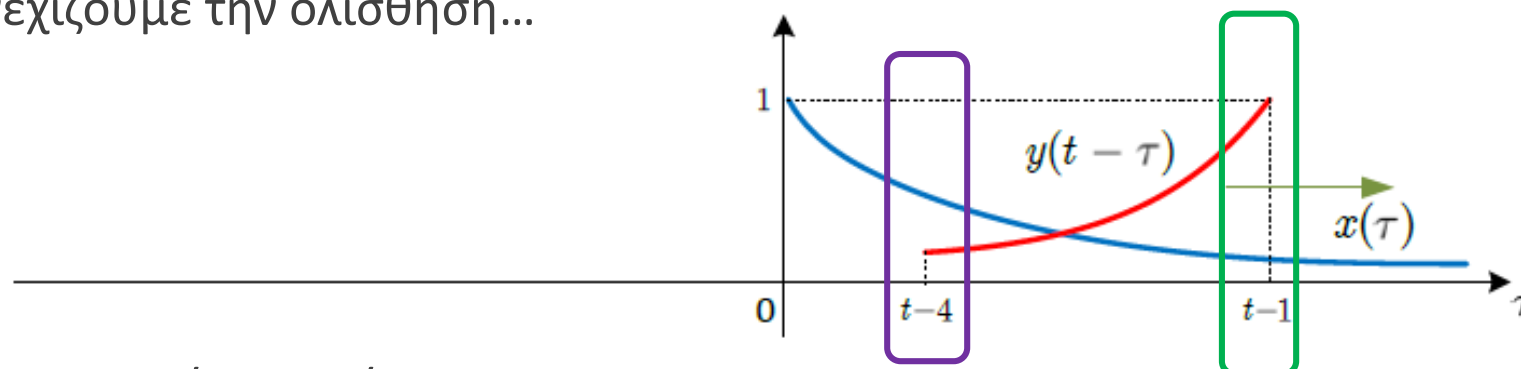
και

$$c(t) = \int_0^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

• Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα (1, 4)

• Υπάρχει μια ακόμα περίπτωση...

- **Συνέλιξη**
- Συνεχίζουμε την ολίσθηση...



- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t - 4 > 0 \Rightarrow t > 4$$

και

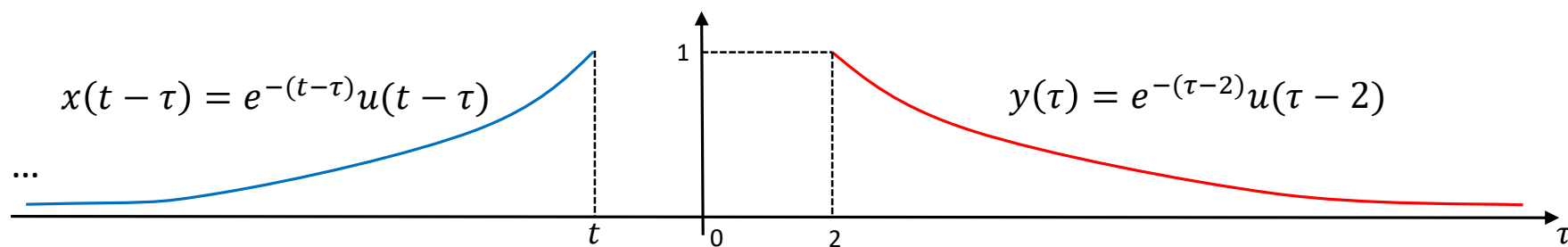
$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $(4, +\infty)$
- Άλλες περιπτώσεις δεν υπάρχουν
- Η λύση που περιγράφηκε ονομάζεται **γραφική λύση συνέλιξης**

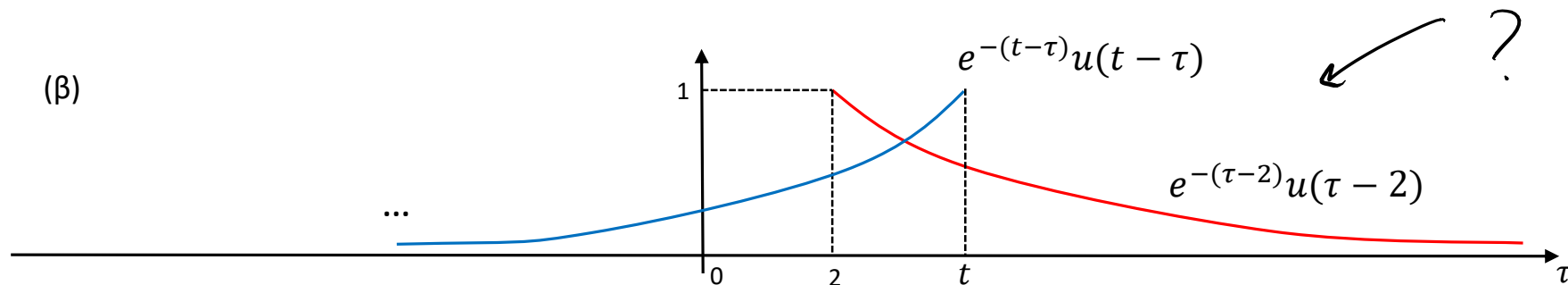
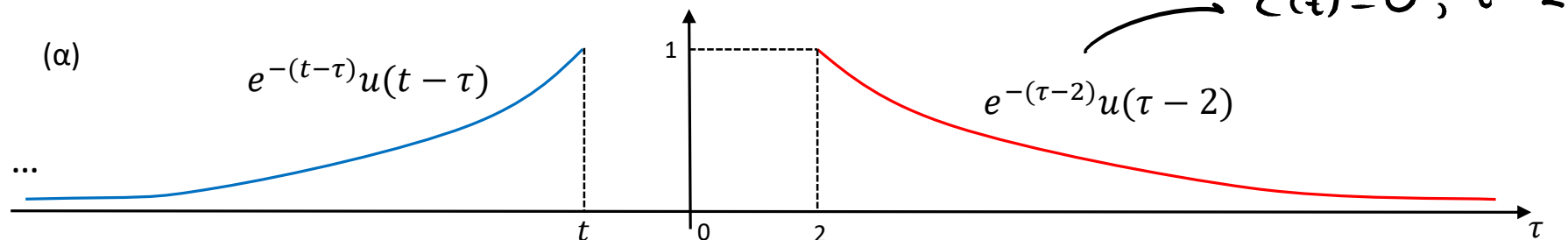
Συνέλιξη

Παράδειγμα

Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$



Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις



- Συνέλιξη

- Παράδειγμα

1^η περίπτωση: $c(t) = x(t) * y(t) = 0$, $y = t < 2$.

2^η περίπτωση: $c(t) = \int_2^t y(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_2^t e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)} d\tau$

$$= \int_2^t e^{-\tau} \cdot \underbrace{e^2 \cdot e^{-t}}_{\text{constant}} \cdot e^{\tau} d\tau = e^{-(t-2)} \int_2^t \cancel{e^{-\tau}} \cdot \cancel{e^{\tau}} d\tau$$

$$= e^{-(t-2)} \int_2^t d\tau = e^{-(t-2)} \tau \Big|_2^t = (t-2) e^{-(t-2)}, \quad t > 2.$$

Συνολικά,

$$c(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2) e^{-(t-2)}, & t > 2 \end{cases} = (t-2) e^{-(t-2)} u(t-2).$$

• Συνέλιξη

• Παράδειγμα

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = e^{-t}u(t)$, $y(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ με την **αλγεβρική** μέθοδο

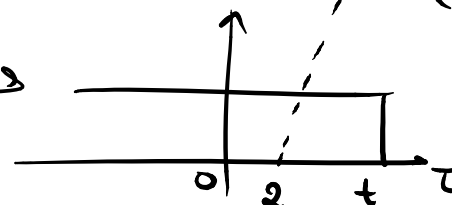
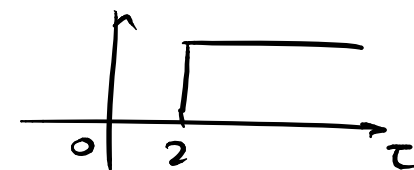
$$c(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)} u(\tau-2) e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)} \underbrace{u(\tau-2) u(t-\tau)}_{\text{}} d\tau$$

$$u(\tau-2) = \begin{cases} 1, & \tau > 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau > 0 \Leftrightarrow \tau < t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(\tau-2) u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & 2 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



$$\text{Άρα } c(t) = \int_2^t e^{-(\tau-2)} e^{-(t-\tau)} d\tau = \dots = (t-2) e^{-(t-2)} u(t-2).$$

- Συνέλιξη
- Παράδειγμα

○ Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$ και $y(t) = x(2t - 2)$



- Συνέλιξη

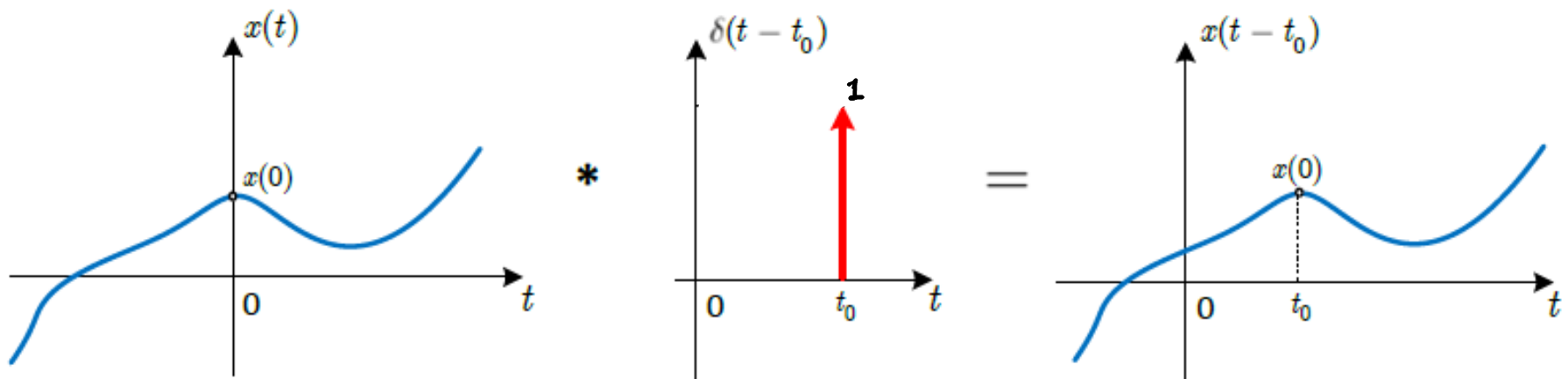
- Συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα

- Από τις βασικές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα έχουμε ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια συνάρτηση Δέλτα της μορφής

$$\delta(t - t_0)$$

δίνει το ίδιο σήμα μετατοπισμένο κατά t_0 , δηλ.

$$x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau - t_0) d\tau = x(\tau) \Big|_{\tau=t-t_0} = x(t - t_0)$$



• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Έστω ότι έχουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$
- Αν στην είσοδο εμφανιστεί το σήμα $x(t) = (Ae^{j\phi})e^{j2\pi f_0 t}$, $A > 0$, $\phi \in (-\pi, \pi]$ τότε η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = Ae^{j\phi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j(2\pi f_0(t-\tau))}d\tau \\&= Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau}_{H(f_0)} = H(f_0)[Ae^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t}] \\&= H(f_0)x(t)\end{aligned}$$

- Προφανώς ο συντελεστής $H(f_0)$ της εξόδου δεν είναι άλλος από το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης για την τιμή f_0 του μετασχηματισμού
- Η είσοδος περνά αυτούσια στην έξοδο και απλά πολλαπλασιάζεται με έναν μιγαδικό αριθμό!!

- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

- Το σήμα $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$ ονομάζεται **ιδιοσυνάρτηση** (eigenfunction) του συστήματος
- Η τιμή $H(f_0)$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του συστήματος
- Ο μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα** ή **συχνотική απόκριση** (frequency response)
- Αν τη γράψουμε σε πολική μορφή

$$H(f) = |H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

τότε ονομάζουμε:

- **Απόκριση πλάτους – magnitude response** : $|H(f)|$
- **Απόκριση φάσης – phase response** : $\phi_h(f)$

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το πλάτος της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα τη φάση της εισόδου

• Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier

- Η απόκριση πλάτους περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα πλάτους της εισόδου
- Η απόκριση φάσης περιγράφει πως επηρεάζει το σύστημα το φάσμα φάσης της εισόδου

- Ας το δούμε:

- Έξοδος ΓΧΑ συστήματος: $y(t) = x(t) * h(t)$

- Στο χώρο της συχνότητας: $Y(f) = X(f)H(f)$

- Πολική μορφή:

$$|Y(f)|e^{j\phi_y(f)} = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}|H(f)|e^{j\phi_h(f)}$$

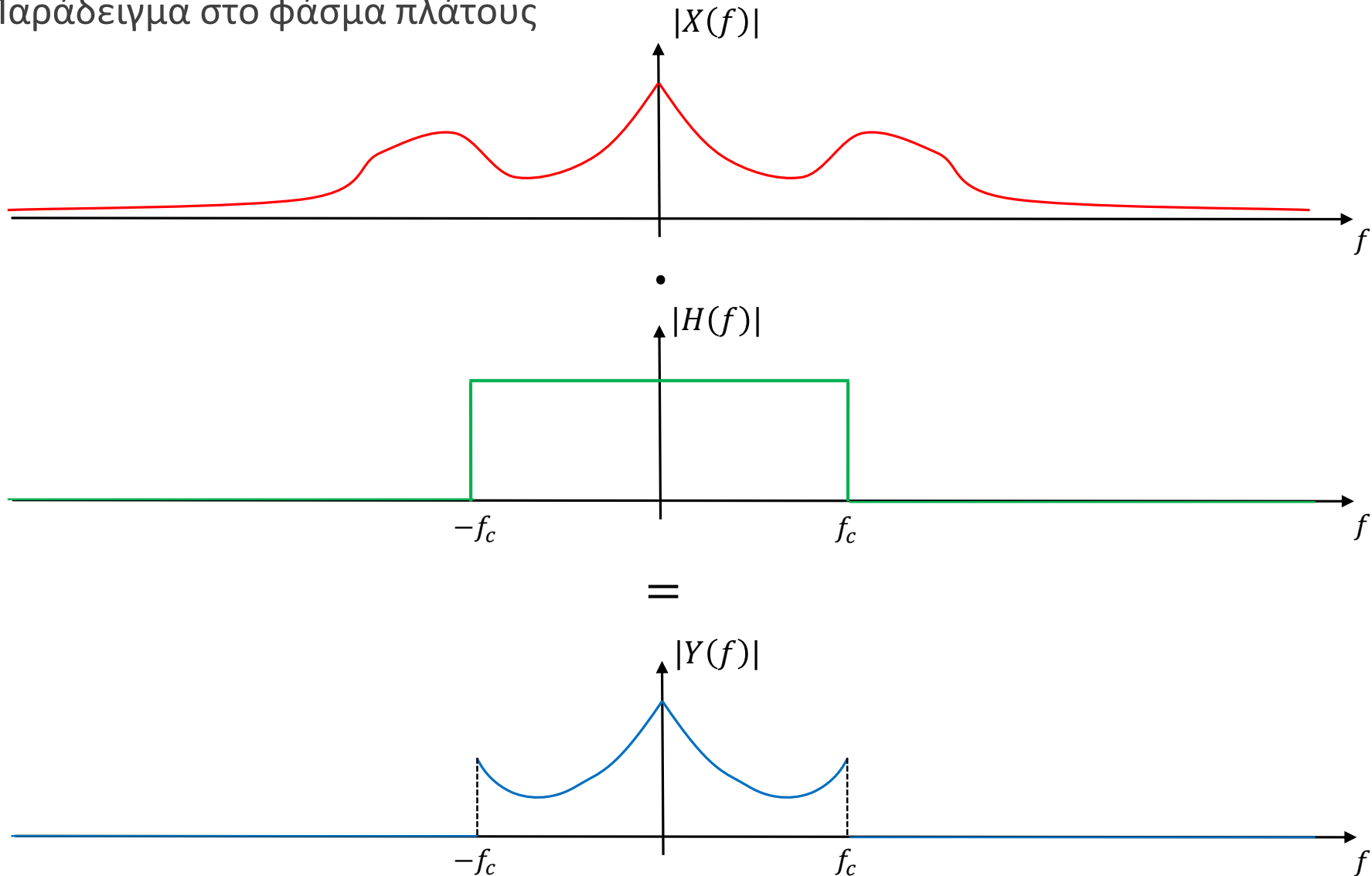
$$= |X(f)||H(f)|e^{j(\phi_x(f)+\phi_h(f))}$$

- Προφανώς

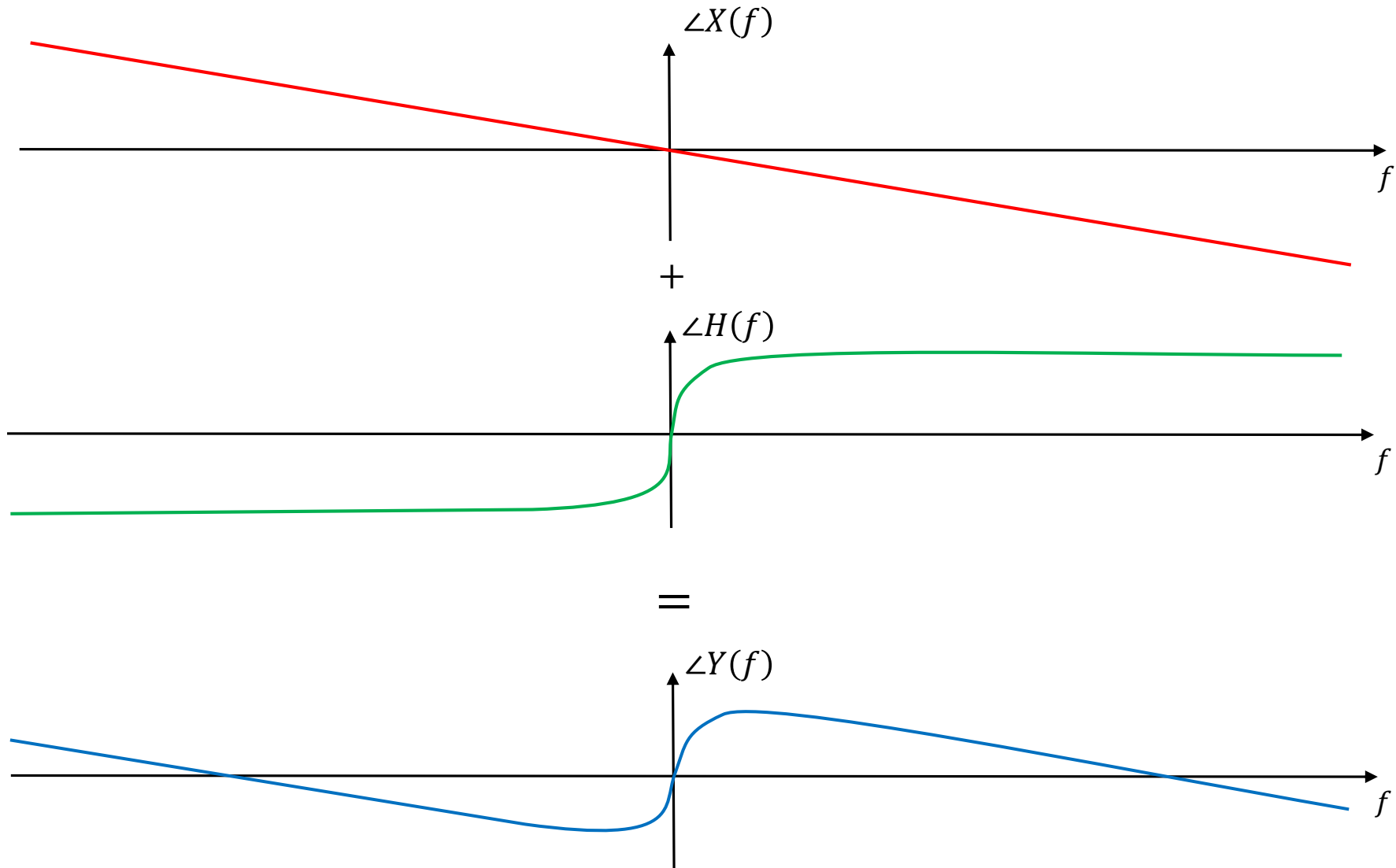
$$|Y(f)| = |X(f)||H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα στο φάσμα πλάτους



- Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα στο φάσμα φάσης



- **Συστήματα και Μετασχηματισμός Fourier**

$$|Y(f)| = |X(f)| |H(f)|$$

$$\phi_y(f) = \phi_x(f) + \phi_h(f)$$

- Η απόκριση πλάτους επηρεάζει το φάσμα πλάτους της εισόδου **πολλαπλασιαστικά**
- Η απόκριση φάσης επηρεάζει το φάσμα φάσης της εισόδου **αθροιστικά**
- Για μια **πραγματική** κρουστική απόκριση, η απόκριση συχνότητας της έχει τις γνωστές ιδιότητες συμμετρίας πραγματικού και φανταστικού μέρους καθώς και αποκρίσεων πλάτους και φάσης
 - Άρτιο πραγματικό μέρος – Άρτια απόκριση πλάτους
 - Περιττό φανταστικό μέρος – Περιττή απόκριση φάσης

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

