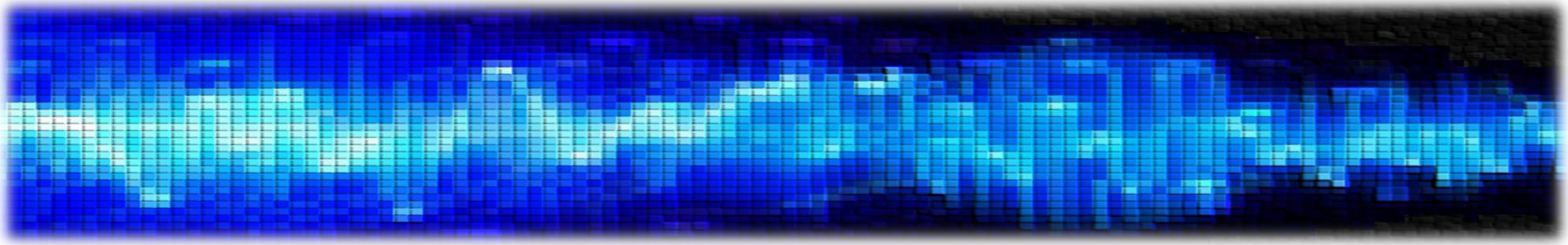
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 12^{Η}



- Ιδιότητες
- Μετασχηματισμός Fourier Περιοδικών Σημάτων

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f-f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\frac{f}{a})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Δυικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f)$
Παραγώγιση στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \lvert X(f)\rvert=\lvert X(-f)\rvert, \\ \phi_x(f)=-\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t)=x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Re$
Περιττό σήμα	$x(t)=-x(-t)$, πραγματικό	$X(f)\in\Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t)=\mathrm{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t)=\mathrm{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(f)\rvert^2df$

Τα έχουμε καλύψει

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

- Στάθμιση στο χρόνο

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

- Παράδειγμα:

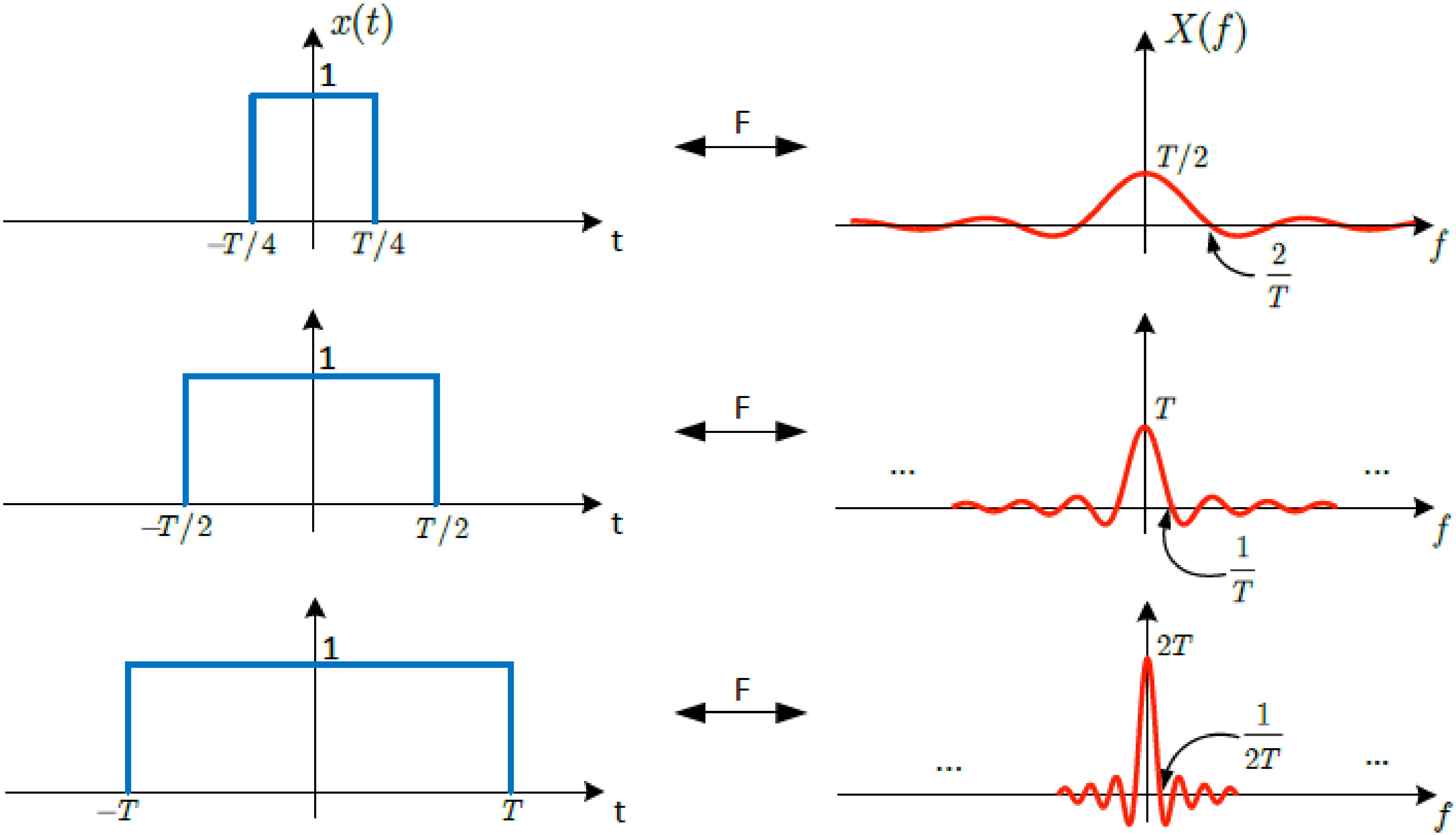
○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(2t), x\left(\frac{t}{2}\right)$ για $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$x(2t) = \mathrm{rect}\left(\frac{2t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} X\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2}\, T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)$$

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{\frac{1}{2}} X\left(\frac{f}{\frac{1}{2}}\right) = 2X(2f) = 2\,T\,\mathrm{sinc}(2fT)$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier



- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

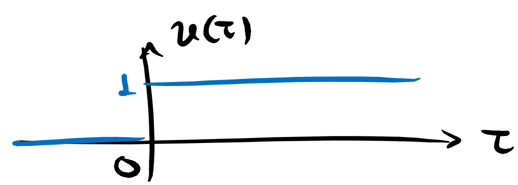
- Συνέλιξη στο χρόνο

$$x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} X(f)Y(f)$$

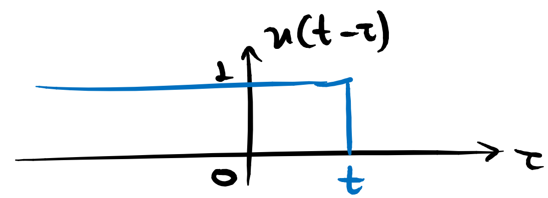
Έστω $\left.\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}u(t) \\ y(t) &= e^{-2t}u(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t)*y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau}u(\tau)\,e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)\,d\tau$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} e^{-2t} \cdot e^{+2\tau} u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = e^{-2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\tau} u(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$u(\tau) = \begin{cases} \boxed{1, \ \tau>0} \\ 0, \ \tau<0 \end{cases}$$



$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, \ t-\tau>0 \Rightarrow \boxed{1, \ \tau<t} \\ 0, \ t-\tau<0 \end{cases}$$



- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f}$$

Άρα $u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \boxed{0<\tau<t} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Οπότε $x(t)*y(t) = e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}\cdot 1\,d\tau = e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-2t}e^{\tau}\Big]_0^t =$

$$= e^{-2t}\left(e^{t}-1\right) = e^{-t}-e^{-2t}, \quad \boxed{t>0}$$

Τελικά, $x(t)*y(t) = \left(e^{-t}-e^{-2t}\right)u(t)$

Εναλλακτικά, $F\{x(t)*y(t)\} = X(f)Y(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}\cdot\frac{1}{2+j2\pi f}$

$$= \left.\frac{1}{(1+j2\pi f)(2+j2\pi f)}\right\} = \frac{1}{(1+u)(2+u)} = \frac{A}{1+u}+\frac{B}{2+u}$$

$u = j2\pi f$

$$A = \frac{1}{\cancel{(1+u)}(2+u)}\cancel{(1+u)}\Big]_{u=-1} = \frac{1}{2+u}\Big]_{u=-1} = 1$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$B = \frac{1}{(1+u)\cancel{(2+u)}}\cancel{(2+u)}\Big]_{u=-2} = \frac{1}{1+u}\Big]_{u=-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

Οπότε
$$\mathcal{F}\{x(t)*y(t)\} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u} = \frac{1}{1+j2\pi f} - \frac{1}{2+j2\pi f}$$

$$\frac{1}{1+j2\pi f} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{-t}u(t) \qquad \frac{1}{2+j2\pi f} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -e^{-2t}u(t)$$

Οπότε
$$x(t)*y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$
$$= \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t).$$

Γνωστό ζεύγος:

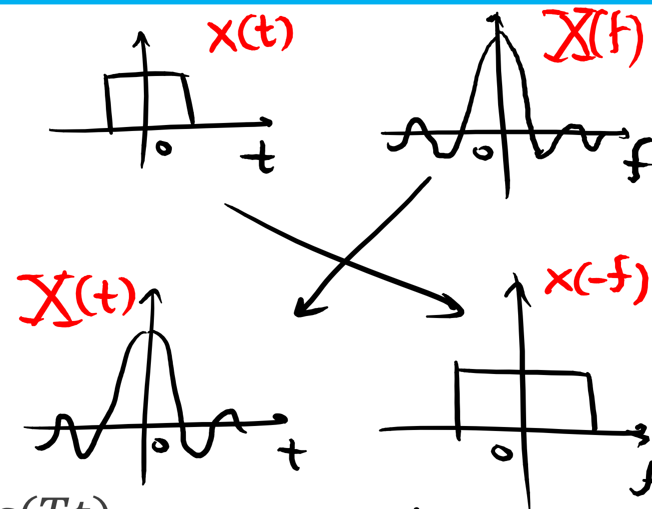
$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j2\pi f}$$
$$a>0$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

- Δυικότητα

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

$$X(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$$



- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = AT\text{sinc}(Tt)$

Ξέρουμε ότι $A\,\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\text{sinc}(fT)$

$t \leftarrow -f$ $\quad$ $f \leftarrow t$

Άρα

$AT\text{sinc}(Tt)$ $\quad$ $A\,\text{rect}\left(\frac{-f}{T}\right)$

$=$

$A\,\text{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$

γιατί το $\text{rect}(\cdot)$ είναι άρτια συνάρτηση

ΟΜΩΣ:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$\frac{1}{a+j2\pi t} \xleftrightarrow{F} e^{af}u(-f)$$

!

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

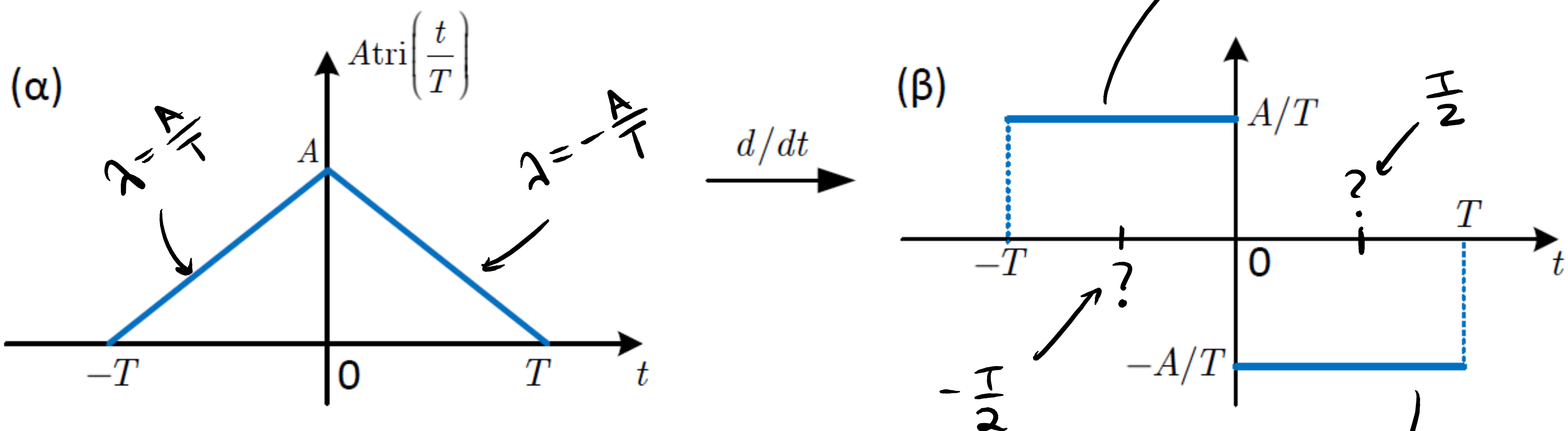
• Παραγώγιση στο χρόνο

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{F} (j2\pi f)X(f)$$

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού

$$\frac{A}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right)$$



$$-\frac{A}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

λ: συντελ. διεύθυνσης ευθείας

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

Είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \frac{A}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

$$\Big\updownarrow F \qquad\qquad \Big\updownarrow F$$

$$j2\pi f X(f) = \frac{A}{\cancel{T}}\cancel{T}\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot e^{j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}} - \frac{A}{\cancel{T}}\cancel{T}\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}$$

$$= A\,\mathrm{sinc}(fT)\underbrace{\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)}_{2j\sin(\pi fT)}$$

$$\cancel{j2}\pi f X(f) = \cancel{2j}A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\sin(\pi fT)$$

$$X(f) = A\,\mathrm{sinc}(fT)\cdot\left\{\sin(\pi fT)\cdot\frac{1}{\pi fT}\right\}T \rightarrow \mathrm{sinc}(fT)$$

$$= AT\,\mathrm{sinc}^2(fT).$$

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \overset{F}{\longleftrightarrow} AT\,\mathrm{sinc}(fT)$$

- **Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier**

- Θεώρημα Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε το

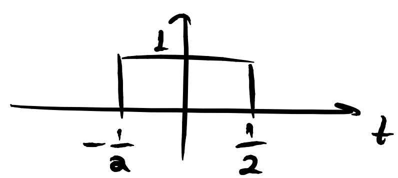
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}\right)^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)df$$

$$X(f) = \mathrm{sinc}(f)$$

Parseval: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\,dt$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dt = t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$



$$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**
- Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το Μ.F. ενός απλού ημιτόνου $\cos(2\pi f_0 t)$
- Θα είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 t)\, e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= \frac{1}{2}\ \mathrm{F}\{\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\} + \frac{1}{2}\ \mathrm{F}\{\mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}\}$$

- Τα παραπάνω ολοκληρώματα δεν υπολογίζονται
- Όμως ξέρουμε ότι $e^{\pm j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f \mp f_0)$ $\longleftarrow$ προηγ. διάλεξη!
- Οπότε

$$X(f) = \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, και αφού μπορούμε να περιγράψουμε κάθε περιοδικό σήμα ως μια Σειρά Fourier, θα έχουμε

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \longleftrightarrow X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \delta(f - f_0)$$

- Όμως πάλι χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το X_k για να εφαρμόσουμε τα παραπάνω
  - Κάτι που είναι «επίπονο»... ☺

- Μπορούμε άραγε να βρούμε τους συντελεστές Fourier πιο εύκολα?
  - Μέσω του Μετασχ. Fourier μιας περιόδου του σήματος ίσως?

- Πράγματι, αυτό ισχύει!

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Μπορούμε να δείξουμε ότι οι συντελεστές Fourier μπορούν να προκύψουν από το Μετασχ. Fourier από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

δηλ. αρκεί να δειγματοληπτήσουμε το μετασχ. Fourier **μιας περιόδου του περιοδικού σήματος** ανά $\frac{k}{T_0}$ και ό,τι προκύψει να το πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{T_0}$!!!!

Σχέση Μετασχ. Fourier και Σειράς Fourier

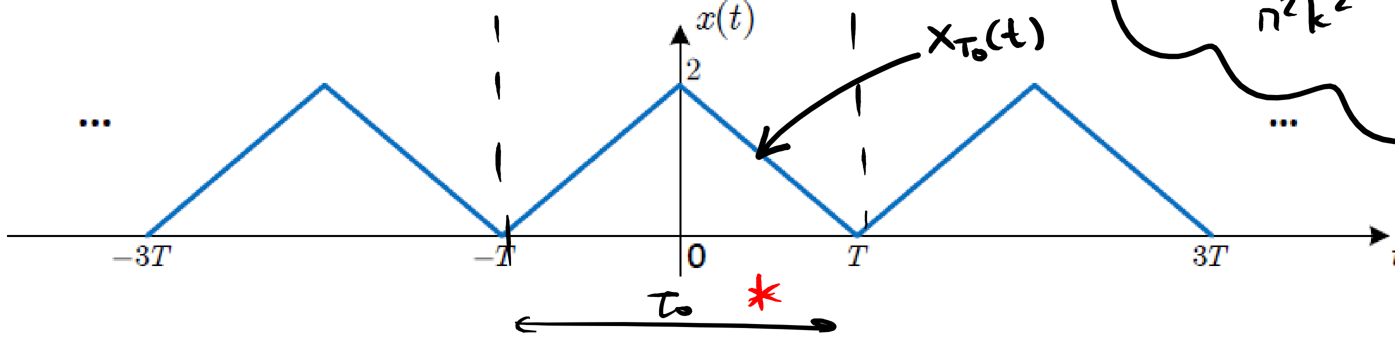
- Υπολογίζουμε τον Μετασχηματισμό Fourier σε *μια* περίοδο του σήματος $x_{T_0}(t)$ (σαν να ήταν - που είναι - σήμα ενέργειας)
- Δειγματοληπτούμε το αποτέλεσμα σε ακέραια πολλαπλάσια της βασικής (θεμελειώδους) συχνότητας: $f = kf_0$ όπου $f_0 = 1/T_0$. Αυτή η δειγματοληψία μας δίνει τους συντελεστές X_k του αναπτύγματος σε Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος.
- Υπολογίζουμε το $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0) = X(f)$: Μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος

- **Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα**

- Παράδειγμα:

○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του περιοδικού σήματος

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\frac{\pi k}{2}}\right)^2 = \frac{4\sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 k^2} = \frac{4}{\pi^2 k^2}, \ k \text{ περιττό}$$



Είναι $x_{T_0}(t) = 2\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} X_{T_0}(f) = 2T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$

$f \leftarrow k/T_0 \ : \ X_{T_0}\left(\frac{k}{T_0}\right) = 2T\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{T_0}T\right)$

$$= \cancel{2}\frac{T_0}{\cancel{2}}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{2}\right)$$

$$= T_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$$

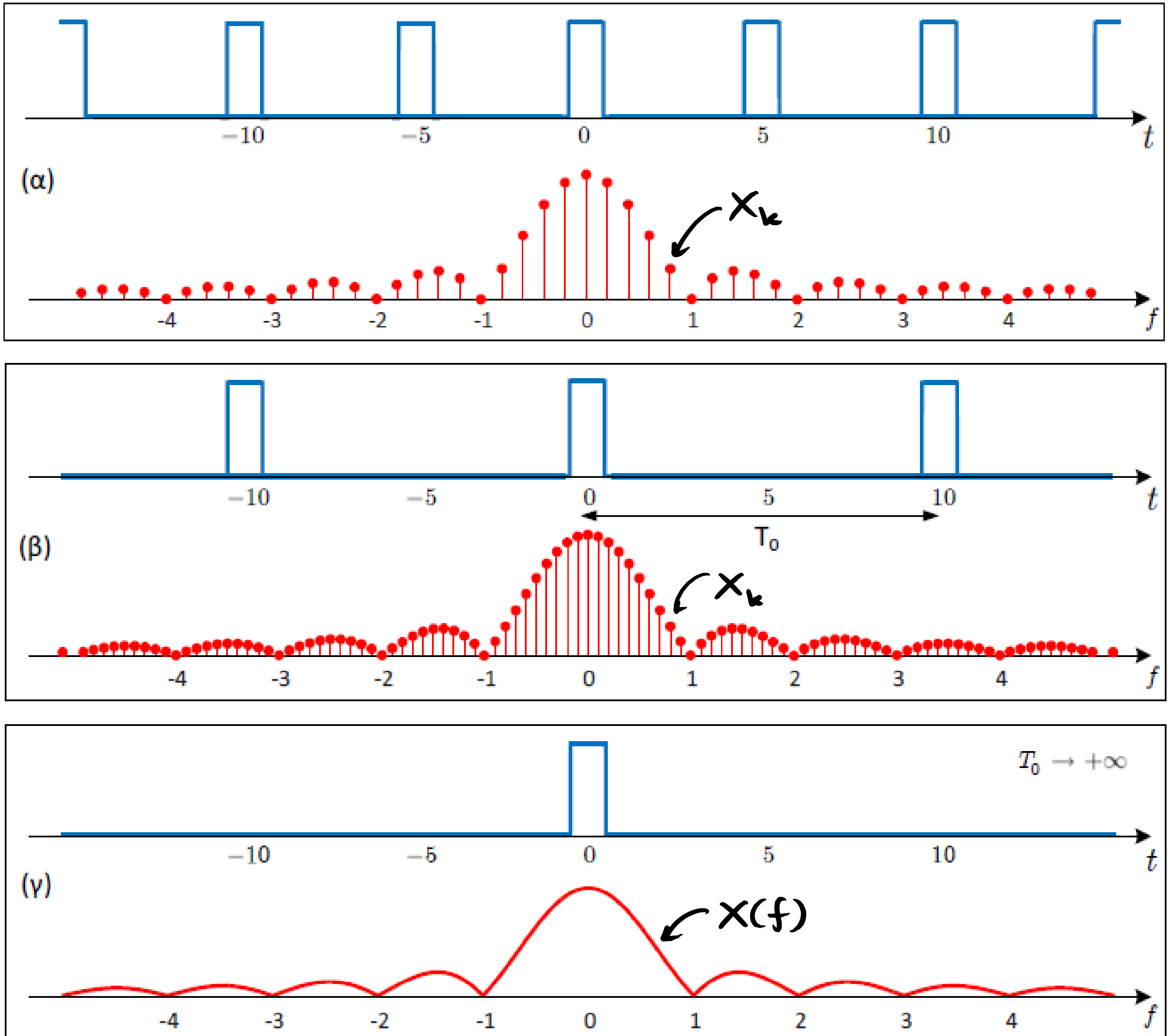
Άρα $X_k = \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)$

* $T_0 = 2T \Rightarrow$
$\Rightarrow T = \frac{T_0}{2}$

$X(f) =$
$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{2}\right)\delta(f - kf_0)$

Μετασχηματισμός Fourier και Περιοδικά Σήματα

Από συντελεστές X_k σε Μετασχ. Fourier



Από Μετασχ. Fourier σε συντελεστές X_k

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ