

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 11^Η

- Μετασχηματισμός Fourier
- Ιδιότητες



- Μετασχηματισμός Fourier (review)...

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{Μ.Φ.}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad \text{Αντίστρ. Μ.Φ.}$$

- Για $x(t) \in \mathbb{R}$:

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

Άρτιο πραγματικό μέρος
Περιττό φανταστικό μέρος

$$|X(f)| = |X(-f)|$$

$$\phi_x(f) = -\phi_x(-f)$$

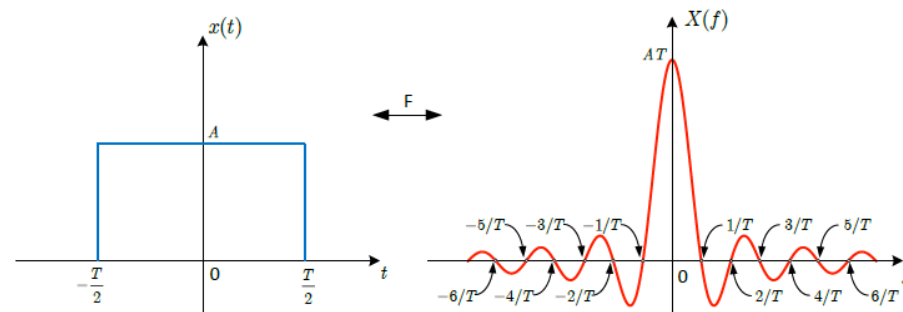
Άρτιο φάσμα πλάτους
Περιττό φάσμα φάσης

• Μετασχηματισμός Fourier (review)...

• Ζεύγη

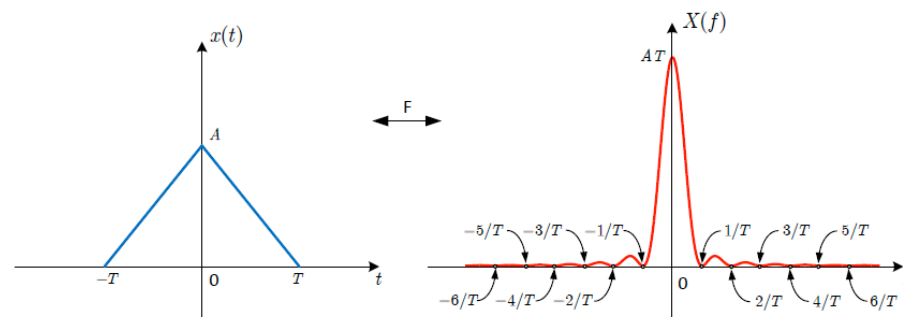
$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \text{sinc}(fT)$$

$\downarrow$
 $\in \mathbb{R}$



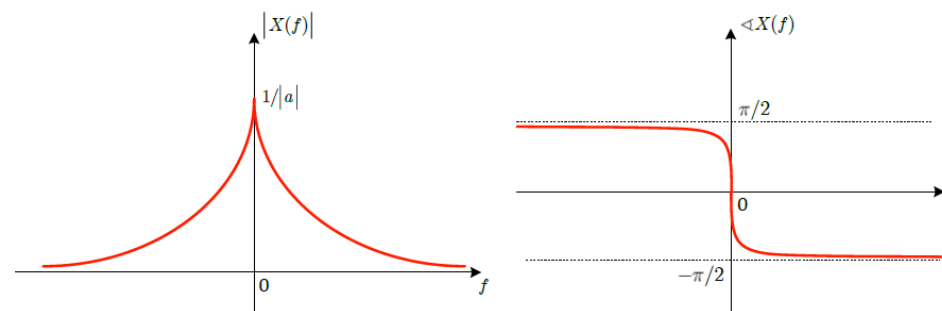
$$\text{Atri}\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow AT \text{sinc}^2(fT)$$

$\downarrow$
 $\in \mathbb{R}$



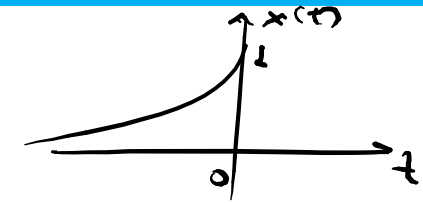
$$e^{-at}u(t), a > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}, a > 0$$

$\downarrow$
 $\in \mathbb{C}$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:



○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{at}u(-t)$, $a > 0$

$$\begin{aligned}
 X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at} u(-t) e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)t} dt \\
 &= \frac{1}{a-j2\pi f} e^{(a-j2\pi f)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j2\pi f} \left(1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(a-j2\pi f)t} \right) \\
 &= \frac{1}{a-j2\pi f} (1-0) = \frac{1}{a-j2\pi f}, \quad a > 0.
 \end{aligned}$$

$\downarrow$
 $e^{at} \cdot e^{-j2\pi ft}$

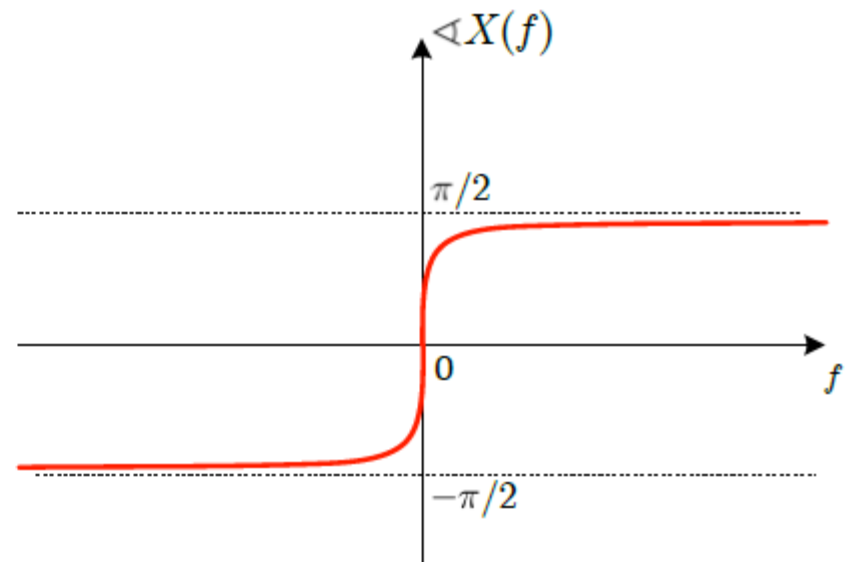
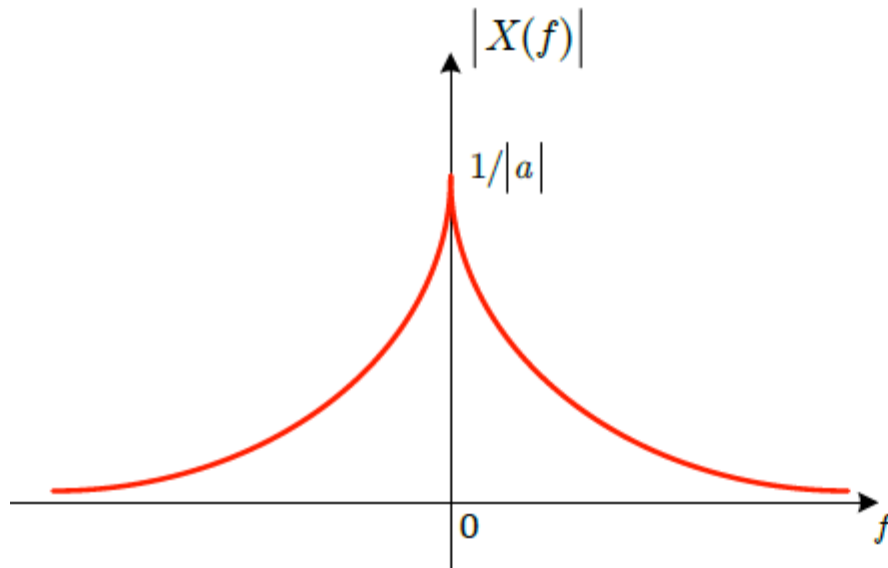
• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$\text{Μέτρο: } |X(f)| = \left| \frac{1}{a - j2\pi f} \right| = \frac{1}{|a - j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

$$\text{Φάση: } \phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{2\pi f}{a^2 + (2\pi f)^2}}{\frac{a}{a^2 + (2\pi f)^2}} \right) = \tan^{-1} \frac{2\pi f}{a}$$

Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού γίνονται παρακάτω:

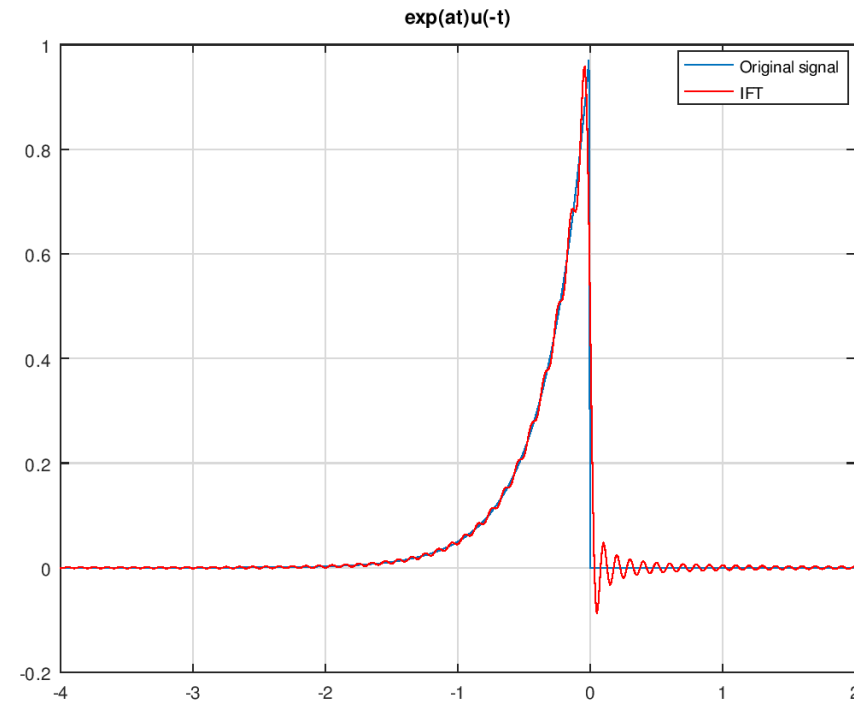


- Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```

1  % Σταθερά α
2  a = 3;
3  % Βήμα χρόνου
4  dt = 0.01;
5  % Άξονας χρόνου
6  t = -4:dt:2;
7  % Σήμα  $e^{(at)}u(-t)$ 
8  x = [exp(a*t(t<0)) 0 zeros(size(t(t>0)))];
9  % Βήμα στη συχνότητα
10 df = 0.01;
11 % Άξονας συχνότητας
12 f = -10:df:10;
13 % Μετασχ. Fourier όπως τον βρήκαμε στο χαρτί
14 X = 1./(a - j*2*pi*f);
15 % Σήμα στο χρόνο μέσω αντιστρ. Μετ. Fourier
16 x_est = zeros(size(t));
17 % Αντίστροφος μετ. Fourier
18 for i=1:length(f)
19     x_est = x_est + X(i) * exp(j*2*pi*f(i)*t);
20 end
21 x_est = df*x_est;
22 % Οπτικοποίηση
23 figure;
24 plot(t, x); title('exp(at)u(-t)'); xlabel('Time (s)');
25 hold on; plot(t, x_est, 'r'); legend('Original signal', 'IFT');

```



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t)$

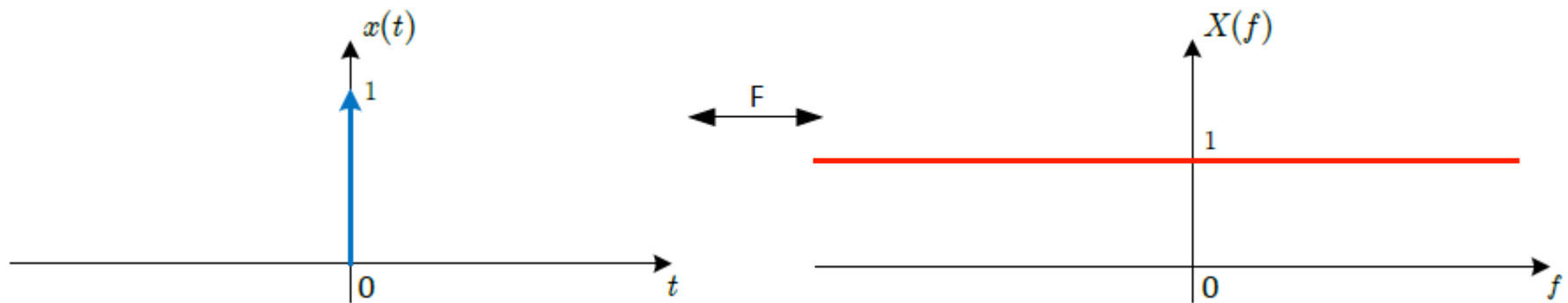
$$\text{Είναι } X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{\varphi(t)} dt = \underbrace{e^{-j2\pi ft}}_{\varphi(t)} \Big|_{t=0}$$

ιδιότητα $\delta(t)$

$$= 1, \quad \forall f.$$

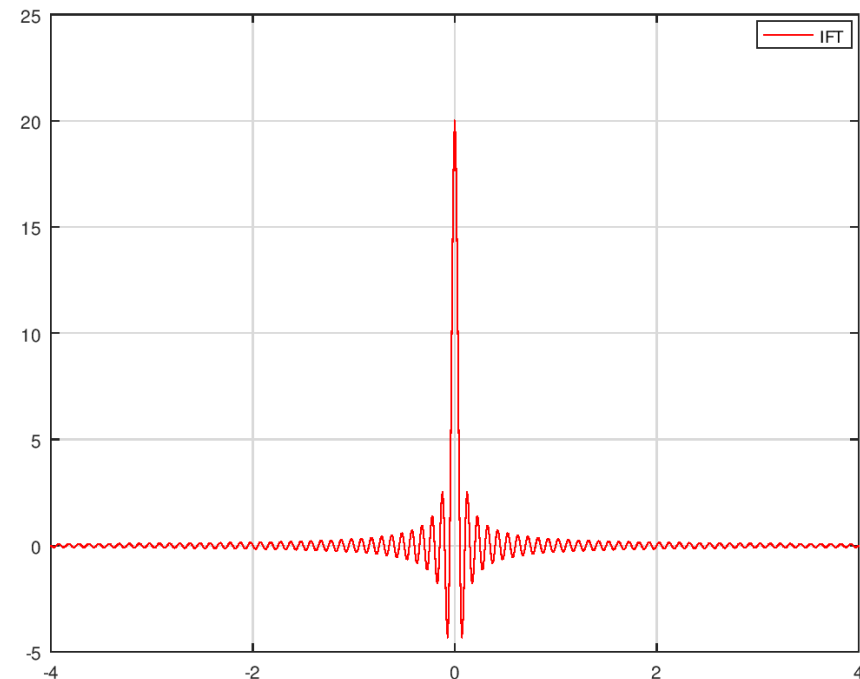
$$\text{Αρα } \delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

$$\text{Αρα } |X(f)| = 1, \quad \forall f \quad \text{και} \quad \varphi_x(f) = 0 \quad \forall f.$$



- Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```
1 % Βήμα χρόνου
2 dt = 0.01;
3 % Αξονας χρόνου
4 t = -4:dt:4;
5 % Βήμα στη συχνότητα
6 df = 0.01;
7 % Αξονας συχνότητας
8 f = -10:df:10;
9 % Μετασχ. Fourier όπως τον βρήκαμε στο χαρτί
10 X = ones(size(f));
11 % Σήμα στο χρόνο μέσω αντιστρ. Μετ. Fourier
12 x_est = zeros(size(t));
13 % Αντίστροφος μετ. Fourier
14 for i=1:length(f)
15     x_est = x_est + X(i) * exp(j*2*pi*f(i)*t);
16 end
17 x_est = df*x_est;
18 % Οπτικοποίηση
19 figure; plot(t, x_est, 'r'); legend('IFT');
```



Μετασχηματισμός Fourier

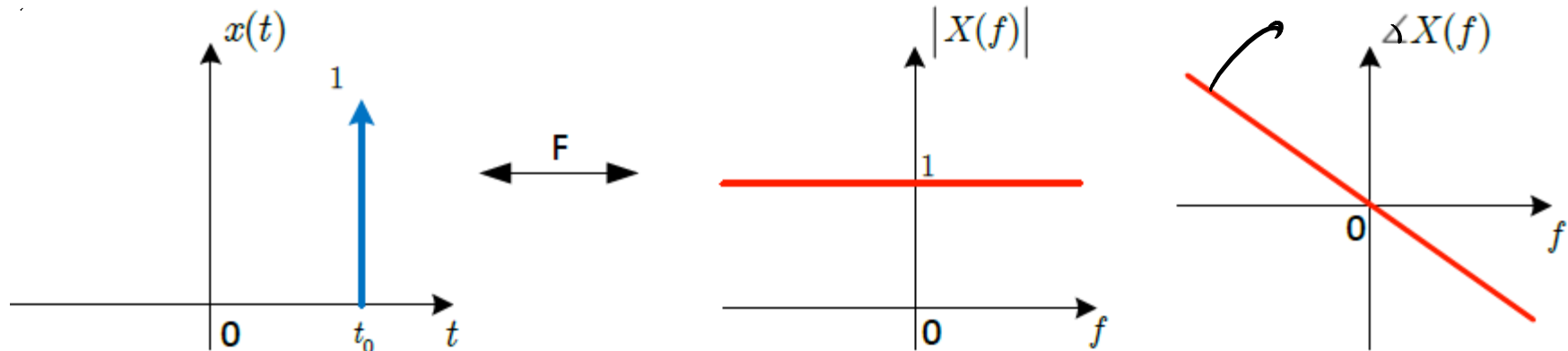
Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = \delta(t - t_0)$ ↙ ιδιότητα

$$\begin{aligned} \text{Είναι } X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=t_0} = e^{-j2\pi ft_0} = 1 \cdot e^{-j2\pi ft_0} \end{aligned}$$

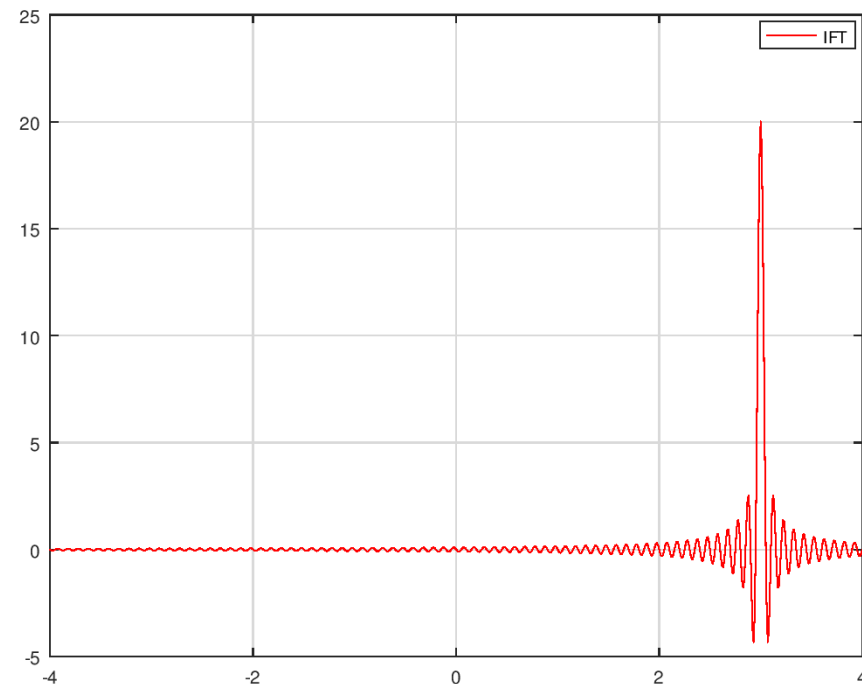
$$|X(f)| = |e^{-j2\pi ft_0}| = 1, \quad \varphi_x(f) = -2\pi ft_0$$

$$\lambda \rho \alpha \quad \delta(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi ft_0}$$



- Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```
1 % Βήμα χρόνου
2 dt = 0.01;
3 % Μετατόπιση
4 t0 = 3;
5 % Αξονας χρόνου
6 t = -4:dt:4;
7 % Βήμα στη συχνότητα
8 df = 0.01;
9 % Αξονας συχνότητας
10 f = -10:df:10;
11 % Μετασχ. Fourier όπως τον βρήκαμε στο χαρτί
12 X = exp(-j*2*pi*f*t0);
13 % Σήμα στο χρόνο μέσω αντιστρ. Μετ. Fourier
14 x_est = zeros(size(t));
15 % Αντίστροφος μετ. Fourier
16 for i=1:length(f)
17     x_est = x_est + X(i) * exp(j*2*pi*f(i)*t);
18 end
19 x_est = df*x_est;
20 % Οπτικοποίηση
21 figure; plot(t, x_est, 'r'); legend('IFT');
```



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος $X(f) = \delta(f)$, καθώς και του σήματος $X(f) = \delta(f - f_0)$

$$\begin{aligned} \text{• Είνα } x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi ft} \Big|_{f=0} \\ &= 1 \quad \text{• Άρα } x(t) = 1 \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{• Είνα } x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \Big|_{f=f_0} = e^{j2\pi f_0 t} \\ \text{• Άρα } x(t) &= e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{F} X(f) = \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας Ιδιοτήτων Μετασχηματισμού Fourier		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
	$x(t)$	$X(f)$
	$y(t)$	$Y(f)$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX(f) + BY(f)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi f_0 t} x(t)$	$X(f - f_0)$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	$X(-f)$
Στάθμιση	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Διαικότητα	$X(t)$	$x(-f)$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Παραγωγή στη συχνότητα	$tx(t)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{d}{df} X(f)$
Παραγωγή στο χρόνο	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
Ολοκλήρωση στο χρόνο	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2}\delta(f)$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X(f) = X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\} = \Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\} = -\Im\{X(-f)\}, \\ X(f) = X(-f) , \\ \phi_x(f) = -\phi_x(-f) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t)$, πραγματικό	$X(f) \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\}$, πραγματικό	$\Re\{X(f)\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\}$, πραγματικό	$j\Im\{X(f)\}$
Θεώρημα του Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$

- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

- Γραμμικότητα

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{F} AX(f) + BY(f) = Z(f)$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ax(t) + By(t)) e^{-j2\pi ft} dt$$

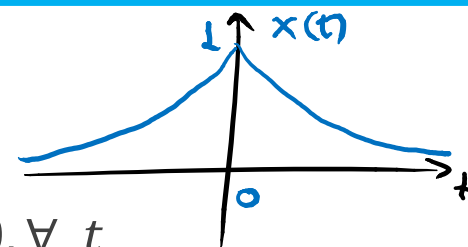
$$= A \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt}_{X(f)} + B \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt}_{Y(f)}$$

$$= AX(f) + BY(f) .$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0, \forall t$



$$\text{Είναι } X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j2\pi f t} dt \quad \rightarrow \quad = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases}$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi f t} dt}_{F\{e^{at}u(-t)\}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j2\pi f t} dt}_{F\{e^{-at}u(t)\}}$$

$$= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a+j2\pi f + a-j2\pi f}{(a-j2\pi f)(a+j2\pi f)}$$

$$= \frac{2a}{(a-j2\pi f)(a+j2\pi f)} = \frac{2a}{|a+j2\pi f|^2} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \quad \begin{matrix} \nearrow \in \mathbb{R} \\ \searrow > 0 \forall f \end{matrix}$$

$$|z|^2 = |z|^2$$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

• Χρονική μετατόπιση

$$y(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{F} X(f) e^{-j2\pi f t_0} = Y(f)$$

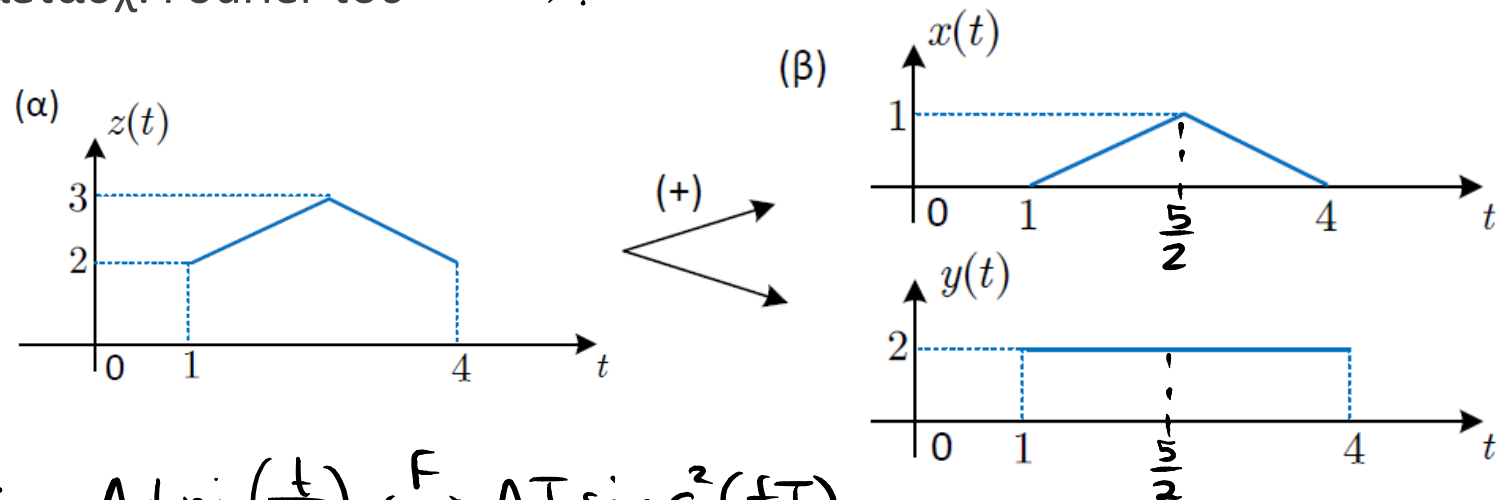
Είναι
$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-j2\pi f t} dt$$

Θέτω $u = t - t_0 \Rightarrow du = dt$ και $u_1 = t - t_0 \Big|_{t=-\infty}$ και $u_2 = t - t_0 \Big|_{t=+\infty}$

οπότε

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+t_0)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f t_0} e^{-j2\pi f u} du \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du}_{X(f)} = X(f) e^{-j2\pi f t_0}. \end{aligned}$$

- Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier
- Βρείτε το μετασχ. Fourier του $z(t)$.



Ξέρουμε :

$$A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} AT \operatorname{sinc}^2(fT)$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} AT \operatorname{sinc}(fT)$$

Άρα $x(t) = 1 \cdot \operatorname{tri}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \xrightarrow{F} X(f) = \frac{3}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right) \cdot e^{-j2\pi f \frac{5}{2}}$

$y(t) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{5}{2}}{3}\right) \xrightarrow{F} Y(f) = 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sinc}(3f) e^{-j2\pi f \frac{5}{2}}$

Άρα $Z(f) = X(f) + Y(f) = \left(\frac{3}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{3}{2}f\right) + 6 \operatorname{sinc}(3f) \right) e^{-j5\pi f}$

• Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

• Μετατόπιση στη συχνότητα

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{F} X(f - f_0)$$

• Παράδειγμα:

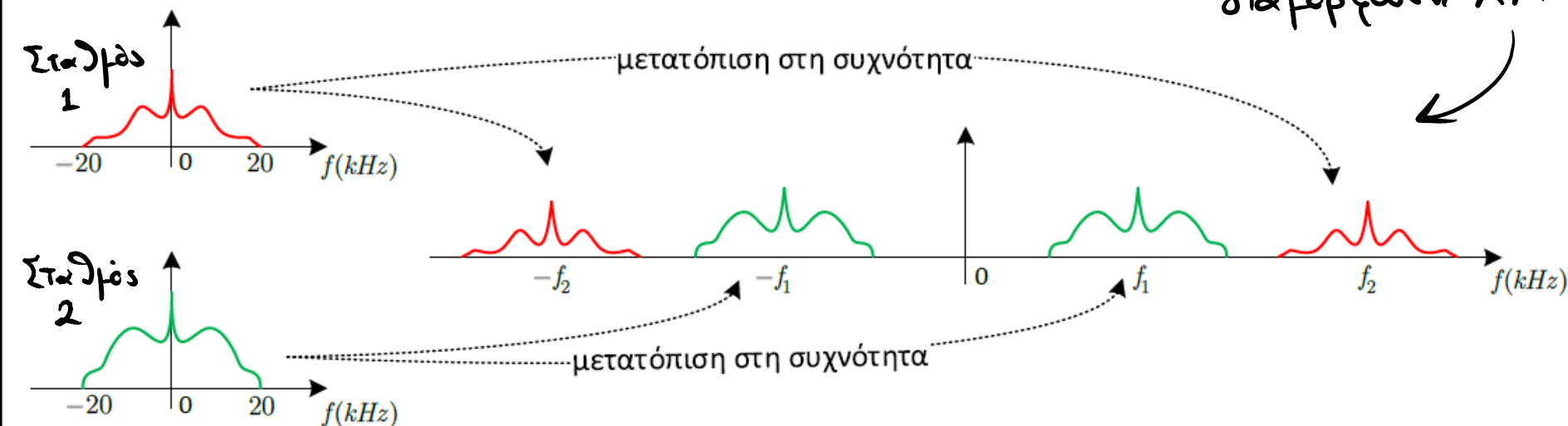
○ Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του σήματος $y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

$$\text{Είναι } y(t) = 2x(t)\cos(2\pi f_0 t) = 2x(t) \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f_0 t} \right)$$

$$= x(t)e^{j2\pi f_0 t} + x(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\text{Άρα } Y(f) = X(f - f_0) + X(f + f_0)$$

(ραδιοφωνία AM)
διαμόρφωση AM



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

