

HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 10^Η

- Μετασχηματισμός Fourier



- Από τις Σειρές Fourier προς το μετασχηματισμό Fourier...

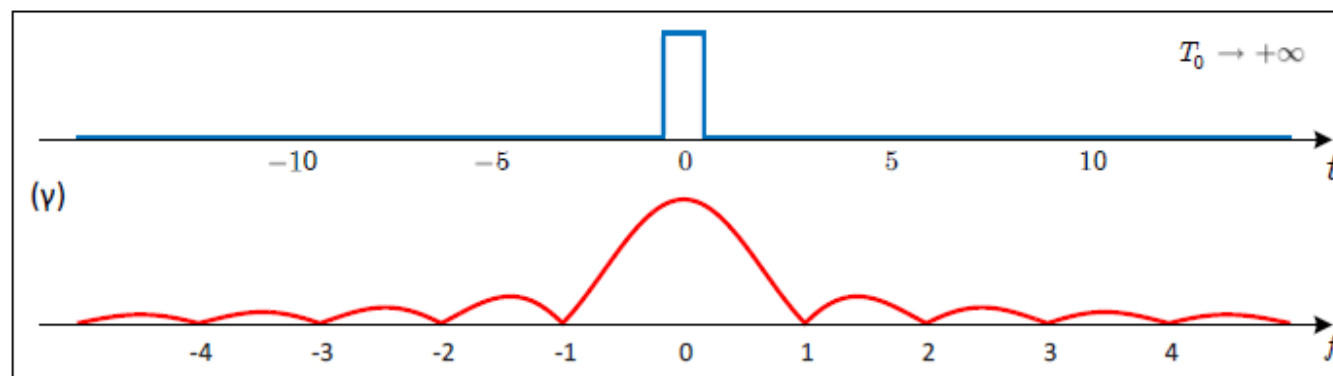
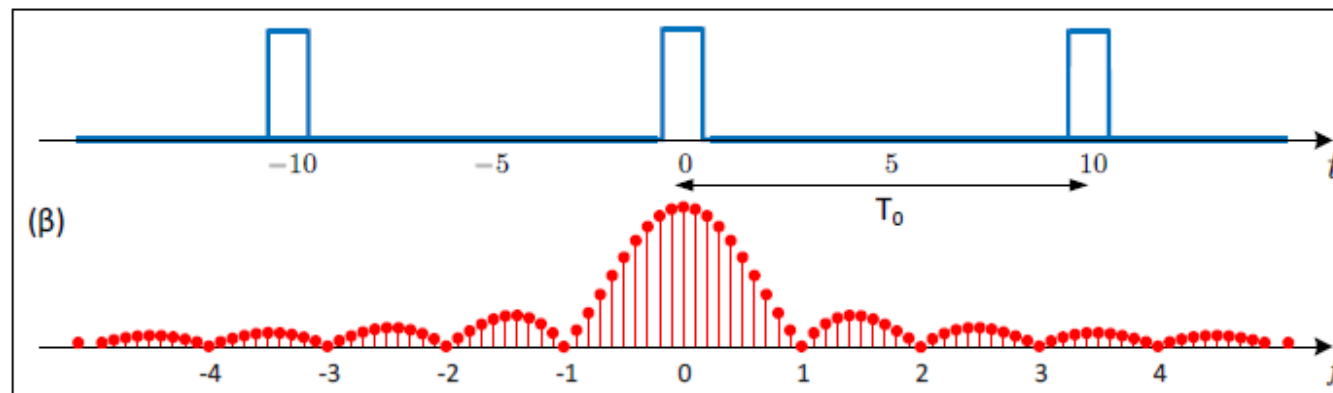
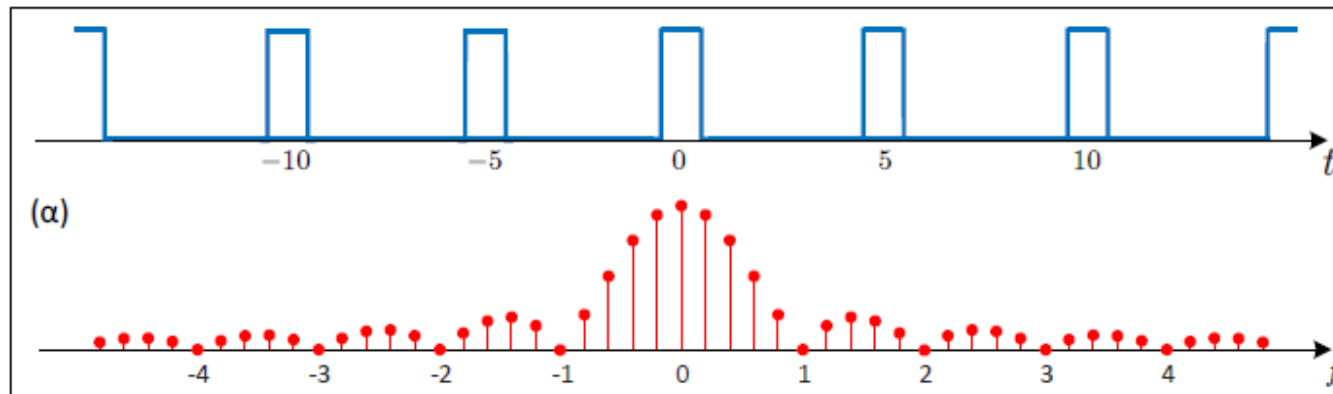
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \rightarrow +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

• Προς το μετασχ. Fourier...



• Προς το μετασχ. Fourier...

• Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

• Όταν $T_0 \rightarrow +\infty$, τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow df$ και $k f_0 \rightarrow f$

• Οπότε

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X_k \rightarrow X(f)} e^{j2\pi f t} df \end{aligned}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

ονομάζεται **Μετασχηματισμός Fourier** και συμβολίζεται με $X(f)$

- Ο όρος

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

ονομάζεται **αντίστροφος Μετασχ. Fourier** και προφανώς συμβολίζεται με $x(t)$

- Ο Μετασχ. Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση (εν γένει)
 - Έχει μέτρο και φάση
 - Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος

• Μετασχηματισμός Fourier

• Είναι

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \stackrel{\text{Euler}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

$$= \text{Re}\{X(f)\} + j\text{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

δηλ.

$$X_R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t) dt$$

$$X_I(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) dt$$

• Μπορούμε να δείξουμε ότι για **πραγματικά** σήματα ισχύει

$$X_R(f) = X_R(-f)$$

$$X_I(f) = -X_I(-f)$$

Άρτιο πραγματικό μέρος

Περιττό φανταστικό μέρος

- **Μετασχηματισμός Fourier**

- Μέτρο:

$$|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)}$$

- Φάση:

$$\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

οπότε και ο μετασχηματισμός εκφράζεται ως

$$X(f) = |X(f)|e^{j\phi_x(f)}$$

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι για **πραγματικά** σήματα ισχύει

$$|X(f)| = |X(-f)|$$

$$\phi_x(f) = -\phi_x(-f)$$

Άρτιο φάσμα πλάτους

Περιττό φάσμα φάσης

- Η συνάρτηση φάσης $\phi_x(f)$ πολλές φορές συμβολίζεται και με $\angle X(f)$ ή $\angle X(f)$

• Μετασχηματισμός Fourier – Ύπαρξη

• Αρκεί

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

• Το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

- Πρέπει να έχει πεπερασμένους πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα
- Πρέπει να έχει πεπερασμένους πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα

• Δεν είναι αναγκαία συνθήκη

• Επίσης αν

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

τότε το σήμα έχει μετασχ. Fourier

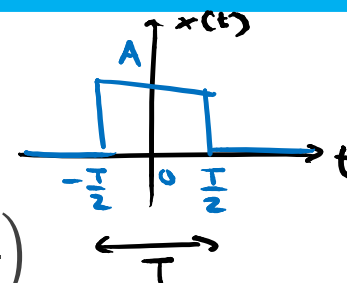
- Άρα ένα σήμα ενέργειας έχει πάντα μετασχ. Fourier

• Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετασχ. Fourier

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του γνωστού σήματος $x(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$



Είναι
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} \left(e^{-j\cancel{2\pi f} \frac{T}{2}} - e^{+j\cancel{2\pi f} \frac{T}{2}} \right)$$

$$= \frac{A}{j2\pi f} \left(e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right) = \frac{A}{\pi f} \sin(\pi f T)$$

$$= A \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \stackrel{*}{=} AT \text{sinc}(fT)$$

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \text{sinc}(x)$$

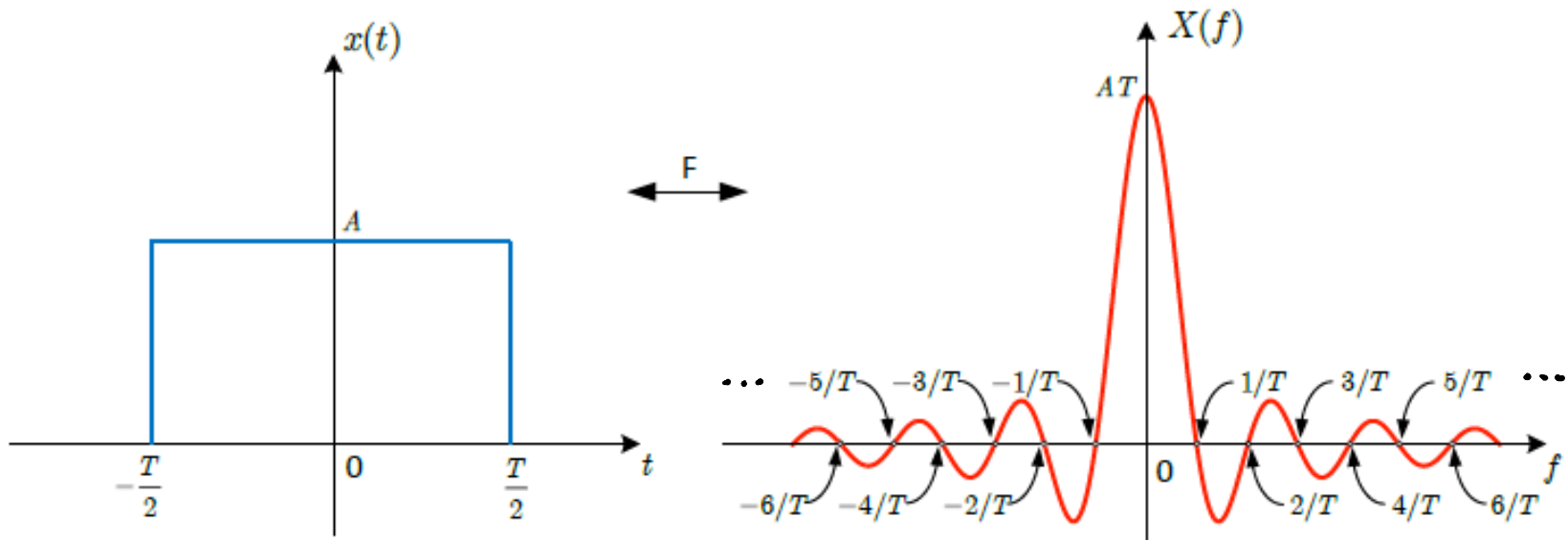
$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Λρα
$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} AT \operatorname{sinc}(fT) \in \mathbb{R}$$

Έχει μόνο πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος είναι μηδέν!

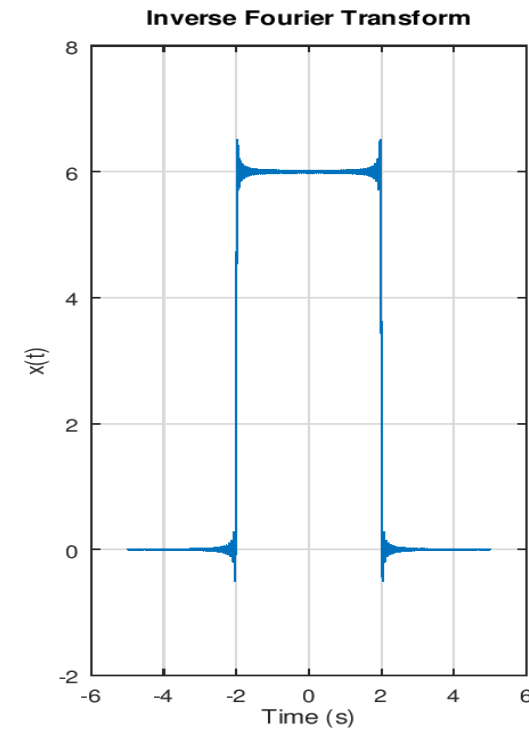
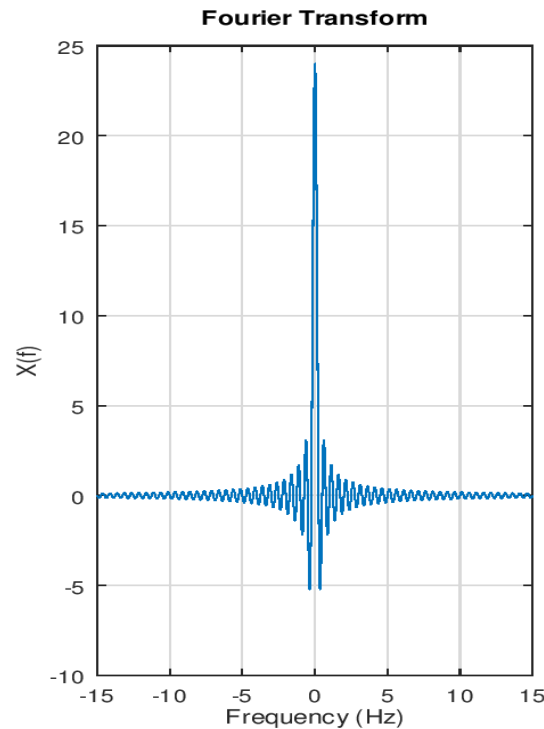


- Μετασχηματισμός Fourier
- Παράδειγμα – Κώδικας Octave

```

1  % Πλάτος παλμού
2  A = 6;
3  % Διάρκεια παλμού (-2 ως 2)
4  T = 4;
5  % Βήμα στο χρόνο
6  dt = 0.01;
7  % Άξονας του χρόνου
8  t = -5:dt:5;
9  % Βήμα στη συχνότητα
10 df = 0.01;
11 % Άξονας συχνοτήτων (από -15 ως 15 Hz)
12 f = -15:df:15;
13 % Μετασχηματισμός Fourier
14 X = A*T*sinc(f*T);
15 % Αρχικοποίηση
16 x = zeros(size(t));
17 % Βρόχος επανάληψης
18 for i = 1:length(f)
19     % Αντίστροφος μετασχ. Fourier
20     x = x + X(i) .* exp(j*2*pi*f(i)*t);
21 end
22 % Κλιμάκωση (για λόγους που θα δείτε στη σειρά ασκήσεων :) )
23 x = df*x;
24
25 % Γράφημα
26 subplot(121);
27 plot(f, X);
28 xlabel('Frequency (Hz)');
29 ylabel('X(f)');
30 title('Fourier Transform');
31 subplot(122);
32 plot(t, x);
33 xlabel('Time (s)');
34 ylabel('x(t)');
35 title('Inverse Fourier Transform');

```



- Μετασχηματισμός Fourier

- Παράδειγμα:

Ποδική μορφή:

μέτρο : $|X(f)| = |AT \operatorname{sinc}(fT)| = AT |\operatorname{sinc}(fT)|$

φάση : $\varphi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_2(f)}{X_1(f)}$ ~~X~~

Από μιγαδικούς αριθμούς:

$$0 < 2 = 2e^{j\underline{0}}, \quad \varphi_x = \underline{0}$$

$$0 > -2 = 2e^{\underline{jn}}, \quad \varphi_x = \underline{\pm n}$$

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$\text{Για } X(f) > 0, \quad \varphi_x(f) = 0$$

$$\text{Για } X(f) < 0, \quad \text{έχουμε } \varphi_x(f) = \pm \pi$$

Επιλέγουμε θετικές φάσεις για θετικές τιμές του f

————— αρνητικές ————— " ————— αρνητικές τιμές του f

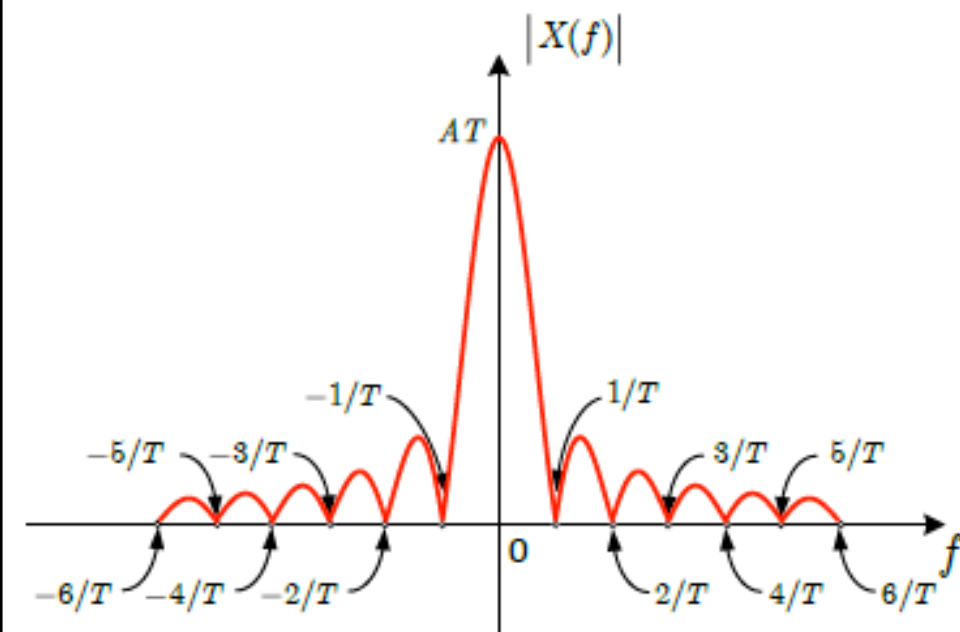
Άρα

$$\varphi_x(f) = \begin{cases} 0, & X(f) > 0 \\ \pi, & X(f) < 0, f > 0 \\ -\pi, & X(f) < 0, f < 0 \end{cases}$$

Για $X(f) = 0$
η φάση είναι
απροσδιόριστη

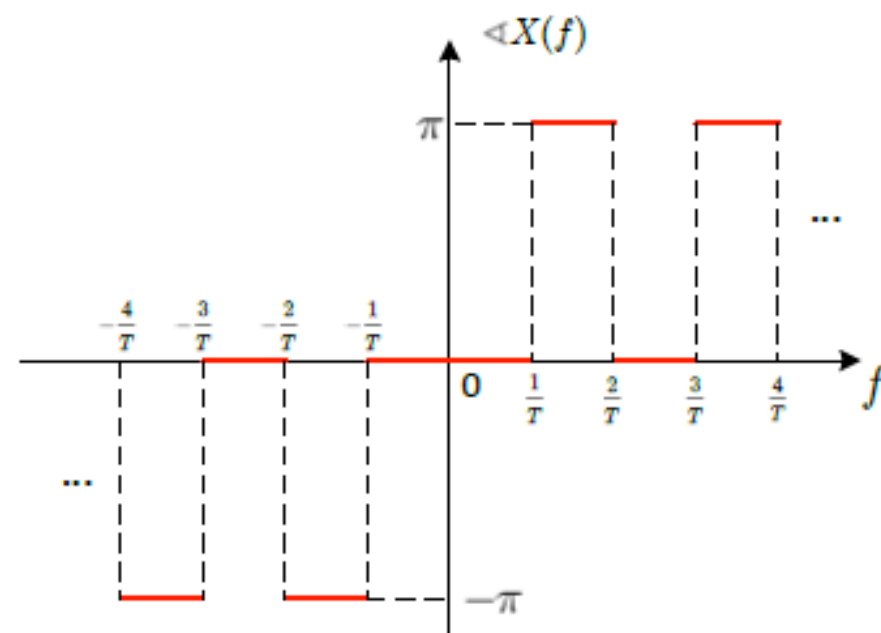
• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:



Φάσμα ηλίκτας

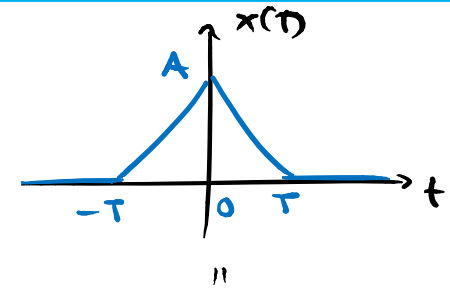
Άρτια συμμετρία
 αφού $x(t) \in \mathbb{R}$



Φάσμα φάσης

Περιττή συμμετρία
 αφού $x(t) \in \mathbb{R}$

- Παράδειγμα:



Εντα $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T}^T A \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) e^{-j2\pi ft} dt \quad \begin{cases} A \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), \\ 0 \end{cases}$

$= AT \text{sinc}^2(fT)$. (γιατί αν normalised περίοδο)

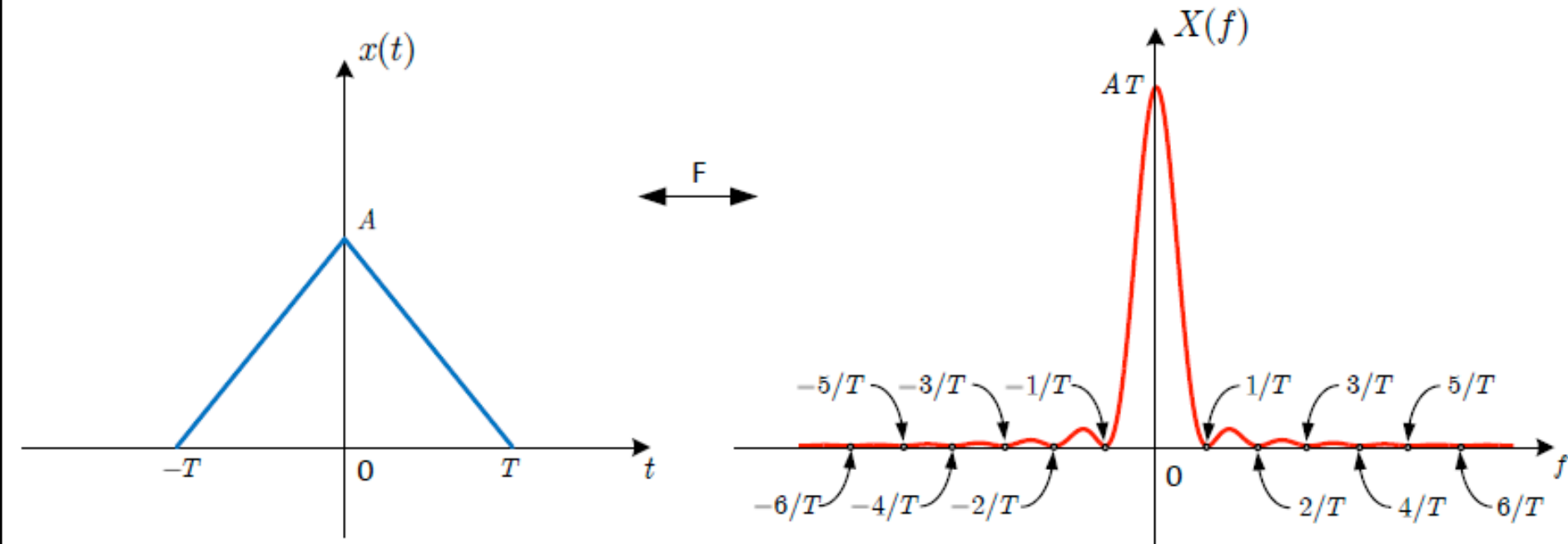
$$\Delta p \propto \Delta t \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{F} \Delta T \text{sinc}^2(fT)$$

Θα αποδείξουμε το Lemma αυτό αργότερα με χρήση ιδιοτήτων.

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Ξανά, αφού $X(f) \in \mathbb{R}$, ο Μ. Fourier έχει μόνο πραγματικό μέρος.

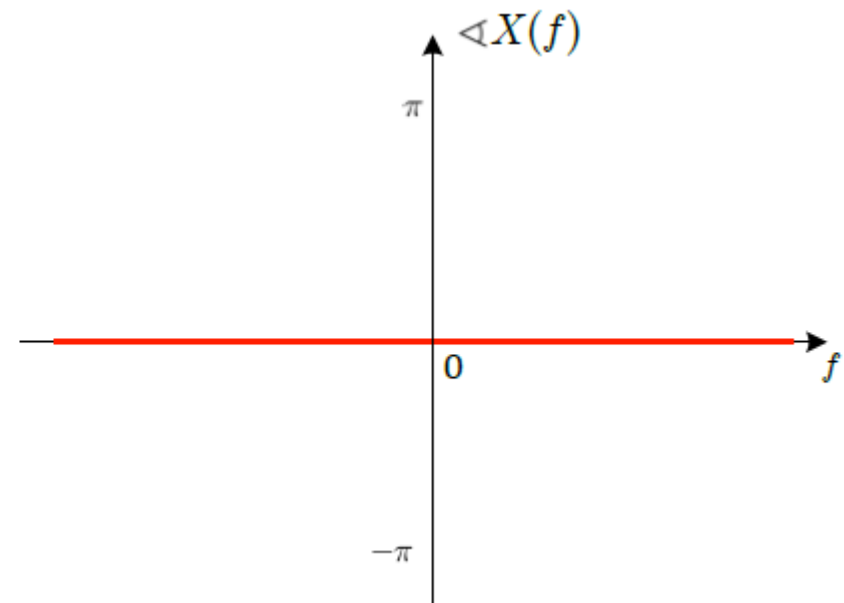
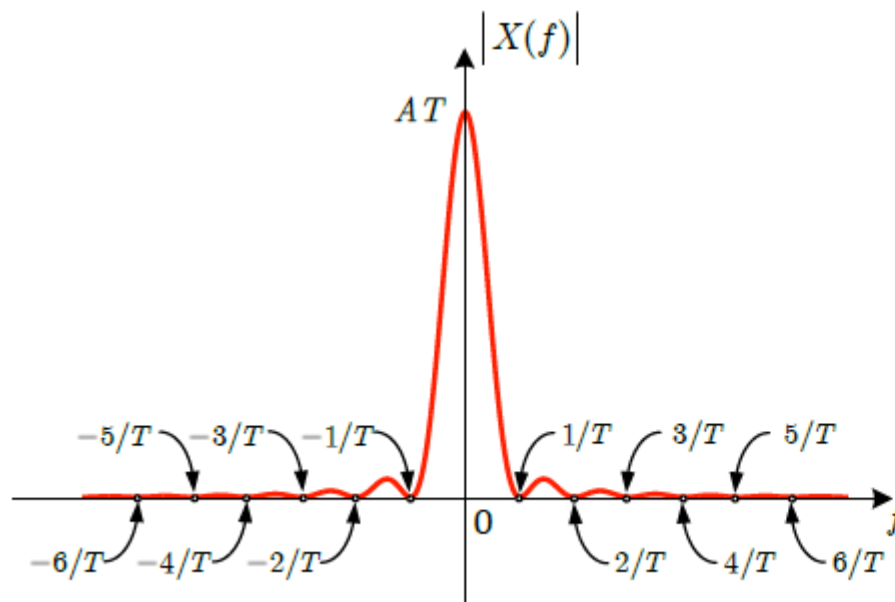


Παρατηρήστε ότι $X(f) > 0 \quad \forall f!$

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Αφ'α' $X(f) > 0 \quad \forall f$, τότε $|X(f)| = X(f)$ και $\phi_x(f) = 0$,
για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο παράδειγμα.



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

○ Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

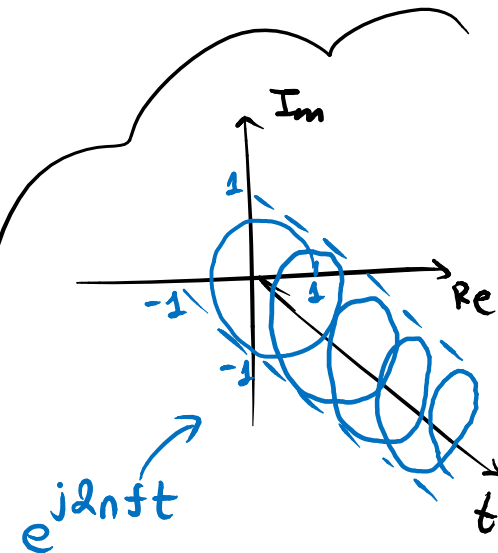
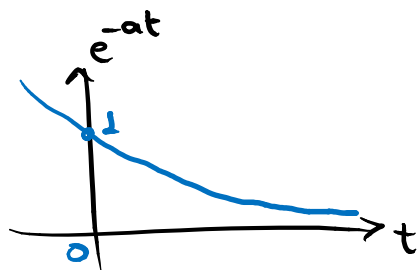
Είναι
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt$$

$$= \frac{1}{-(a+j2\pi f)} e^{-(a+j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{a+j2\pi f} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} - 1 \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi ft} = 0$$



• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

Άρα $X(f) = -\frac{1}{a+j2\pi f} (0-1) = \frac{1}{a+j2\pi f}$, $a > 0$.

Μέτρο: $|X(f)| = \frac{1}{|a+j2\pi f|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4\pi^2 f^2}}$

Φάση: $\phi_x(f) = \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)} = ?$

Είναι $X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{(a+j2\pi f)^*}{(a+j2\pi f)(a+j2\pi f)^*} = \frac{a-j2\pi f}{\underbrace{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)}_{|a+j2\pi f|^2}}$

$$= \frac{a-j2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{X_R(f)} + j \underbrace{\frac{-2\pi f}{a^2+4\pi^2 f^2}}_{X_I(f)}$$

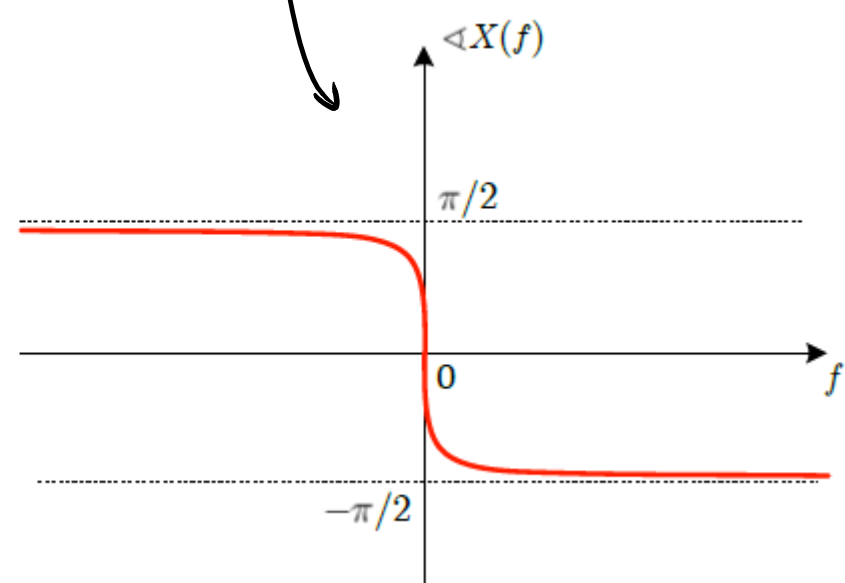
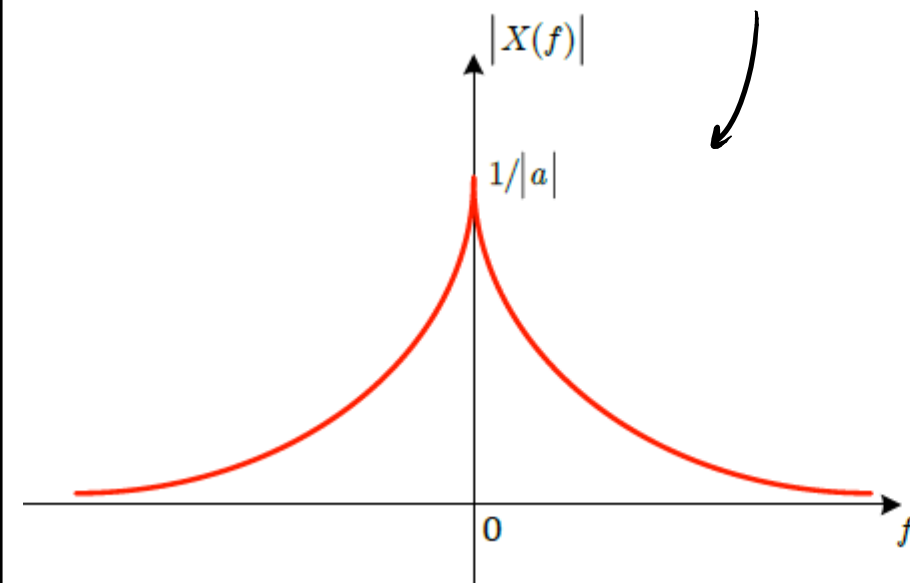
$$z z^* = |z|^2$$

• Μετασχηματισμός Fourier

• Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \varphi_x(f) &= \tan^{-1} \frac{X_I(f)}{X_R(f)} = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{-2nf}{a^2 + 4n^2 f^2}}{\frac{a}{a^2 + 4n^2 f^2}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{2nf}{a} \right) \\ &= -\tan^{-1} \left(\frac{2nf}{a} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } |X(f)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4n^2 f^2}}, \quad \varphi_x(f) = -\tan^{-1} \frac{2nf}{a}.$$



Συνεχίζεται... 😊

