ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 9^{Η}

- Σειρές Fourier – Ιδιότητες
- Εισαγωγή στο Μετασχ. Fourier

- **Σειρές Fourier – Review…**
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = |X_k|e^{j\phi_k}$$

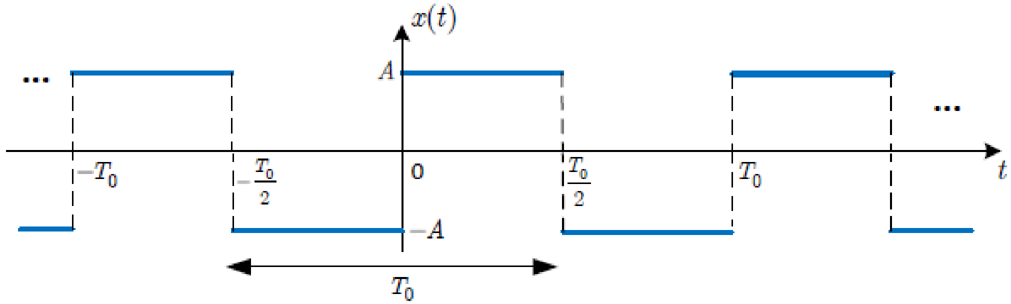
- Για **πραγματικά** σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

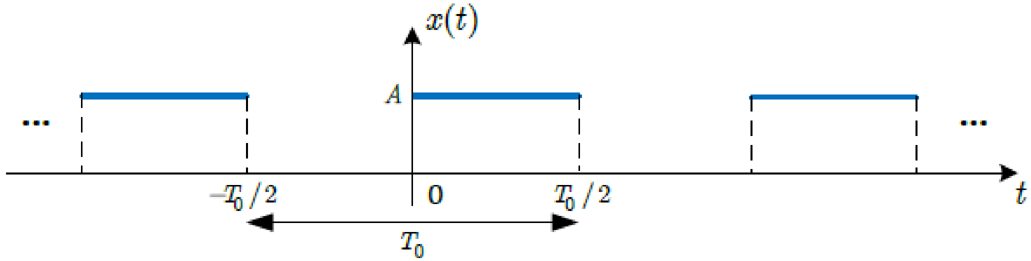
- **Τριγωνομετρική Σειρά Fourier** (μόνο για πραγματικά σήματα!)

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k|\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

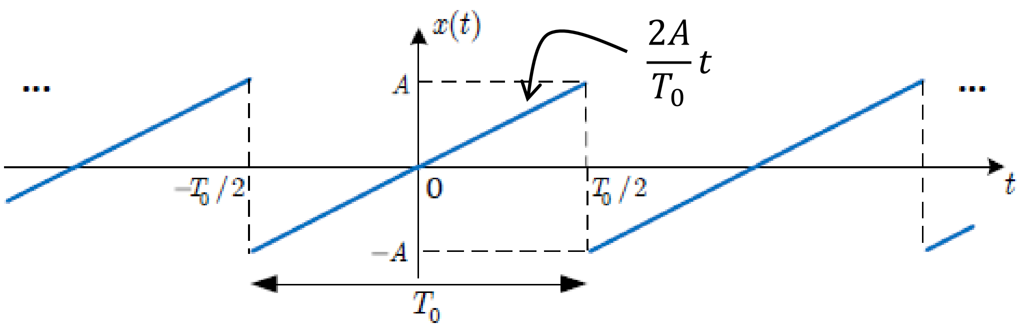
• Γνωστές Σειρές Fourier



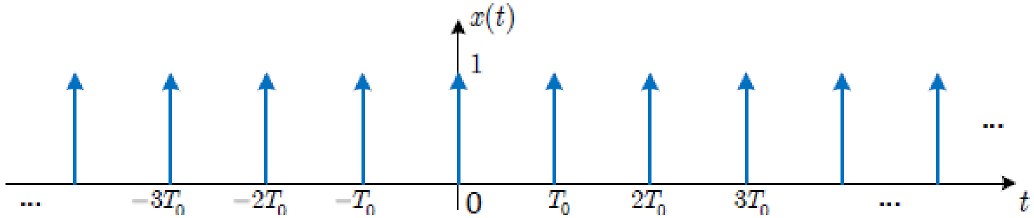
$$X_k = \begin{cases} \dfrac{2A}{jk\pi}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases}$$



$$X_k = \begin{cases} \dfrac{A}{j\pi k}, & k \text{ περιττά} \\ 0, & k \text{ άρτια} \end{cases}$$



$$X_k = \frac{A}{k\pi}(-1)^k e^{j\pi/2}$$



$$X_k = \frac{1}{T_0}$$

• Ιδιότητες

Πίνακας Ιδιοτήτων των σειρών Fourier

Ιδιότητα	Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
	x(t) περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$ **y(t) περιοδικό με περίοδο $\mathbf{T_0}$**	$\mathbf{X_k}$ $\mathbf{Y_k}$
Γραμμικότητα	$Ax(t) + By(t)$	$AX_k + BY_k$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j2\pi M f_0 t} x(t)$	X_{k-M}
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*(t)$	X^*_{-k}
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-t)$	X_{-k}
Στάθμιση στο χρόνο	$x(at),\ a > 0$	X_k, με περίοδο T_0/a
Περιοδική συνέλιξη	$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
Πολλαπλασιασμός	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
Παραγώγιση	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi k f_0 X_k$
Ολοκλήρωση	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{j2\pi k f_0}$
Συζυγής συμμετρία	$x(t)$ πραγματικό	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\} = \Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\} = -\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert = \lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k = -\angle X_{-k} \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x(t) = x(-t),\ x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Re$
Περιττό σήμα	$x(t) = -x(-t),\ x(t)$ πραγματικό	$X_k \in \Im$
Άρτιο μέρος	$x_e(t) = \text{Ev}\{x(t)\},\ x(t)$ πραγματικό	$\Re\{X_k\}$
Περιττό μέρος	$x_o(t) = \text{Od}\{x(t)\},\ x(t)$ πραγματικό	$j\Im\{X_k\}$
Θεώρημα του Parseval	$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lvert X_k\rvert^2$

- **Ιδιότητες**
- **Γραμμικότητα**

$$\underbrace{Ax(t) + By(t)}_{z(t)} \xleftrightarrow{FS} AX_k + BY_k = Z_k$$

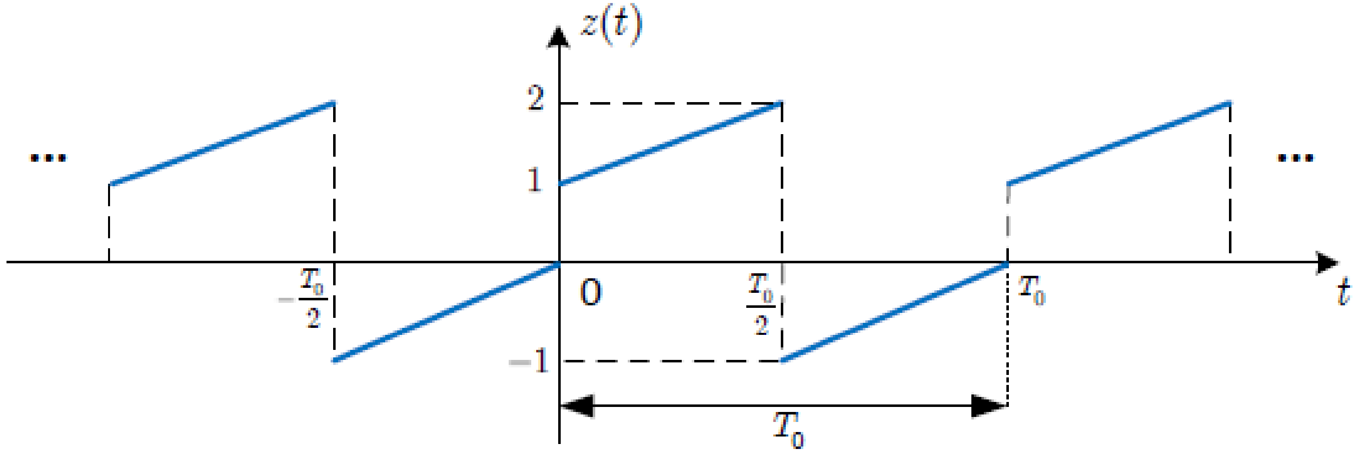
$$Z_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} z(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} \left(Ax(t) + By(t)\right) e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} Ax(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt + \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} By(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt$$

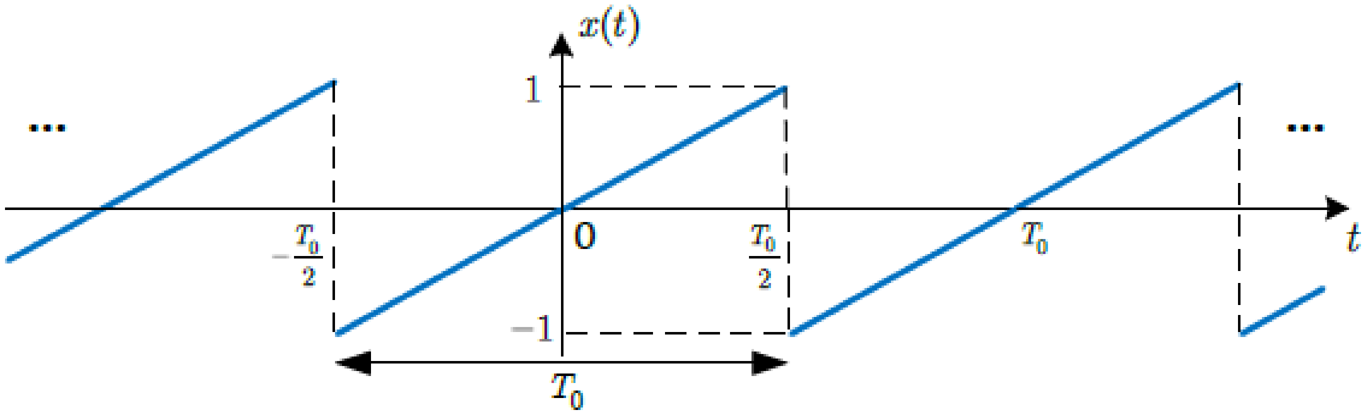
$$= A\left(\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right) + B\left(\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} y(t)\, e^{-j2\pi k f_0 t}\, dt\right)$$

$$= AX_k + BY_k$$

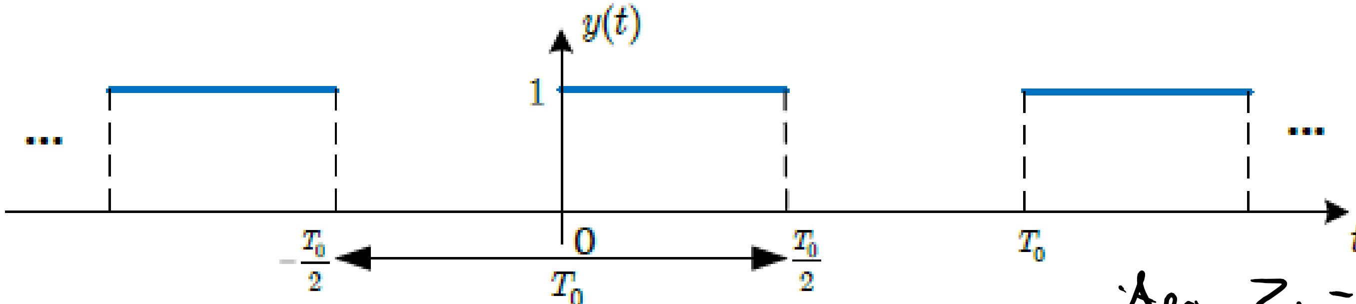
- **Ιδιότητες**



$Z_k = ?$



X_k γνωστά από διαφ. 3

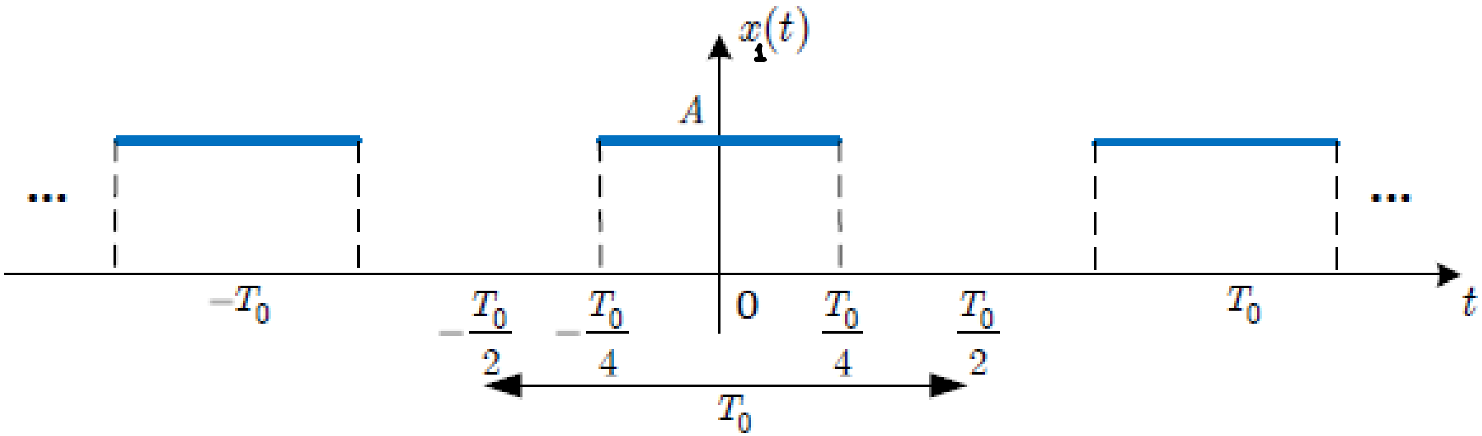


Y_k γνωστά από διαφ. 3

Άρα $Z_k = X_k + Y_k$!

- **Ιδιότητες**
- **Χρονική Μετατόπιση**

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{FS} X_k e^{-j2\pi k f_0 t_0}$$



Είναι το 2ο σήμα της διαφάνειας 3 μετατοπισμένο κατά $\frac{T_0}{4}$ αριστερά. Άρα

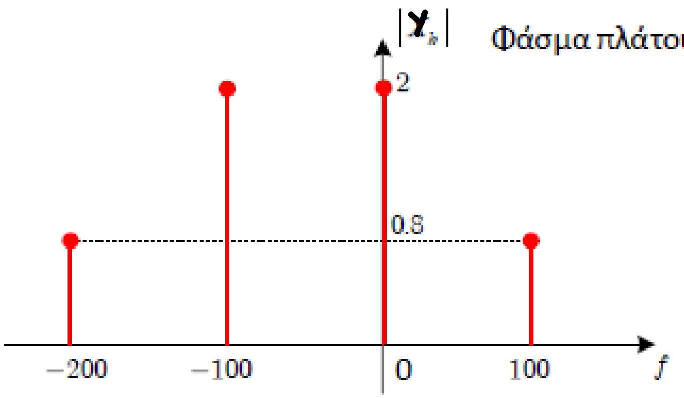
$$x_1(t) = x\left(t+\frac{T_0}{4}\right) \xleftrightarrow{FS} X_{1_k} = X_k e^{j2\pi k \overbrace{f_0 \frac{T_0}{4}}^{1}} = X_k e^{j\frac{\pi k}{2}}$$

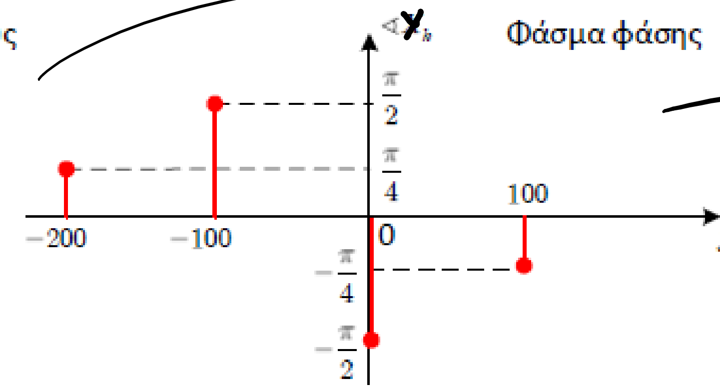
$$= \frac{A}{j\pi k} e^{j\frac{\pi k}{2}}, \ k \text{ περιττά.}$$

- **Ιδιότητες**

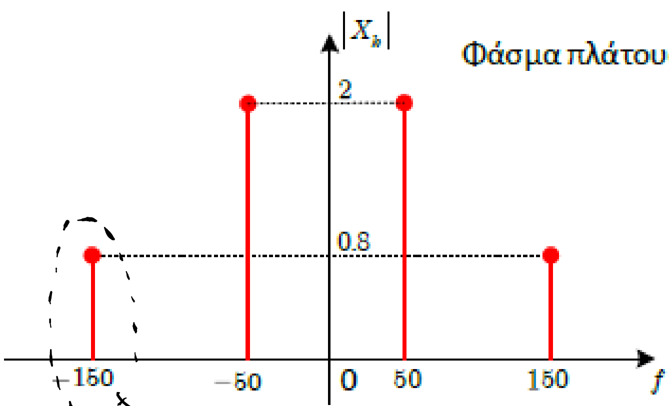
- **Μετατόπιση στη συχνότητα**

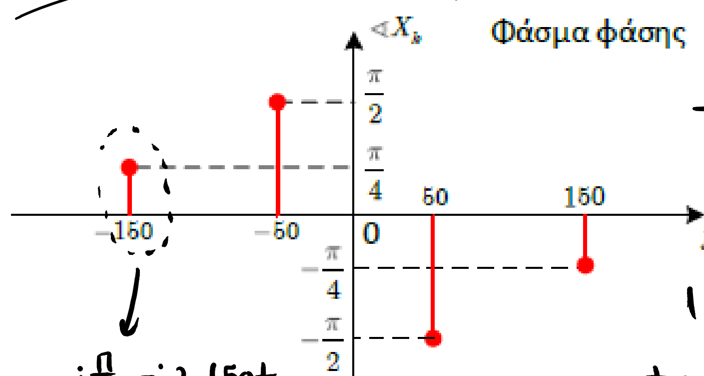
$$e^{j2\pi M f_0 t}\, x(t) \xleftrightarrow{FS} X_{k-M}$$





$$y(t) = x(t) \cdot e^{-j2\pi 50 t}$$





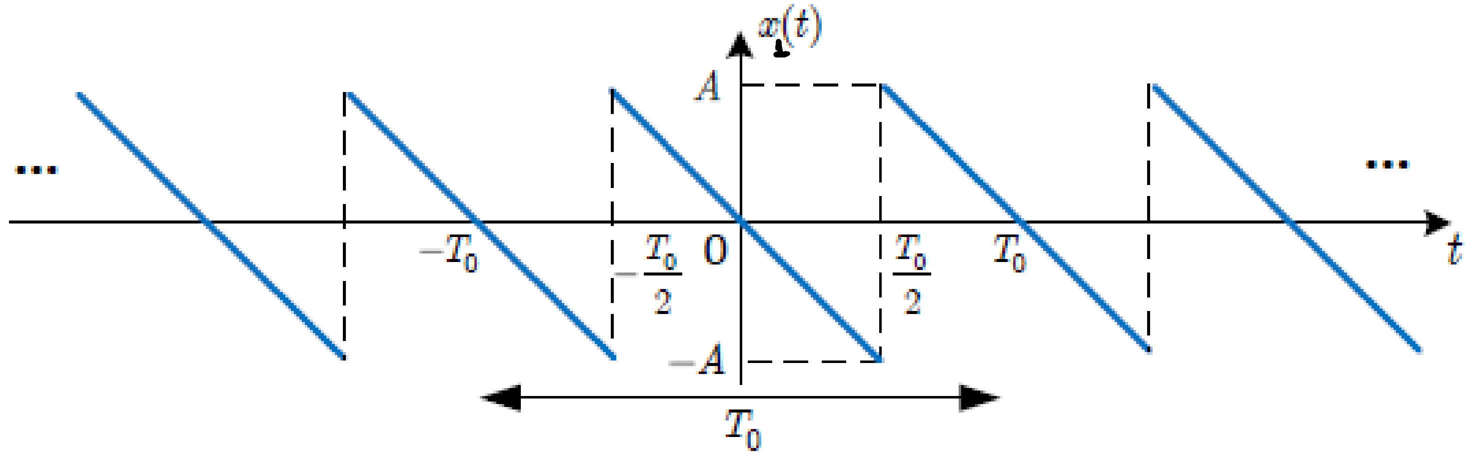
$$0.8\, e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\pi 150 t}$$

$$x(t) = 2 \cdot 0.8 \cos\left(2\pi 150 t - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot 2 \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$1.6 \cos\left(2\pi 150 t - \frac{\pi}{4}\right) + 4 \cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

- **Ιδιότητες**
- **Αντιστροφή στο χρόνο**

$$x(-t) \xleftrightarrow{FS} X_{-k}$$



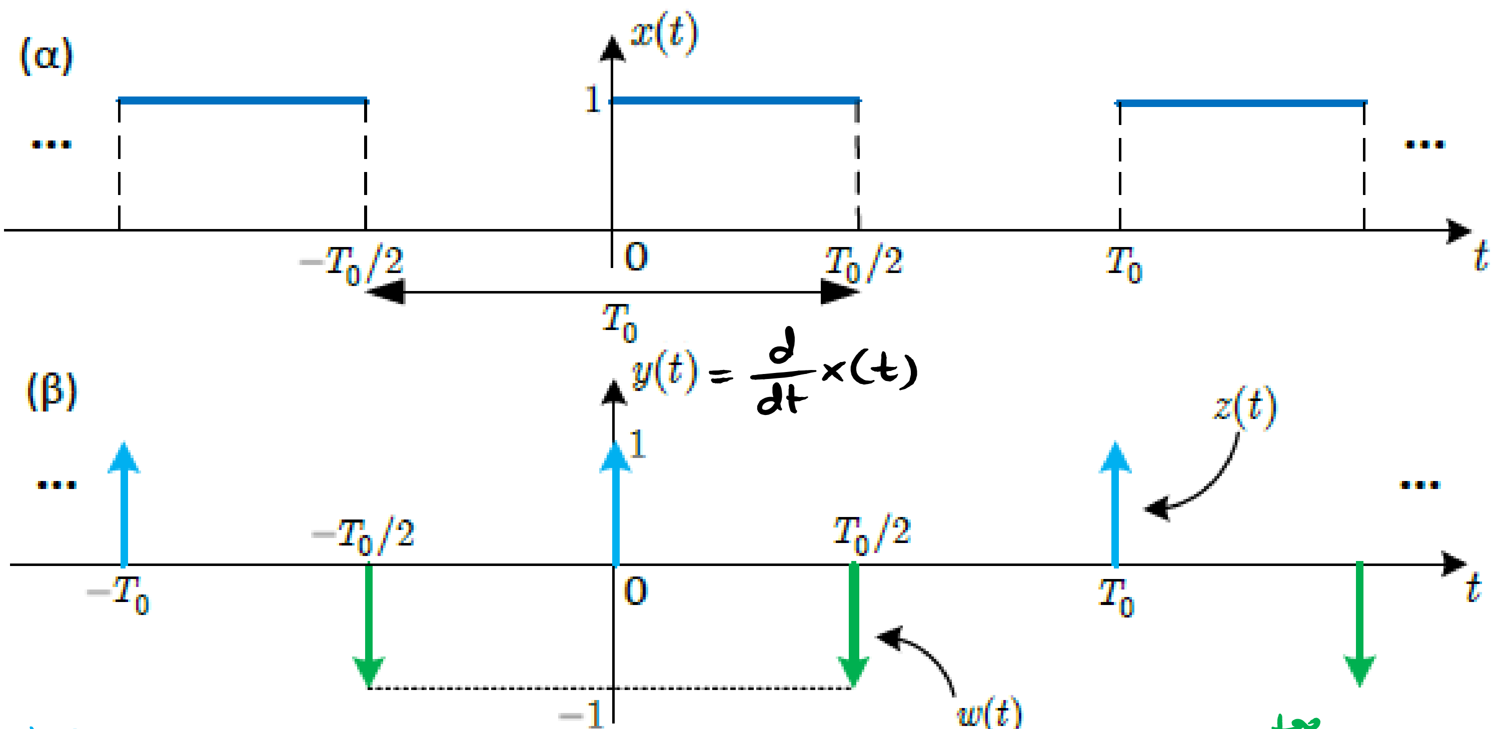
Είναι το 3ο σήμα της διαφάνειας 3, αντεστραμμένο χρονικά.

Άρα $x_1(t) = x(-t) \xleftrightarrow{FS} X_{1_k} = X_{-k} = \frac{A}{\pi(-k)}(-1)^{-k} e^{j\frac{\pi}{2}}$

$$= -\frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{-j\frac{\pi}{2}}, \ \forall\ k.$$

- **Ιδιότητες**
- **Παραγώγιση στο χρόνο**

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FS} j2\pi k f_0 X_k$$



$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \xleftrightarrow{FS} Z_k = \frac{1}{T_0} \quad (\delta\iota\alpha\varphi.\ 3)$$

$$w(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - kT_0 - \frac{T_0}{2}\right)$$

- **Ιδιότητες**

Από ιδιότητες χρονικής μετατόπισης, $W_k = -\frac{1}{T_0} e^{-j2\pi k \underbrace{f_0 \frac{T_0}{2}}_{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{T_0} e^{-j\pi k}$

$= -\frac{1}{T_0}(-1)^k = \frac{1}{T_0}(-1)^{k+1}, \ \forall k.$

Άρα $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FS} W_k + Z_k = \frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_0}(-1)^{k+1} = \frac{1}{T_0}\left(1 + (-1)^{k+1}\right).$

$= \frac{2}{T_0}$, για k περιττά! ①

Εναλλακτικά, από την ιδιότητα παραγώγισης,

$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{FS} j2\pi k f_0 X_k$

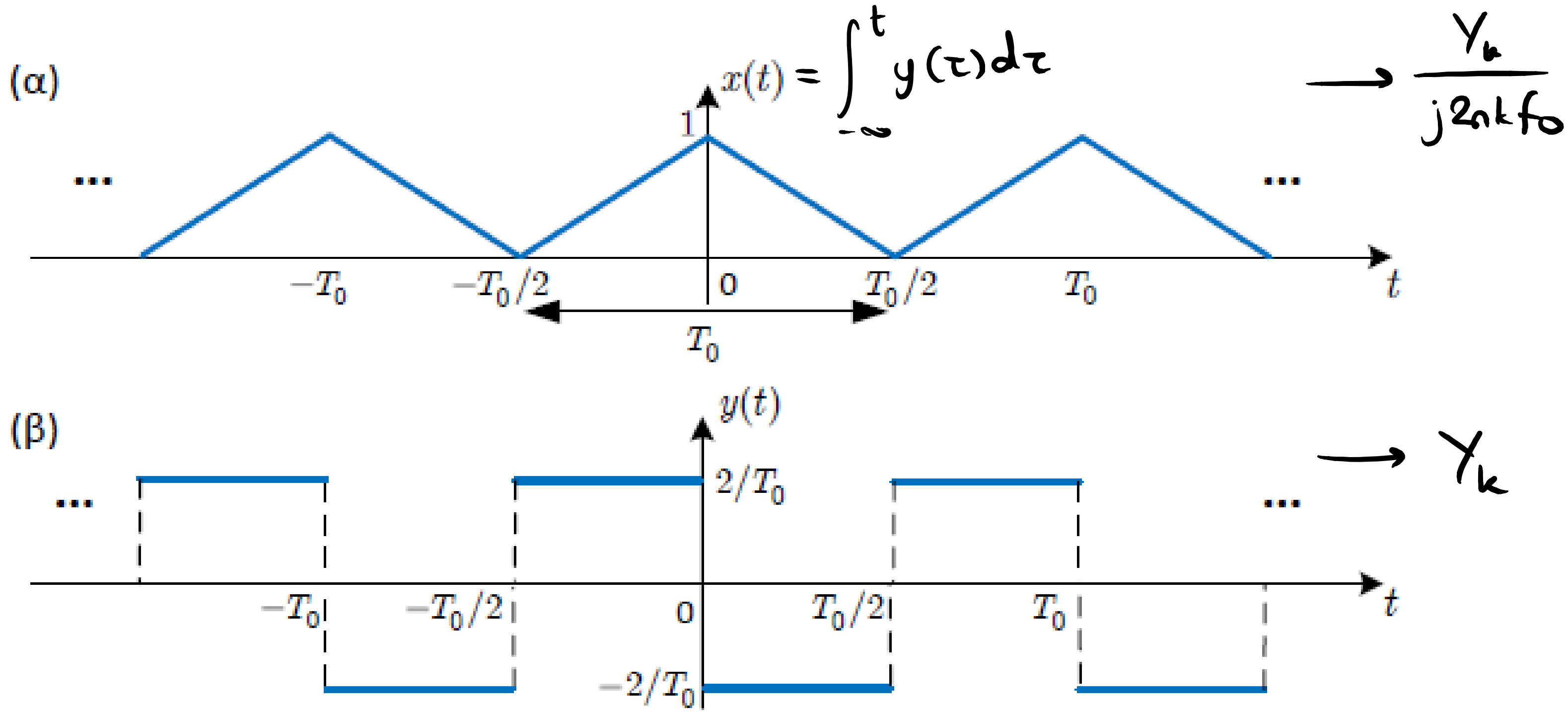
$X_k = \frac{1}{j\pi k}$, k περιττά

$\rightarrow j2\pi k f_0 \frac{1}{j\pi k} = \frac{2}{T_0}$, k περιττά ②

① = ②

- **Ιδιότητες**
- **Ολοκλήρωση στο χρόνο**

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \xleftrightarrow{FS} \frac{X_k}{j2\pi k f_0}$$



- **Ιδιότητες**

Το σχήμα (β) είναι το 1ο σήμα της 3ης διαφάνειας αντεστραμμένο στο χρόνο, οπότε έχει συντελεστές (από ιδιότητα αναστροφής στο χρόνο)

$$\frac{2A}{j\pi(-k)},\ k \text{ περιττά} \qquad A = \frac{2}{T_0} \qquad \Bigg\{\ -\frac{4}{j\pi k T_0},\ k \text{ περιττά} = Y_k$$

Οπότε το σχήμα (α) θα έχει συντελεστές τους παραπάνω δια $j2\pi k f_0$, δηλ.

$$X_k = \frac{Y_k}{j2\pi k f_0} = \frac{-4}{j\pi k T_0}\frac{1}{j2\pi k f_0}$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k^2},\ k \text{ περιττά} \quad (\text{και } 0 \text{ για } k \text{ άρτια, προφανώς})$$

- **Ιδιότητες**
- **Θεώρημα Parseval**

$$P_x = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \xrightarrow{FS} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

Έστω $x(t) = 2\cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\pi 400t - \frac{\pi}{8}\right) \longrightarrow P_x = \frac{5}{2}$ (1η προσέγγιση)

Αλλιώς, $x(t) = e^{j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{j2\pi 100t} + e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j2\pi 100t} +$

$$+ \frac{1}{2j}\left(e^{-j\frac{\pi}{8}} \cdot e^{j2\pi 400t} - e^{j\frac{\pi}{8}} \cdot e^{-j2\pi 400t}\right)$$

$$= \underbrace{e^{j\frac{\pi}{6}}}\cdot e^{j2\pi 100t} + \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{6}}}\cdot e^{-j2\pi 100t} + \underbrace{\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}}}e^{j2\pi 400t} - \underbrace{\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{8}}}e^{-j2\pi 400t}$$

Είναι $\left|e^{j\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6}} = 1 = \left|e^{-j\frac{\pi}{6}}\right|$

— " — $\left|\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{8}}\right| = \left|\frac{1}{2j}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-j\frac{\pi}{8}}\right|}_{1} = \left|\frac{1}{2j}\right| = \frac{|1|}{|2j|} = \frac{1}{2|j|} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$

- **Ιδιότητες**

Άρα $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|^2 = 1^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Κρατήστε ότι: $|e^{j\theta}| = 1, \ \forall \theta$!

$|X_k| = |X_k^*| = |X_{-k}| \ \forall k$, για πραγματικά σήματα ($x(t) \in \mathbb{R}$)

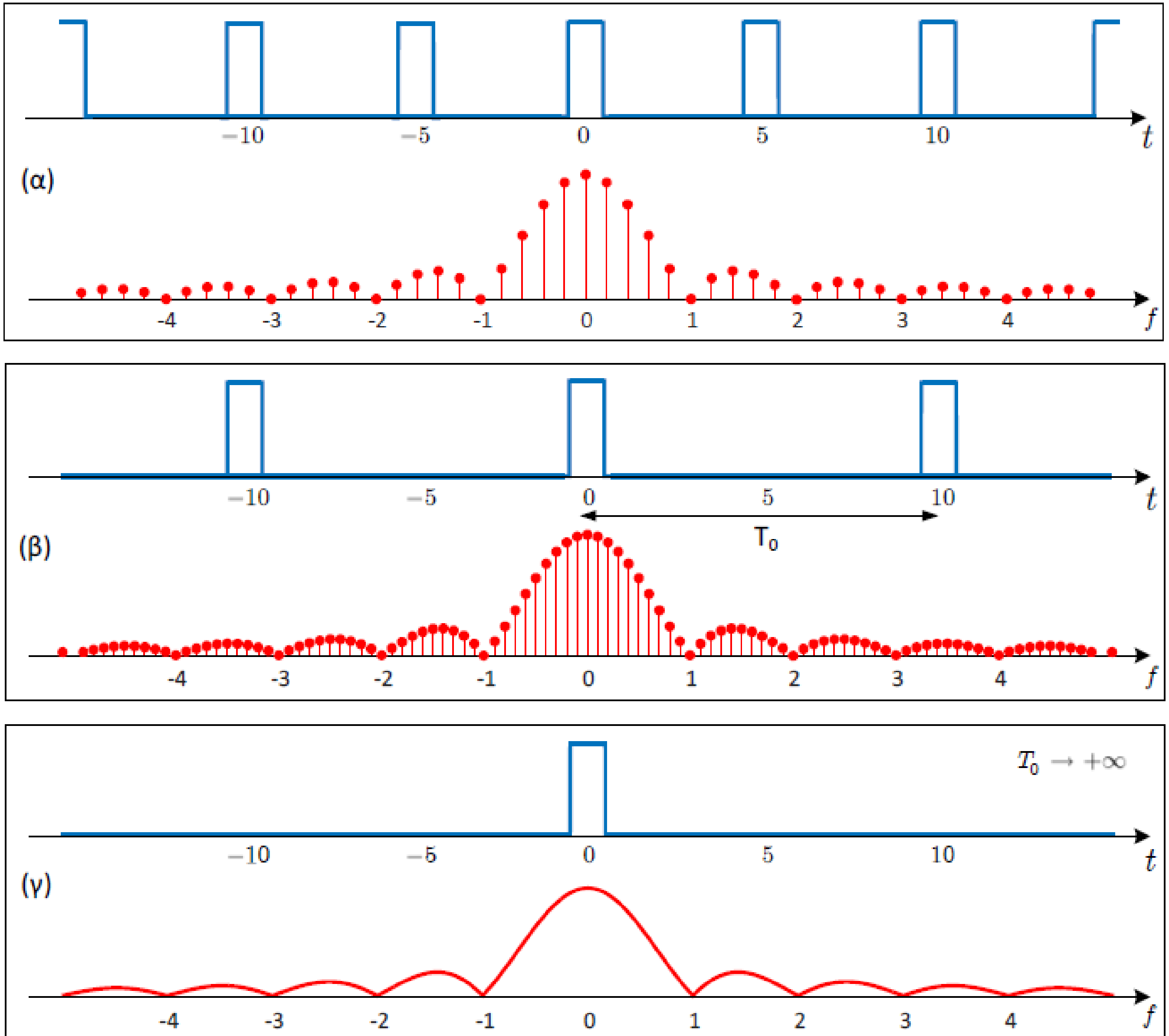
- **Από τις Σειρές Fourier προς το μετασχηματισμό Fourier…**
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Τι θα συμβεί αν $T_0 \rightarrow +\infty$?
- Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό
- Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά?

• Προς το μετασχ. Fourier…



$$T_0 = 5\ s$$
$$f_0 = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ Hz}$$
$$kf_0 = 0.2k \text{ Hz}$$

$$T_0 = 10\ s$$
$$f_0 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ Hz}$$
$$kf_0 = 0.1k \text{ Hz}$$

?

- **Προς το μετασχ. Fourier…**

- Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

- Όταν $T_0 \to +\infty$, τότε $f_0 = \frac{1}{T_0} \to df$ και $kf_0 \to f$ και $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$

- Οπότε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right)}_{X_k \to X(f)} e^{j2\pi f t} df$$

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ