ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 8Η

- Σειρές Fourier

- **Σειρές Fourier**

- Ένα περιοδικό πραγματικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

η οποία ονομάζεται **εκθετική Σειρά Fourier**

- Οι συντελεστές X_k ονομάζονται **συντελεστές Fourier** και δίνονται από τη σχέση

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- Για πραγματικά σήματα, οι συντελεστές είναι συζυγώς συμμετρικοί ως προς k

$$X_{-k} = X_k^*$$

- Ας το δείξουμε

- **Σειρές Fourier**

$$X_{-k} = X_k^*$$

$$|z| = |z^*|$$

$$|X_{-k}| e^{j\varphi_{-k}} = |X_k^*| e^{-j\varphi_k}$$

$$\varphi_{-k} = -\varphi_k$$

$$X_{-k} = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) e^{-j2\pi(-k)f_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \quad (1)$$

$$X_k^* = \left(\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt\right)^* = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} \underset{\substack{\| \\ x(t)}}{x^*(t)} \underbrace{\left(e^{-j2\pi k f_0 t}\right)^*}_{e^{j2\pi k f_0 t}} dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t) e^{j2\pi k f_0 t} dt \quad (2)$$

$$(1) = (2)$$

- **Σειρές Fourier**

- Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι τότε μπορούμε να γράψουμε την **τριγωνομετρική Σειρά Fourier** ως:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|X_k| \cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$$

με ϕ_k τη φάση του k −οστού συντελεστή Fourier

Είναι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = X_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{-k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad (X_{-k} = X_k^*)$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k^* e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k^*| e^{j\varphi_{k^*}} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\varphi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

- **Σειρές Fourier**

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi k f_0 t} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j\varphi_k} e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{-j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)} + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} |X_k| \Big(\underbrace{e^{j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(2\pi k f_0 t + \varphi_k)}}_{2\cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k)} \Big)$$

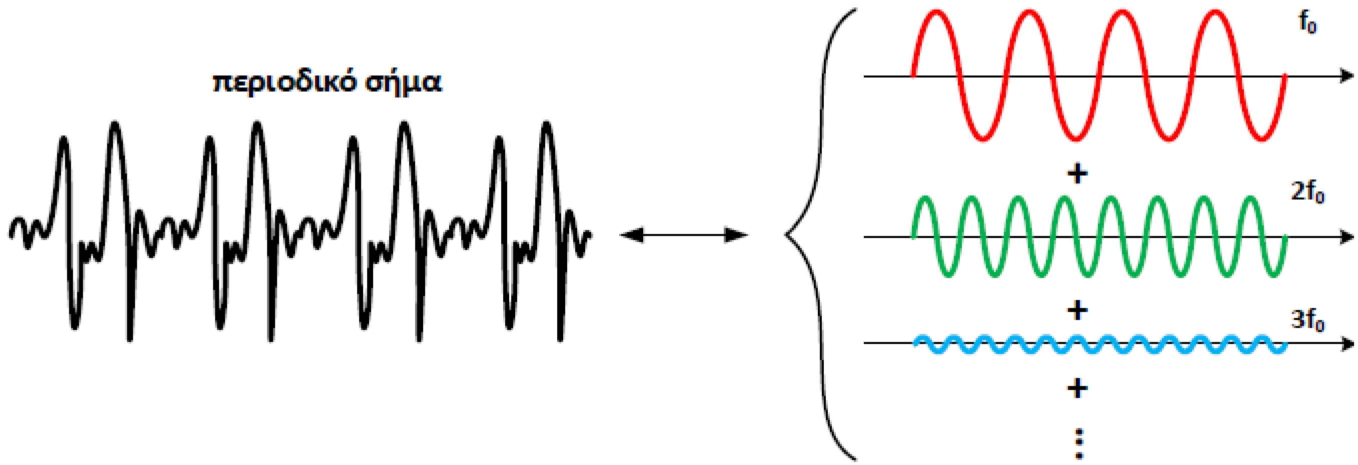
$$= X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{2|X_k|}_{A_k} \cos(2\pi k f_0 t + \varphi_k).$$

$$X_k = |X_k| e^{j\varphi_k}$$

$$A_k = 2|X_k| \;,\; \varphi_k$$

- **Σειρές Fourier**

- Η Σειρά Fourier αναλύει ένα πραγματικό περιοδικό σήμα με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους ημίτονα με συχνότητες kf_0



- Εναλλακτικά, αναλύει ένα (σχεδόν) οποιοδήποτε περιοδικό σήμα (πραγματικό ή μη) με περίοδο $T_0 = \frac{1}{f_0}$ σε απείρου – εν γένει – πλήθους μιγαδικά εκθετικά σήματα με συχνότητες kf_0

- Σημειώστε ότι η τιμή του συντελεστή για $k = 0$ υπολογίζεται συνήθως ξεχωριστά ως

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt$$

- Παράδειγμα:

○ Αναπτύξτε σε Σειρά Fourier το σήμα που περιγράφεται σε μια περίοδό του ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

- Δείξατε στην προηγούμενη διάλεξη ότι

$$X_0 = 0$$

$$X_k = \begin{cases} 0, & k \text{ αρτια} \\ -\frac{j2A}{k\pi}, & k \text{ περιττα} \end{cases}$$

$$X_k = -j\frac{2A}{\pi k} \overset{*}{=} e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{2A}{\pi k} = \frac{2A}{\pi k}e^{-j\frac{\pi}{2}}, \quad k \text{ περιττά}$$

$$* \; e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$$

Euler

- Παράδειγμα:

Θέλαμε να γράψουμε τα X_k σε πολική μορφή: $\overset{\text{μέτρο}}{|X_k|}\, e^{j\overset{\text{φάση}}{\varphi_k}}$, $|X_k| > 0$, $\varphi_k \in (-\pi, \pi]$

Έχουμε $X_k = \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, όμως το $\frac{2A}{\pi k}$ μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό (ανάλογα την τιμή του k), οπότε δεν μπορεί να είναι μέτρο του X_k. Όμως:

$$X_k = \begin{cases} \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k>0 \\ \frac{2A}{\pi k} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k>0 \\ \frac{2A}{\pi(-|k|)} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k<0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k>0 \\ (-1)\frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k<0 \end{cases} \overset{*}{=} \begin{cases} \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k>0 \\ e^{j\pi}\frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2A}{\pi |k|} e^{-j\pi/2}, & k>0 \\ \frac{2A}{\pi |k|} e^{j\pi/2}, & k<0 \end{cases}$$

Euler

$* \; e^{j\pi} = -1$

- Παράδειγμα:

Άρα: $X_k = \begin{cases} \frac{2A}{\pi|k|} e^{-j\frac{\pi}{2}}, & k>0 \\ \frac{2A}{\pi|k|} e^{j\frac{\pi}{2}}, & k<0 \end{cases} \Longrightarrow |X_k| = \frac{2A}{\pi|k|} > 0 \;\; \forall \; k!$

$\varphi_k = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & k>0 \\ \frac{\pi}{2}, & k<0 \end{cases}$

και $X_0 = 0$.

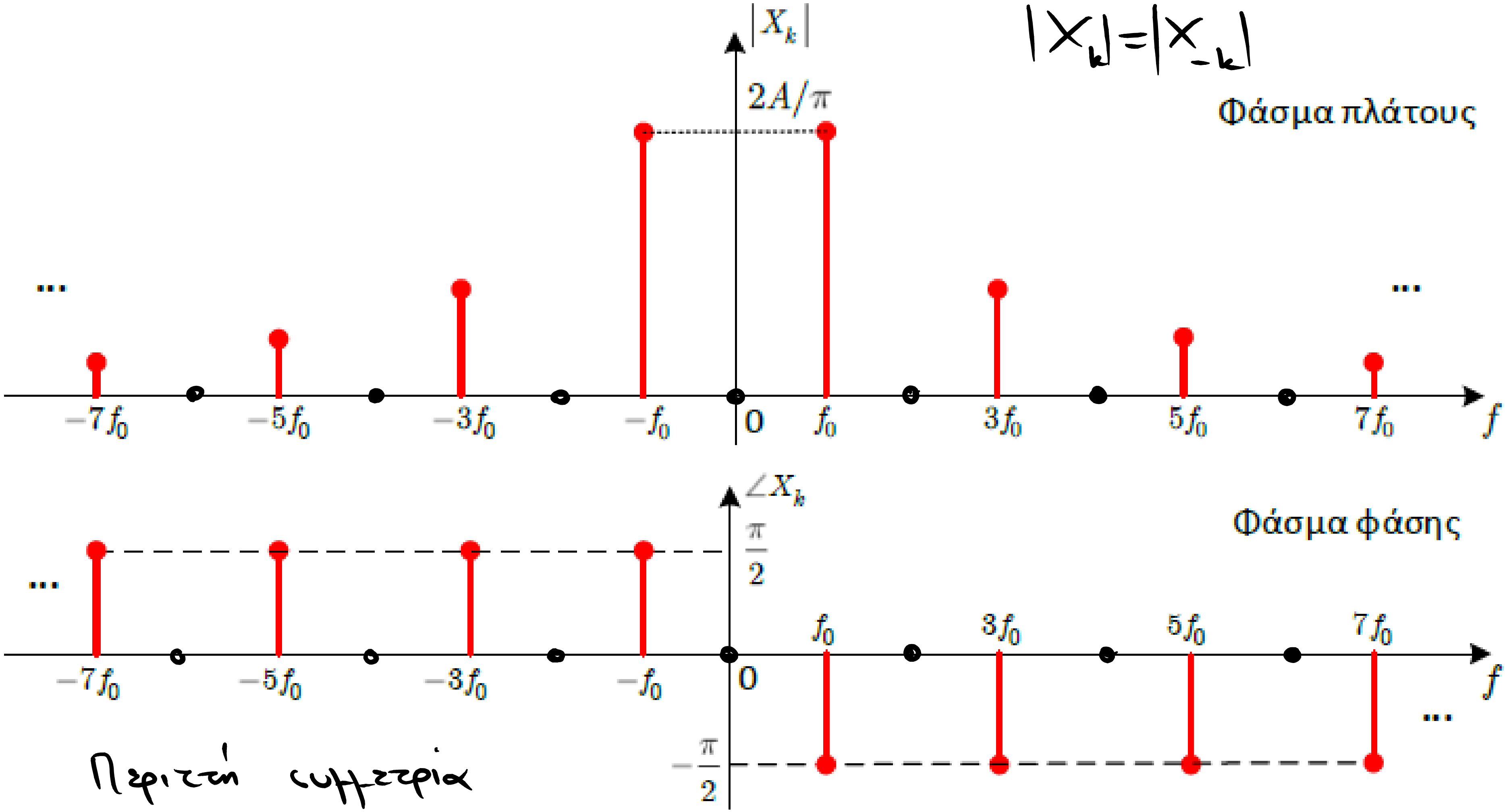
Μπορούμε τώρα εύκολα να σχεδιάσουμε φάσμα πλάτους και φάσης βάζοντας αρκετές ενδεικτικές τιμές στο k.

Σημείωση: Επιλέξαμε πριν τον όρο (-1) στο δεύτερο κλάδο να τον αντικαταστήσουμε με $e^{j\pi}$. Όμως ισχύει και ότι $e^{-j\pi} = -1$! Επιλέξαμε όμως το $e^{j\pi}$, έτσι ώστε η συνολική τελική φάση για $k<0$ να "βγει" στο διάστημα $(-\pi, \pi]$!

- Παράδειγμα:

Άρτια συμμετρία

$|X_k| = |X_{-k}|$

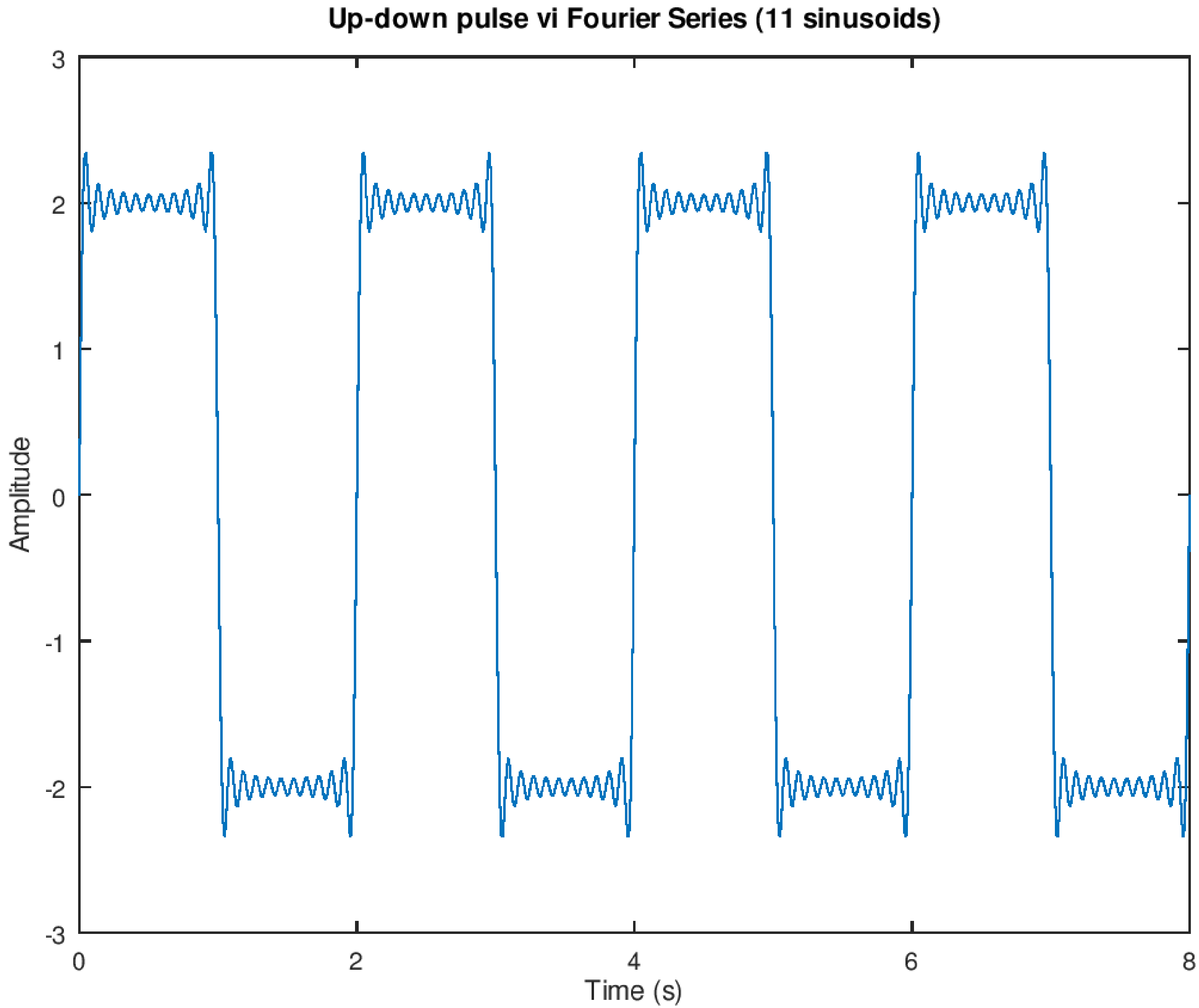


Περιττή συμμετρία

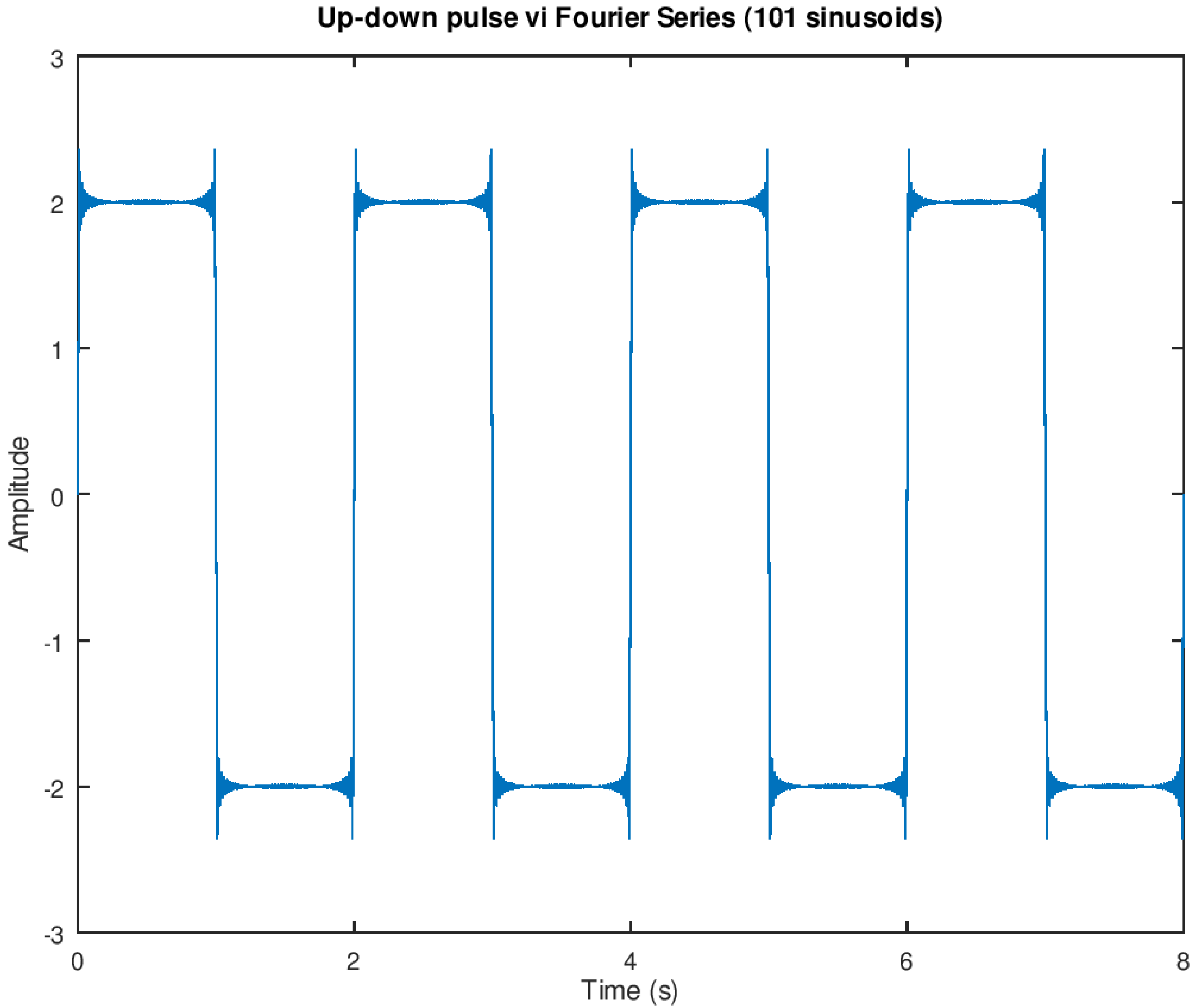
$\varphi_k = -\varphi_{-k}$

Οι συμμετρίες ισχύουν πάντα όταν $x(t) \in \mathbb{R}$!

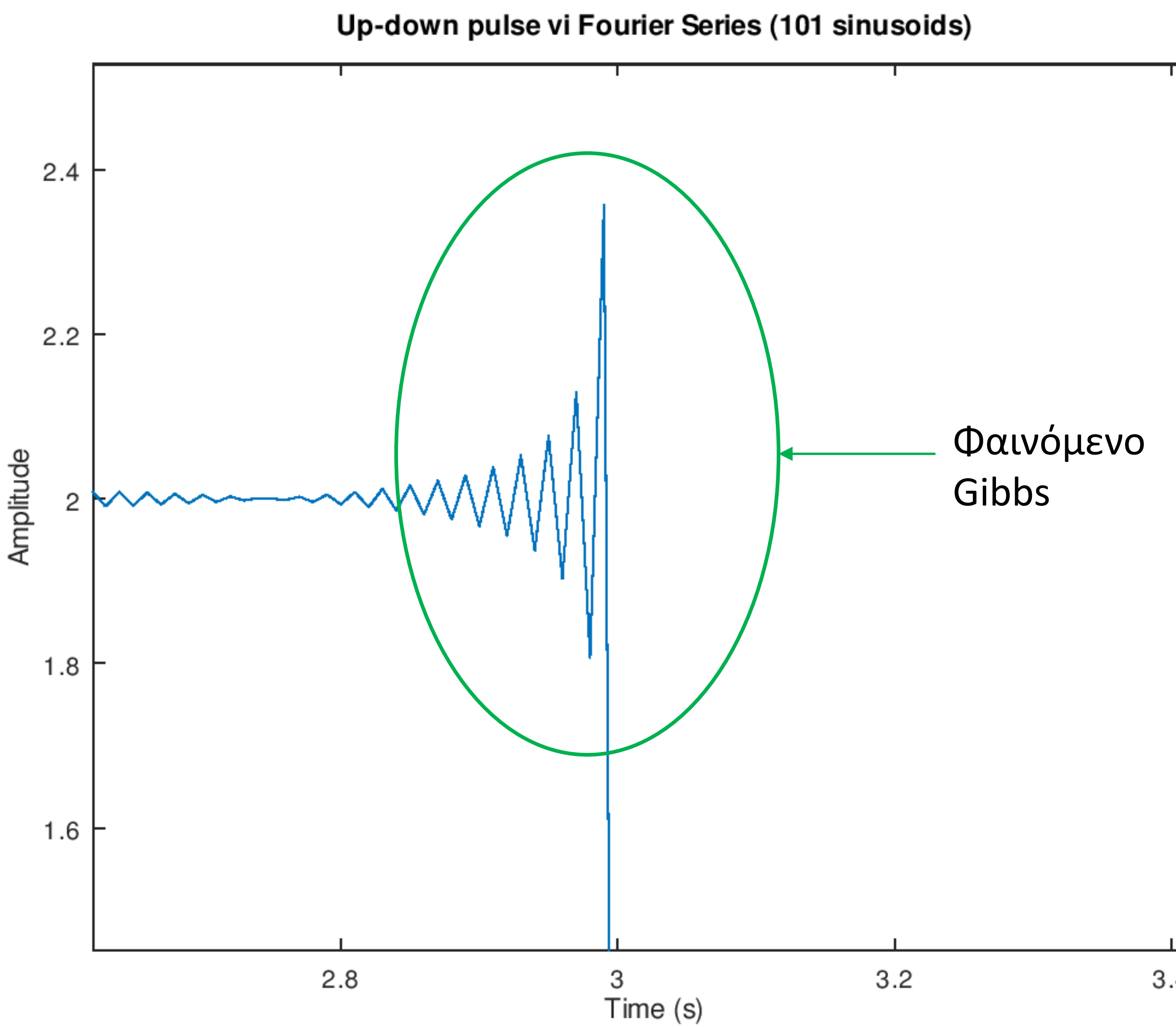
- **Σειρές Fourier**



• **Σειρές Fourier**



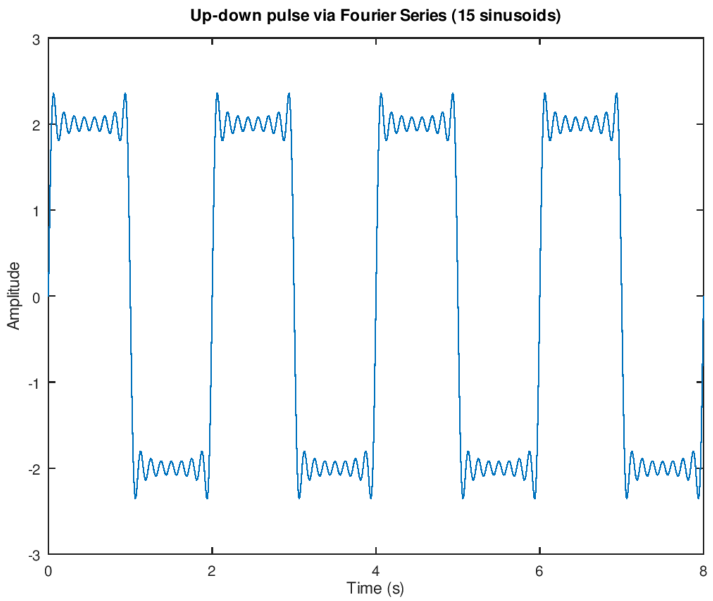
- **Σειρές Fourier**



- **Σειρές Fourier**

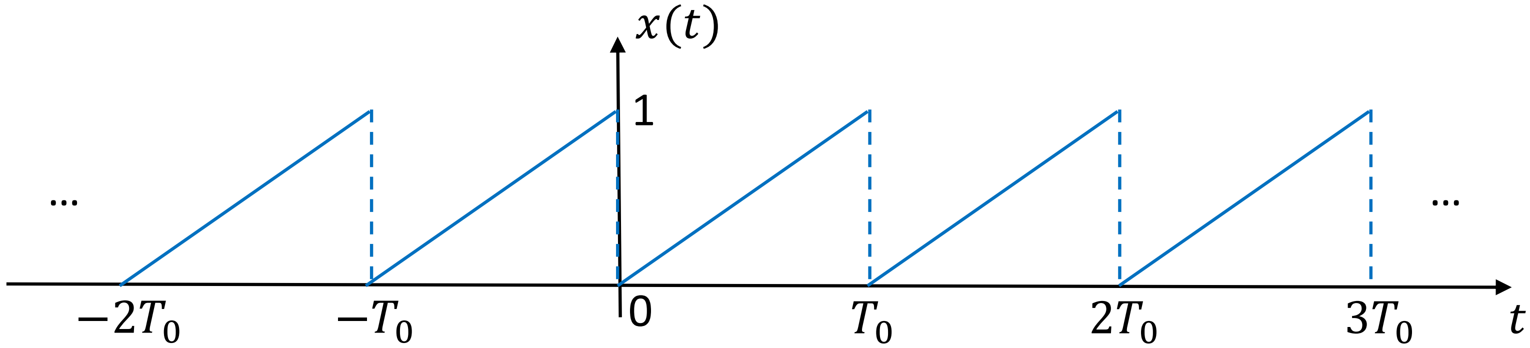
- Κώδικας Octave

```
% Πλάτος παλμού
A = 2;
% Περίοδος
T0 = 2;
% Θεμελιώδης συχνότητα
f0 = 1/T0;
% Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01;
% Άξονας χρόνου
t = 0:dt:4*T0;
% Όρος N (άθροισμα από -N ως N)
N = 15;
% Κάθε περιττό k από -N ως N
k = [-N:2:-1, 1:2:N];
% Συντελεστές Fourier
Xk = -j*2*A./(pi*k);
% Αρχικοποίηση σήματος
sig = zeros(1, length(t));

% Προσθήκη ενός εκθετικού κάθε φορά
for i=1:length(k)
    sig = sig + Xk(i)*exp(j*2*pi*k(i)*f0*t);
end

% Γράφημα
plot(t,sig)
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Up-down pulse via Fourier Series (15 sinusoids)');
```



- Παράδειγμα:

○ Για το σήμα



μπορούμε να δείξουμε ότι

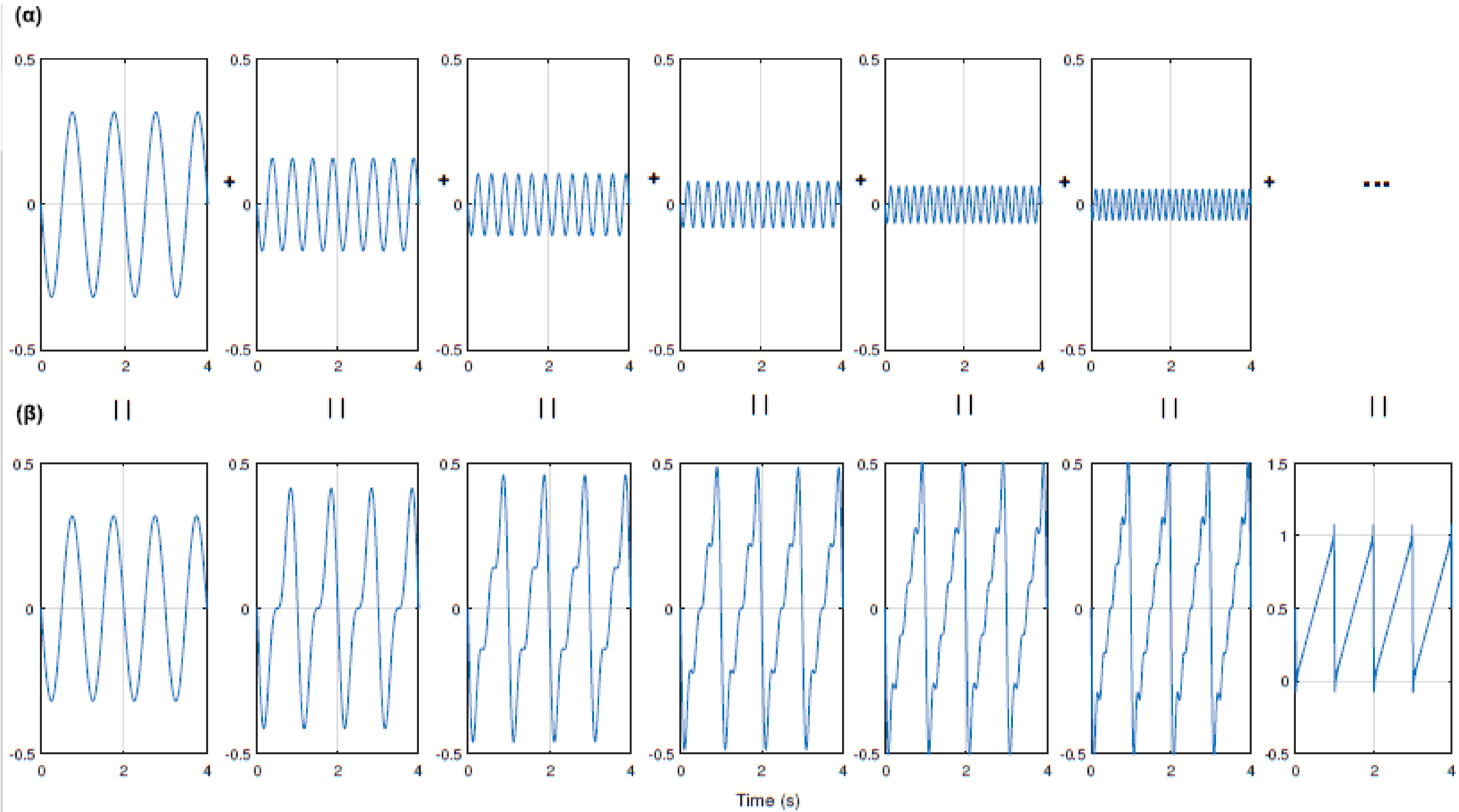
$$X_0 = \frac{1}{2}, \qquad X_k = \frac{1}{2k\pi} e^{\frac{j\pi}{2}}$$

- Η τριγωνομετρική σειρά Fourier του είναι η

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \cos\left(2\pi k f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

- Μπορούμε να γράψουμε ένα πρόγραμμα να συνθέσει για μας τα ημίτονα που αντιστοιχούν σε αυτή τη σειρά Fourier **ένα προς ένα**
  - Έστω $T_0 = 1$

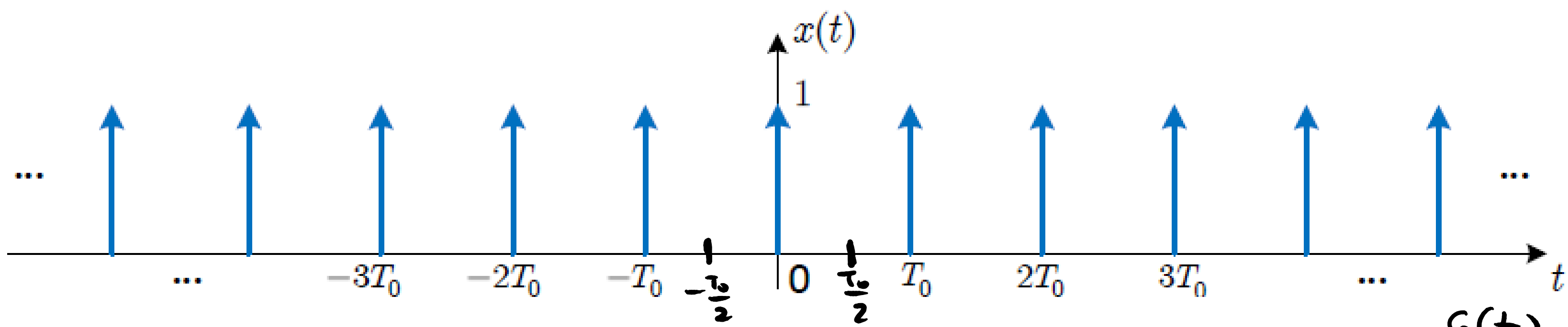
- Παράδειγμα:



- Παράδειγμα:

  ○ Υπολογίστε τη Σειρά Fourier του περιοδικού σήματος

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



Έχουμε:

$$X_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}\,dt = \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t)\, e^{\overbrace{-j2\pi k f_0 t}^{\varphi(t)}}\,dt}$$

$$= \frac{1}{T_0}\,\varphi(t)\Big]_{t=0} = \frac{1}{T_0}\, e^{-j2\pi k f_0 t}\Big]_{t=0} = \frac{1}{T_0}$$

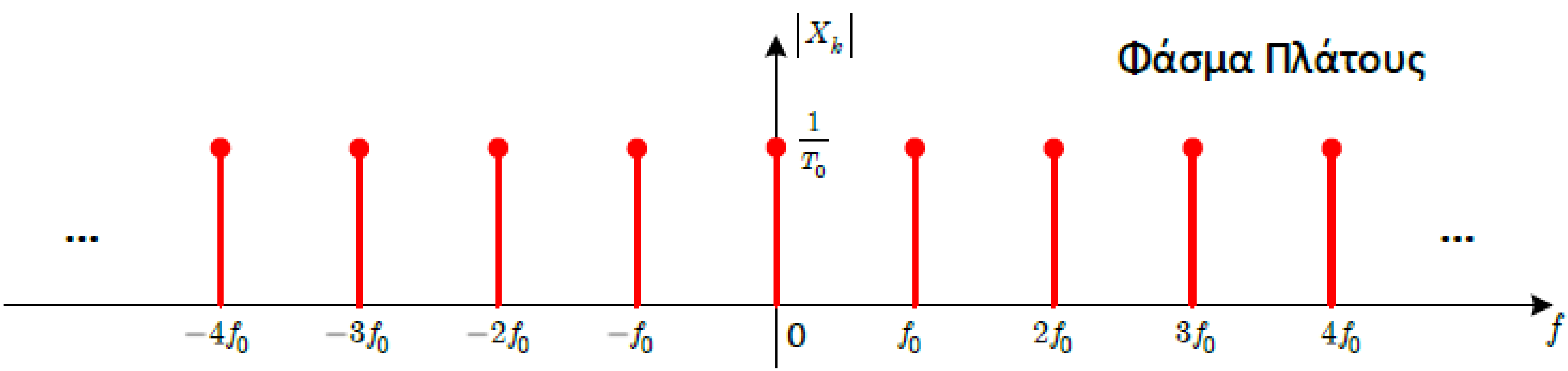
Άρα $X_k = 1/T_0, \ \forall\ k.$

- Παράδειγμα:

Άρα $X_k = \frac{1}{T_0}, \ \forall k, \Longrightarrow |X_k| = \frac{1}{T_0}, \ \forall k$

$\varphi_k = 0, \ \forall k$

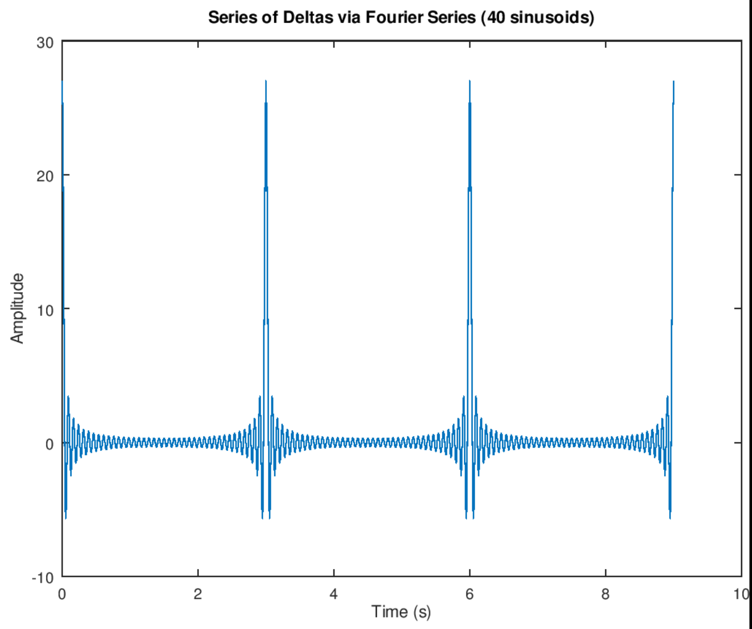
Το φάσμα πλάτους φαίνεται παρακάτω, ενώ το φάσμα φάσης είναι μηδέν, αφού $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_0} e^{j0}$, οπότε δεν το σχεδιάζω.



- Παράδειγμα:

- Κώδικας Octave:

```
% Περίοδος
T0 = 3;
% Θεμελιώδης συχνότητα
f0 = 1/T0;
% Βήμα στο χρόνο
dt = 0.01;
% Άξονας χρόνου
t = 0:dt:3*T0;
% Όρος N (από -N ως N στο άθροισμα)
N = 40;
% Όλα τα k από -N ως N
k = -N:N;
% Συντελεστές Fourier (θέλουμε την τιμή 1/T0 για κάθε k)
Xk = 1/T0 * ones(1,length(t));
% Αρχικοποίηση σήματος
sig = zeros(1,length(t));
% Προσθήκη ενός μιγαδικού εκθετικού κάθε φορά
for i=1:length(k)
    sig = sig + Xk(i)*exp(j*2*pi*k(i)*f0*t);
end
% Η μέση τιμή X0 περιλαμβάνεται στα Xk, άρα δεν
% την προσθέτουμε τώρα

% Γράφημα
plot(t, sig);
xlabel('Time (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Series of Deltas via Fourier Series (40 sinusoids)');
```



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ