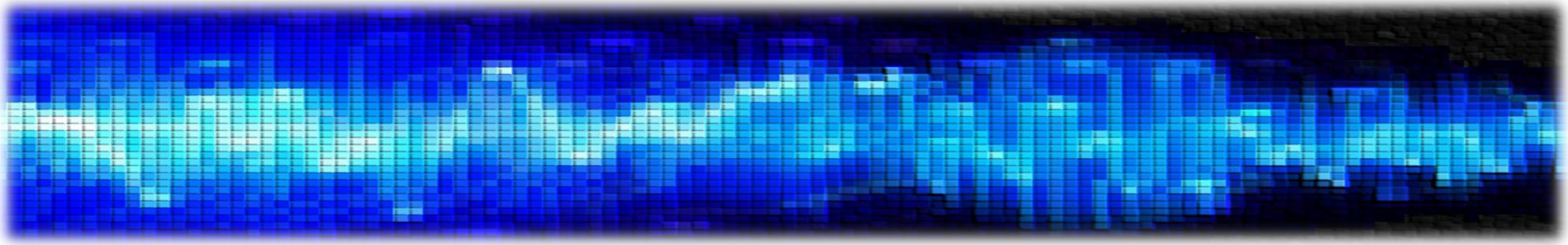
ΗΥ215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

ΔΙΑΛΕΞΗ 4Η

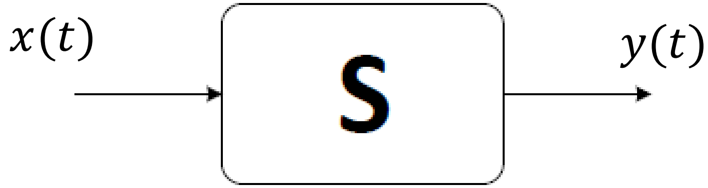


- Σήματα και Συστήματα

- **Σήμα**: φορέας πληροφορίας
  - Π.χ. εικόνα, ήχος, βίντεο, σύνολο δεδομένων, κλπ.

- Στα δικά μας πλαίσια, θα θεωρούμε ένα σήμα ως μια χρονοσειρά, δηλ. μια συνάρτηση του χρόνου
  - Η πληροφορία βρίσκεται στις μεταβολές του σήματος ως προς το χρόνο

- **Σύστημα**: δομή/αλγόριθμος/κύκλωμα κλπ. που εξάγει πληροφορία από την είσοδο $x(t)$ και την αναπαριστά ως έξοδο $y(t)$



- Θα μας απασχολήσουν αποκλειστικά συστήματα **μιας** εισόδου και **μιας** εξόδου
  - Υπάρχουν και συστήματα πολλαπλών εισόδων ή/και πολλαπλών εξόδων

- Ας μιλήσουμε πρώτα για τα σήματα…
  - … για τα οποία είπαμε ότι θα περιγράφουμε **ως συναρτήσεις του χρόνου –** $\boldsymbol{x(t)}$

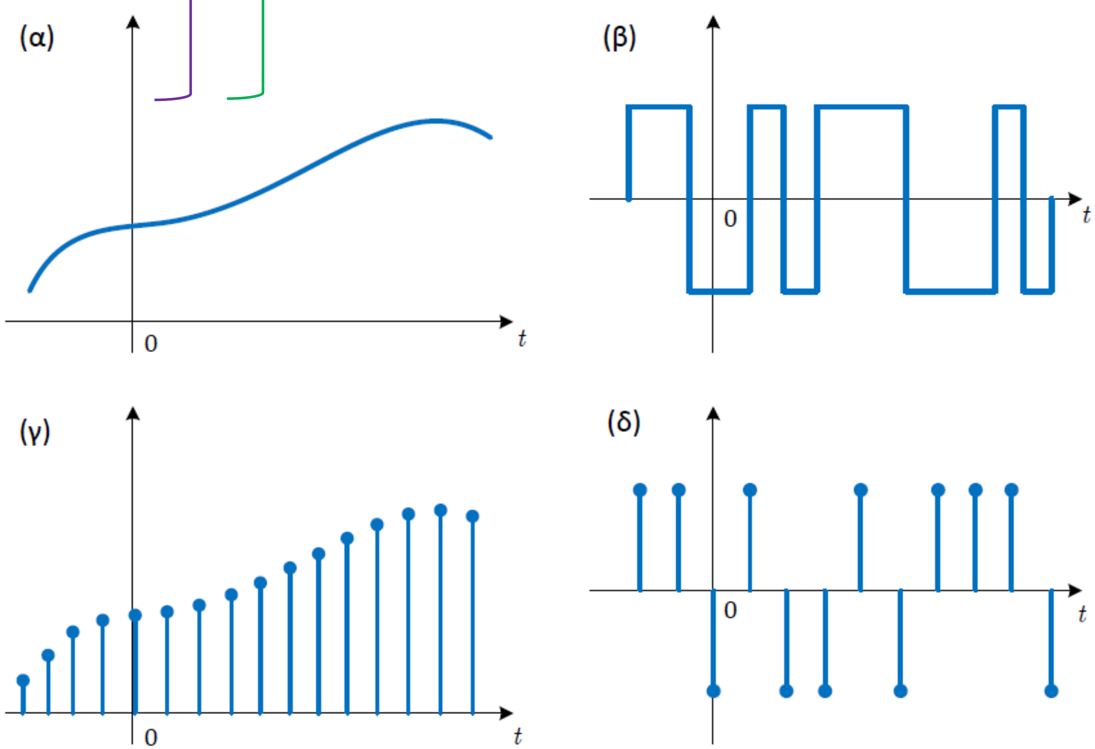
- **Σήματα**

- **Κατηγορίες σημάτων:**

1. Συνεχούς ή διακριτού χρόνου σήματα
2. Αναλογικά ή ψηφιακά σήματα
3. Σήματα περιοδικά ή απεριοδικά
4. Σήματα ενέργειας ή ισχύος
5. Ντετερμινιστικά ή στοχαστικά

ΗΥ215

ΗΥ370



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Θα θέλαμε να μπορούμε να περιγράψουμε ένα σήμα με έναν αριθμό
  - Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να αντιπροσωπεύει το «μέγεθος» του σήματος
- Ενέργεια Σήματος

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Ισχύς σήματος

$$P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt, \qquad x(t) \in \mathbb{C}$$

- Αν $0 < E_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ενέργειας
- Αν $0 < P_x < +\infty \rightarrow$ σήμα ισχύος
- Ένα σήμα είναι **είτε** ενέργειας, **είτε** ισχύος, **είτε** τίποτε από τα δυο!
  - Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x(t) = t^n, \qquad x(t) = e^{at}$$

δεν είναι τίποτε από τα δυο

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (εν γένει) εκ των προτέρων αν ένα σήμα είναι ενέργειας ή ισχύος (η τίποτε)
  - Υπάρχουν όμως κάποιοι «κανόνες» για να μην υπολογίζουμε κάθε φορά τυχαία μια εκ των δυο ποσοτήτων (και κάποιες φορές αναγκαστικά και τις δυο)

- **Κανόνες**:
  - Προϋπόθεση: το πλάτος του σήματος δεν απειρίζεται για κανένα χρονικό σημείο ή διάστημα == **φραγμένο πλάτος για κάθε t**

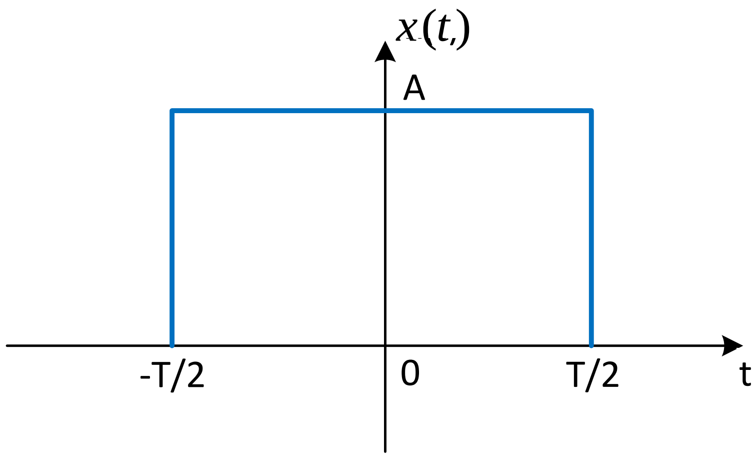
❑ Σήμα Ενέργειας

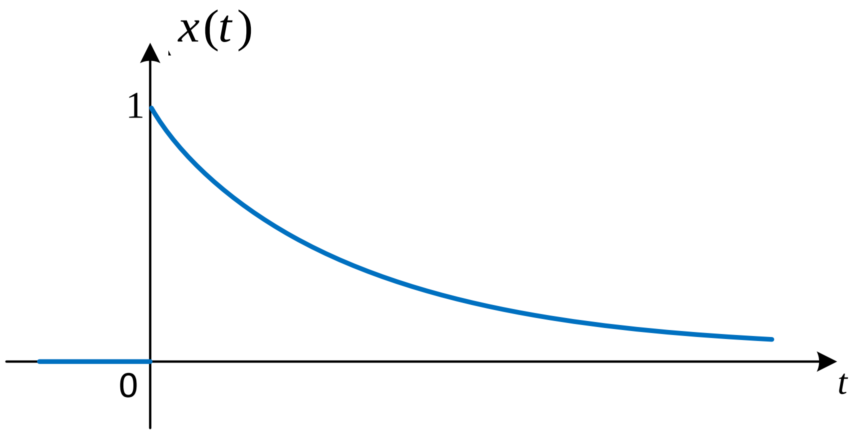
- ✓ Πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο
- ✓ Άπειρη διάρκεια στο χρόνο αλλά $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$
  - ✓ Ακόμα κι αν ισχύει η παραπάνω σχέση, το σήμα μπορεί να **μην** είναι σήμα ενέργειας

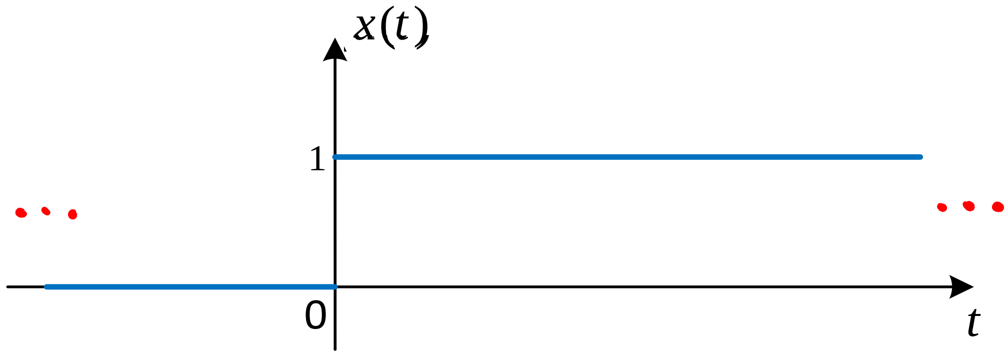
❑ Σήμα Ισχύος

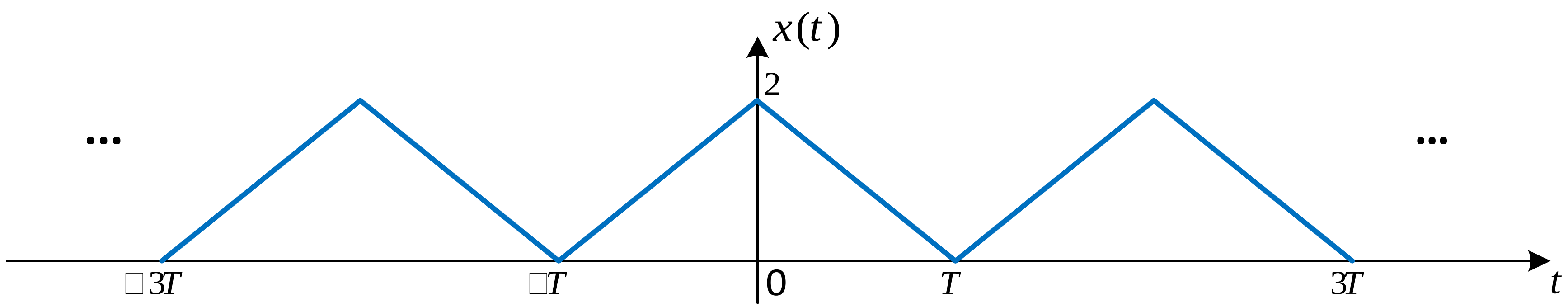
- ✓ Άπειρης διάρκειας
- ✓ Περιοδικό

- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**





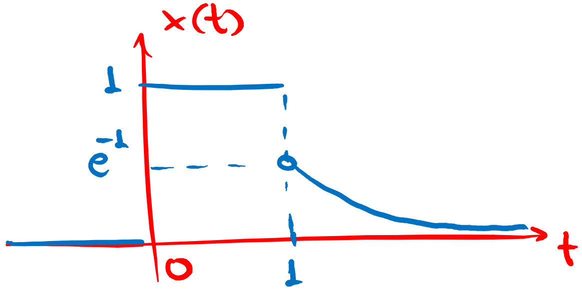




- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας ή Ισχύος**
- Θεωρητικά, μπορεί κανείς να επινοήσει κανείς σήματα που ικανοποιούν τους κανόνες αλλά δεν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος
  - Π.χ. ένα σήμα με άπειρου πλήθους ασυνέχειες σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$
- Τέτοια σήματα δε θα μας απασχολήσουν
- Επίσης, κάθε σήμα που μπορεί να φτιάξει κανείς στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση είναι σήμα **ενέργειας**
- Όμως τα σήματα ισχύος παρέχουν ένα αυστηρό θεωρητικό υπόβαθρο για γενικότερη μελέτη σημάτων και συστημάτων
- Ας δούμε μερικά παραδείγματα

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα
    - $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$ $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα
    - $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



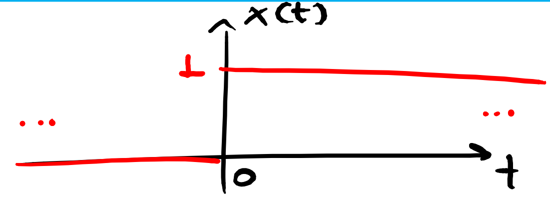
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{1} 1^2 dt + \int_{1}^{+\infty} (e^{-t})^2 dt$$

$$= 0 + t\Big]_0^1 + \int_1^{+\infty} e^{-2t} dt = (1-0) - \frac{1}{2} e^{-2t}\Big]_1^{+\infty}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-2t} - e^{-2\cdot 1}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(0 - e^{-2}\right) = 1 + \frac{1}{2}e^{-2}.$$

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:



○ Εξετάστε και υπολογίστε την κατάλληλη μετρική για τα παρακάτω σήματα

- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $x^2(t) = \begin{cases} 0^2, & t<0 \\ 1^2, & t>0 \end{cases} = x(t)$

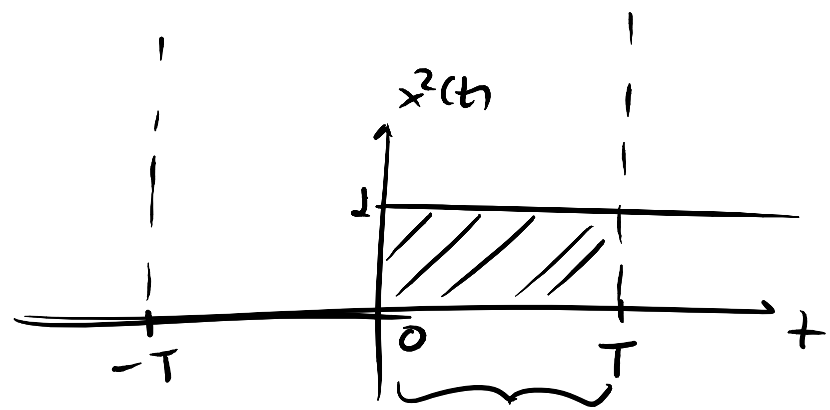
$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1\, dt$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} t \Big]_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} T = \lim_{T\to+\infty} \frac{\cancel{T}}{2\cancel{T}}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$



- **Σήματα**
- **Σήματα Ενέργειας και Ισχύος**
- Μπορεί κανείς εύκολα (αλλά με κάμποσες πράξεις) να δείξει ότι

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi), A \in \Re \rightarrow P_x = \frac{A^2}{2}$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i), A_i \in \Re \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^{N} \frac{A_i^2}{2}$$

$$x(t) = Ae^{j2\pi f_0 t}, A \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = |A|^2$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i e^{j2\pi f_i t}, A_i \in \mathbb{C} \rightarrow P_x = \sum_{i=0}^{N} |A_i|^2$$

- Εξασκηθείτε αποδεικνύοντας αναλυτικά τα παραπάνω! ☺

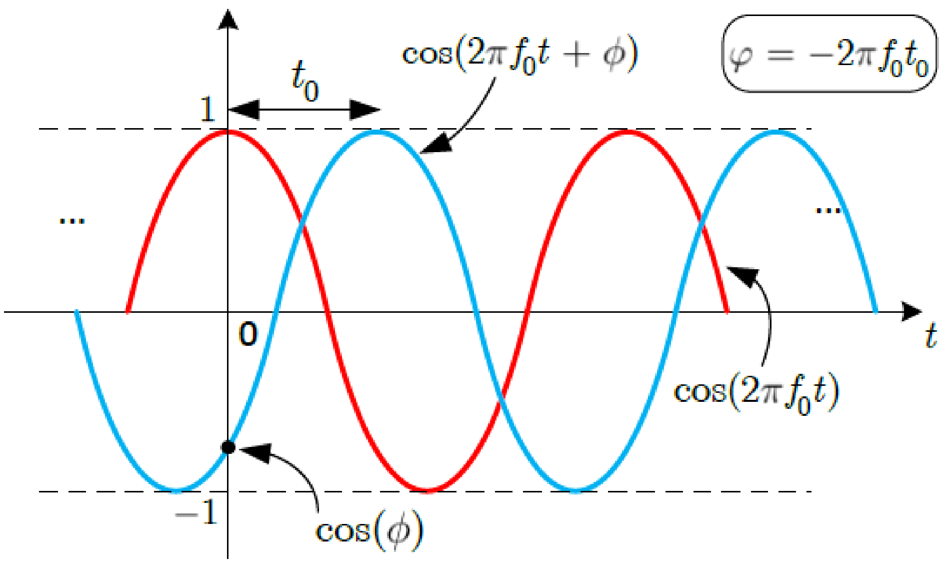
- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**
- Μπορούμε να κάνουμε μερικές ενδιαφέρουσες πράξεις στην ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου t

  - Χρονική ολίσθηση (time shifting)
  - Χρονική αντιστροφή (time reversal)
  - Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

■ Χρονική μετατόπιση/ολίσθηση (time shifting)

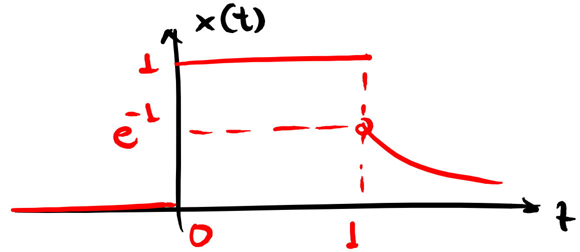
- Η χρονική ολίσθηση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη μετατόπιση του σήματος δεξιά ή αριστερά στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $t - t_0$, με t_0 θετικό ή αρνητικό
  - Αν t_0 θετικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα δεξιά → καθυστέρηση
  - Αν t_0 αρνητικό, τότε έχουμε ολίσθηση προς τα αριστερά → προήγηση
  - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)
- Θυμηθείτε τα ημιτονοειδή σήματα



- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

○ Βρείτε το καθυστερημένο κατά $t_0 = 2$ σήμα για το παρακάτω σήμα

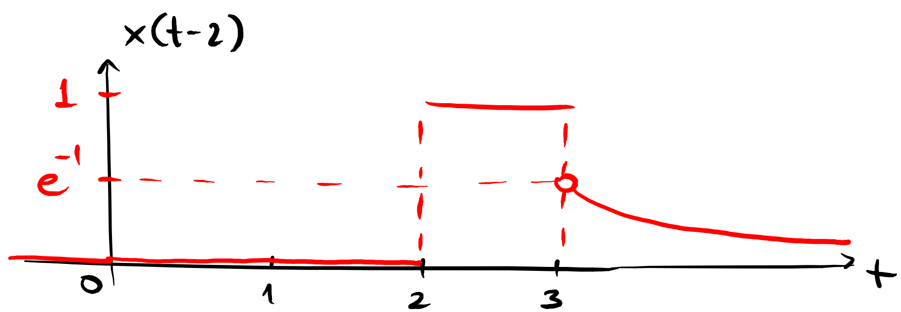
- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

Αντικαθιστούμε όπου t το t-2. Άρα:

$$x(t-2) = \begin{cases} 0, & t-2 < 0 \\ 1, & 0 < t-2 < 1 \\ e^{-(t-2)}, & t-2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ e^{-(t-2)}, & t > 3 \end{cases}$$

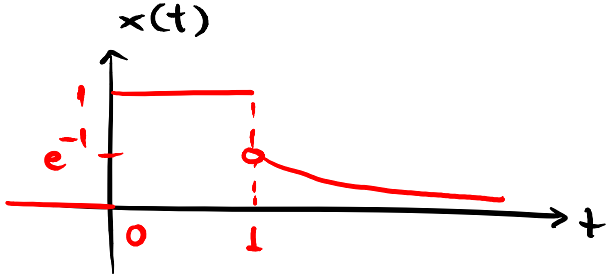


- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

■ Χρονική αντιστροφή (time reversal)

- Η χρονική αντιστροφή δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη ανάκλαση του σήματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $-t$
    - Αν το σήμα «ζει» στο θετικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει στον αρνητικό ημιάξονα
    - Αν το σήμα «ζει» στον αρνητικό ημιάξονα του χρόνου, τότε η αντιστροφή θα το φέρει στο θετικό ημιάξονα
    - Αν το σήμα «ζει» και στους δυο άξονες, τότε το τμήμα του θετικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στον αρνητικό ημιάξονα και το τμήμα του αρνητικού ημιάξονα θα καθρεπτιστεί στο θετικό ημιάξονα
    - Η χρονική αντιστροφή ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

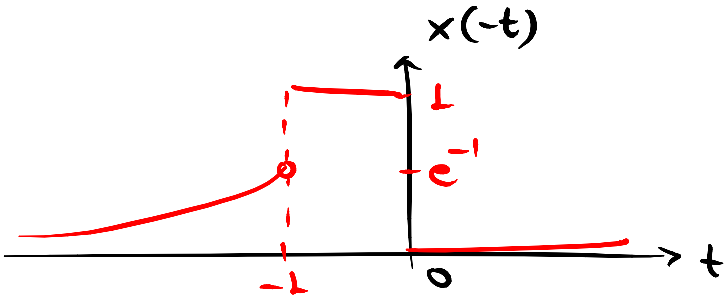
- **Σήματα**
- Παράδειγμα:
  - Βρείτε το σήμα $x(-t)$ για το παρακάτω σήμα
    - $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε και τα δυο σήματα.

Αντικαθιστώ όπου t το $-t$. Άρα:

$$x(-t) = \begin{cases} 0, & -t < 0 \\ 1, & 0 < -t < 1 \\ e^{t}, & -t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ e^{t}, & t < -1 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μετασχηματισμοί σημάτων**

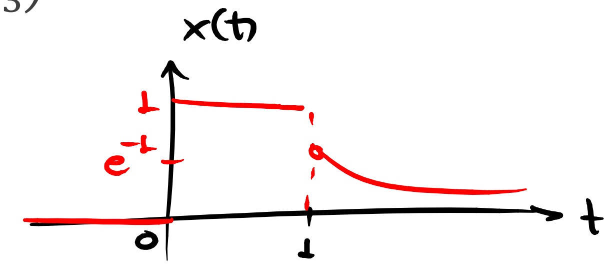
▪ Χρονική κλιμάκωση (time scaling)

- Η χρονική κλιμάκωση δεν είναι τίποτε περισσότερο από τη συμπίεση ή την επέκταση του σήματος στον άξονα του χρόνου
- Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή t με τη μεταβλητή $at, \alpha \in \Re$
  - Αν το σήμα «ζει» στο διάστημα $[c, d]$, τότε η κλιμάκωση κατά $a \neq 1$ θα το «μεταφέρει» στο διάστημα $[ca, da]$
  - Αν ο παράγοντας κλιμάκωσης είναι αρνητικός, γίνεται χρονική αντιστροφή παράλληλα με τη χρονική κλιμάκωση
  - Η χρονική κλιμάκωση ΔΕΝ επηρεάζει τις τιμές του σήματος (το σύνολο τιμών)

- **Σήματα**
- Παράδειγμα:

○ Βρείτε τα σήματα $x(2t)$ και $x\left(\frac{t}{3}\right)$ για το παρακάτω σήμα

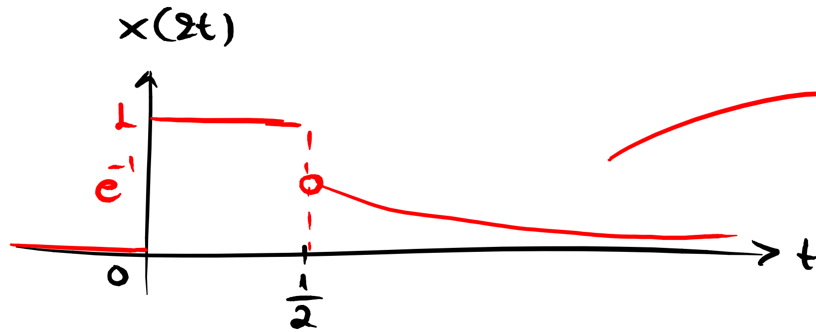
- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ e^{-t}, & t > 1 \end{cases}$



και σχεδιάστε τα όλα.

Αντικαθιστάμε όπου t το 2t. Άρα:

$$x(2t) = \begin{cases} 0, & 2t < 0 \\ 1, & 0 < 2t < 1 \\ e^{-2t}, & 2t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ e^{-2t}, & t > \frac{1}{2} \end{cases}$$



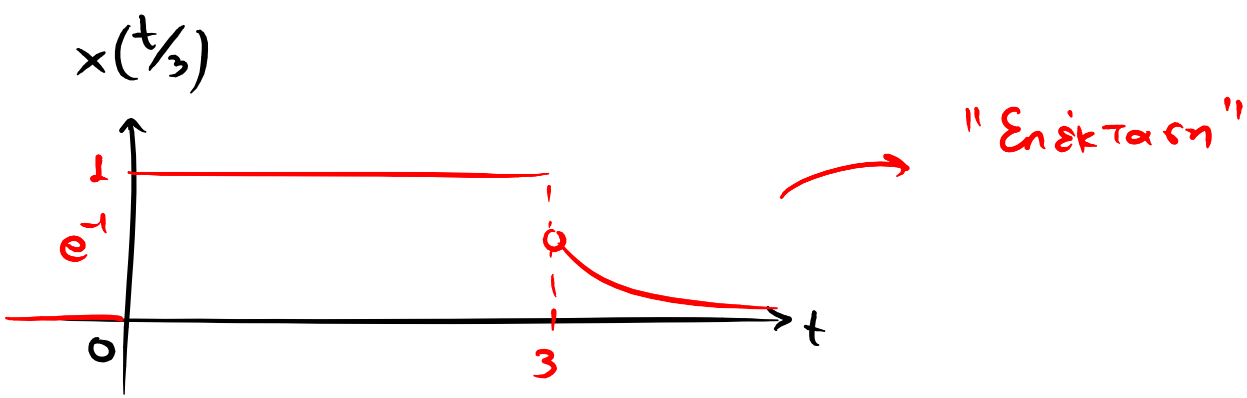
"Συμπίεση"

- **Σήματα**

- Παράδειγμα:

Αντικαθιστάμε όπου t το $\frac{t}{3}$. Άρα:

$$x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 0 & , \frac{t}{3} < 0 \\ 1 & , 0 < \frac{t}{3} < 1 \\ e^{-\frac{t}{3}} & , \frac{t}{3} > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ 1 & , 0 < t < 3 \\ e^{-t/3} & , t > 3 \end{cases}$$



- **Σήματα**
- **Μερικά χρήσιμα μοντέλα σημάτων**
- Εκτός από τα ημιτονοειδή, υπάρχουν και μερικές άλλες συναρτήσεις του χρόνου οι οποίες (θα) είναι πολύ χρήσιμες
- Αυτά είναι:

❑ **Η βηματική συνάρτηση**

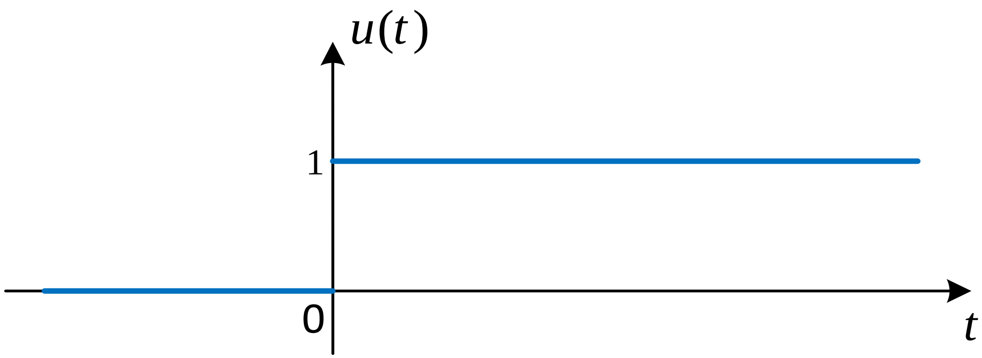
❑ **Ο τετραγωνικός παλμός**

❑ **Ο τριγωνικός παλμός**

❑ **Η κρουστική συνάρτηση (κατανομή) Δέλτα**

- **Σήματα**
- **Η βηματική συνάρτηση**
- Η βηματική συνάρτηση ορίζεται ως

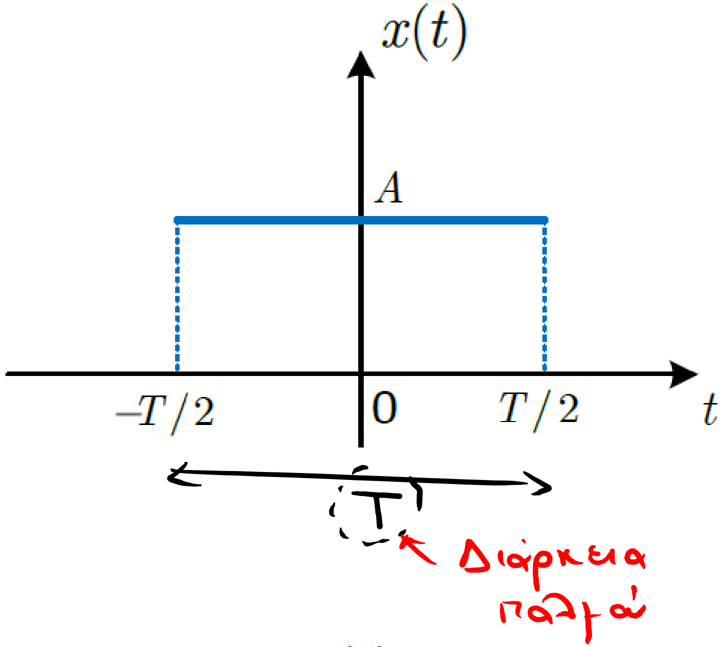
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



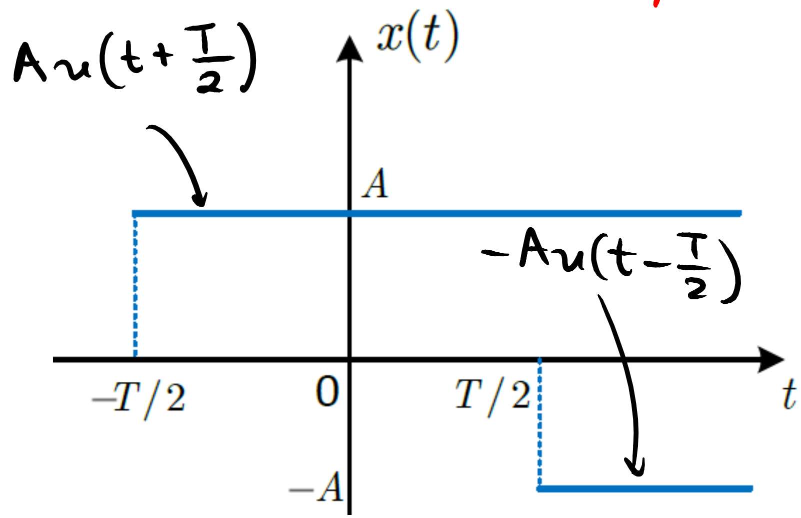
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές της είναι ως σήμα-διακόπτης (off-on)
  - δηλ. ως ένα ιδανικό μοντέλο ενός σήματος που πάει από 0 → 1 ακαριαία
- ...ή για να «κόψουμε» τμήματα άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς την με αυτά
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τη βηματική συνάρτηση
  - ...εκτός από τη διαίρεση σήματος με τη βηματική (διαίρεση με μηδέν)

- **Σήματα**
- **Ο τετραγωνικός παλμός**
- Ο τετραγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases} = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$



- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τετραγωνικό παλμό
  - ...εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)



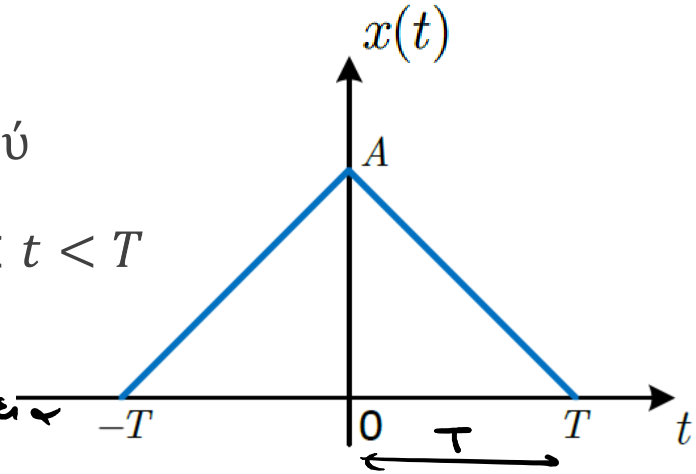
- Ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών συναρτήσεων
  - ...όπως στο σχήμα

- **Σήματα**
- **Ο τριγωνικός παλμός**
- Ο τριγωνικός παλμός ορίζεται ως

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \\ A\left(1 - \dfrac{|t|}{T}\right), & -T < t < T \end{cases}$$

$$= A\,\mathrm{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$$

→ μισή διάρκεια



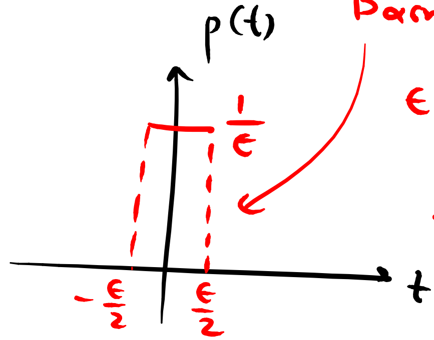
- Μια από τις βασικότερες εφαρμογές του είναι για να «κόψουμε» τμήματα πεπερασμένης διάρκειας άλλων σημάτων, πολλαπλασιάζοντάς τον με αυτά
  - …αλλά δίνοντας περισσότερο βάρος στις τιμές του σήματος στο κέντρο του παλμού
- Όλες οι γνωστές πράξεις καθώς και οι προηγούμενοι μετασχηματισμοί ορίζονται κανονικά για τον τριγωνικό παλμό
  - …εκτός από τη διαίρεση, ξανά (διαίρεση με μηδέν)

- Προσέξτε ότι στον συνοπτικό τύπο του παλμού ο παρονομαστής T είναι η **μισή** διάρκεια του, ενώ στον τετραγωνικό παλμό ο παρονομαστής T ήταν **όλη** η διάρκεια!

- **Σήματα**
- **Η κρουστική συνάρτηση Δέλτα**
- Ο τετραγωνικός παλμός είδαμε ότι έχει διάρκεια $T > 0$ και πλάτος A
- Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ, ***αλλά με σταθερό μοναδιαίο εμβαδό***, τι θα κάναμε?
  - Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία
- Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \longrightarrow$$

*



Εμβαδό: Βάση x Ύψος = $\epsilon \cdot \frac{1}{\epsilon}$ = 1 !

διάρκειας ϵ και πλάτους $1/\epsilon$
  - ...και θα στέλναμε το ϵ στο μηδέν: $\lim_{\epsilon\to 0} p(t)$
- Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος $1/\epsilon$
- Όμως το εμβαδόν του θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαίο! : $\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)dt = 1$ *

ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ