HY215

Διάλεξη 3η

Καρτεσιανή μορφή

- $z = a + jb$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{cases}$$

Πολική μορφή.

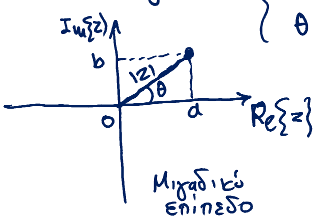
$$z = |z| \cdot e^{j\theta}$$

Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$



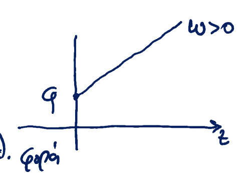
De Moivre: $z^N = (a+jb)^N = (|z| \cdot e^{j\theta})^N = |z|^N \cdot e^{jN\theta} = |z|^N (\cos N\theta + j\sin N\theta)$

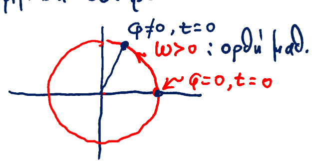
Έστω τώρα $z = |z| \cdot e^{j\theta}$ απλά ένας αριθμός στο μιγαδικό επίπεδο.

έστω $|z| = 1$ για απλούστευση.

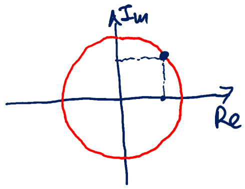
$\theta(t) = \omega t + \varphi$ γραμμική συνάρτ. ως t

που θα βρίσκεται το z $\forall t$





Αν $\omega < 0$ αντίθετη από τη μαθ. φορά



$$z(t) = e^{j\theta(t)} \longrightarrow z(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi) + j\sin(\omega_0 t + \varphi) = Re\{z(t)\} + j\,Im\{z(t)\}$$

$\theta(t) = \omega_0 t + \varphi$ → φάση; φ ← φάση μετατόπισης

$\dfrac{d\theta(t)}{dt} = \omega_0$ ← κυκλική συχ.

$$z(t) = z(t+T_0)$$

$$z(t+T_0) = \cos(\omega_0(t+T_0)+\varphi) + j\sin(\omega_0(t+T_0)+\varphi) = \cos(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \varphi) + j\sin(\omega_0 t + \omega_0 T_0 + \varphi)$$

Για να είναι περιοδικό: $\omega_0 T_0 = 2\pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}\cdot k$

$k=1$: Θεμελ. περίοδο $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, $\omega_0 = 2\pi f_0$ $\Rightarrow T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

$2\pi \to$ rad
$\omega_0 \to$ rad/sec | $T_0 \to$ sec
$f_0 \to Hz = \frac{1}{sec}$

Υπολογίστε το άθροισμα:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_0 t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\cos(2\pi f_0 t - \tfrac{\pi}{2}) =$$

$$= Re\{A\cdot e^{j2\pi f_0 t}\} + Re\{B\cdot e^{-j\pi/2} e^{j2\pi f_0 t}\} \overset{Re\{\}:\text{ γραμμ. τελεστής}}{=}$$

$$= Re\{A\cdot e^{j2\pi f_0 t} + B\cdot e^{-j\pi/2} e^{j2\pi f_0 t}\} = Re\{(A - jB)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\} = Re\{\sqrt{A^2+B^2}\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$e^{-j\pi/2} = -j$; $(A - jB)$: Phasor

$$\left(A - jB = \sqrt{A^2+B^2}\cdot e^{j\varphi}, \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{-B}{A} \right)$$

$$= Re\{\sqrt{A^2+B^2}\cdot e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\} = \sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Ένα ημίτονο:

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$
$= Re\{A e^{j\varphi}\cdot e^{j2\pi f_0 t}\}$

- A πλάτος
- f_0 συχνότητα
- φ φάση (μετατόπισης)
- $(2\pi f_0 t + \varphi)$ φάση

$T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

$T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$\omega_0 = 2\pi f_0$

$x(t) = x(t+T_0)$
T_0 περίοδος.

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} Re\{\underbrace{A_k e^{j\varphi_k}}_{\text{phasor αριθμοί } X_k} \cdot \underbrace{e^{j\omega_k t}}_{\text{συναρτήσεις } \psi_k(t)}\} = \sum_{k=1}^{N} Re\{X_k \cdot \psi_k(t)\}$$

<u>N=2</u>: $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$

Είναι περιοδικό?

$x(t) = x(t+T_0) \Rightarrow A_1 \cos(2\pi f_1 (t+T_0) + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 (t+T_0) + \varphi_2) = x(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 \cos(2\pi f_1 t + 2\pi f_1 T_0 + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + 2\pi f_2 T_0 + \varphi_2) = x(t)$

$$\left.\begin{aligned} 2\pi f_1 T_0 = 2\pi k &\Rightarrow T_0 = \frac{k}{f_1} \\ 2\pi f_2 T_0 = 2\pi \ell &\Rightarrow T_0 = \frac{\ell}{f_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{k}{f_1} = \frac{\ell}{f_2} \Rightarrow \boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{k}{\ell}}$$

<u>Παράδειγμα</u>: ① $x(t) = 2\cos(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t + \frac{\pi}{3}) - 3\sin(2\pi \underbrace{250}_{f_2} t - \frac{\pi}{4})$ — **Είναι περιοδικό.**

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{100}{250} = \frac{10}{25}$$

② $x(t) = 2\cos(2\pi \underbrace{100}_{f_1} t + \frac{\pi}{3}) - 3\sin(200t - \frac{\pi}{4})$ — **ΔΕΝ είναι περιοδικό.**

$f_1 = 100$

$f_2 = \frac{100}{\pi}$

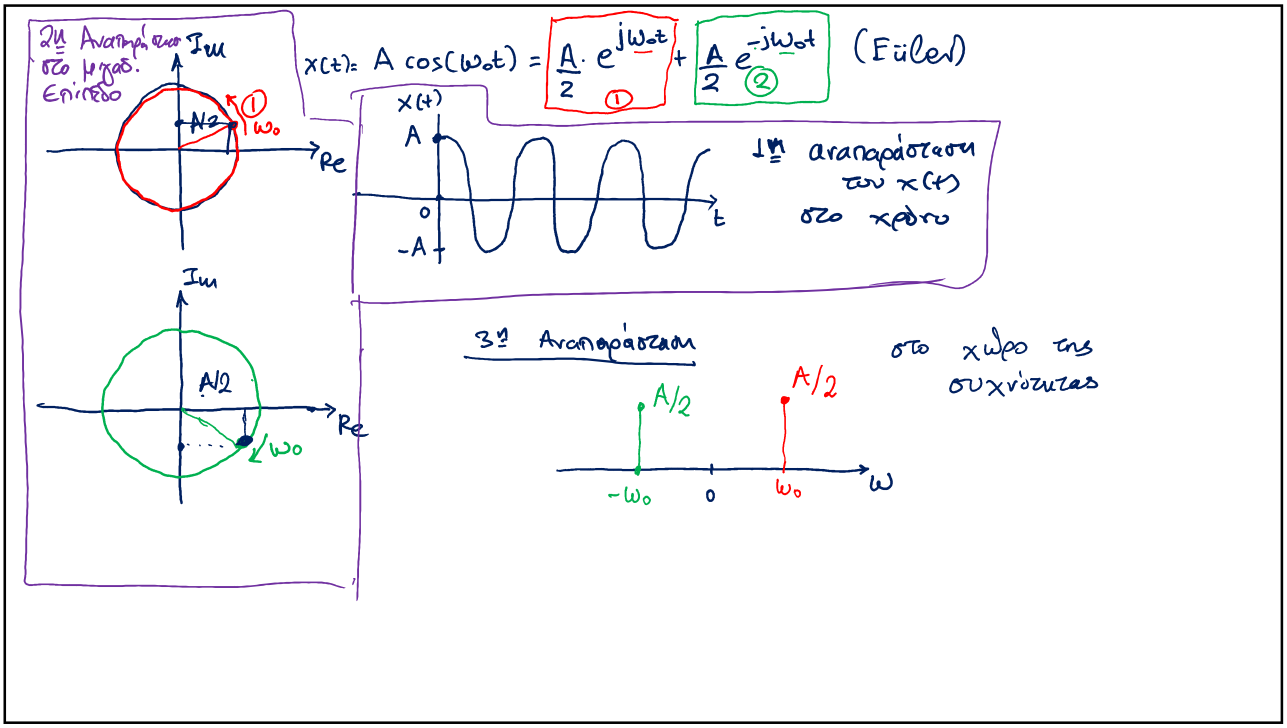
Ποια είναι η περίοδος στο ①: $f_0 = ΜΚΔ\{f_1, f_2\} = ΜΚΔ\{100, 250\} = 50Hz$

$T_0 = ΕΚΠ\{T_1, T_2\}$ $\qquad T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{50}$ sec.

③ $x(t) = A_1 \cos(\frac{2\pi}{100} t + \frac{\pi}{3}) + A_2 \cos(\frac{2\pi}{50} t + \frac{\pi}{4})$ — **Είναι περιοδικό με $T_0 = 100$**

$T_1 = 100$, $T_2 = 50$ $\qquad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$ΕΚΠ\{T_1, T_2\} = 100$


2η Αναπαράσταση στο μιγαδ. Επίπεδο
Im
Re
A/2
ω0
x(t)= A cos(ω0t) = A/2 · e^{jω0t} + A/2 e^{-jω0t}
(Euler)
x(t)
A
0
-A
t
1η αναπαράσταση του x(t) στο χρόνο
3η Αναπαράσταση
στο χώρο της συχνότητας
-ω0
ω