

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Μια εισαγωγή στο μάθημα ***HY215-Εφαρμοσμένα Μαθηματικά  
για Μηχανικούς***

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζής  
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης  
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

1 Φεβρουαρίου 2017

## 1 Λίγα λόγια ως εισαγωγή...

Καλωσήρθατε στο μάθημα *HY215-Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς!* Το μικρό αυτό εισαγωγικό κεφάλαιο προσδοκά να σας δώσει μια γενική ιδέα σχετικά με το μάθημα, αλλά και σχετικά με τον πολύ ενδιαφέρον ευρύτερο τομέα της *Επεξεργασίας Σήματος* (στον οποίο ανήκει το μάθημα - αλλά όχι μόνο σε αυτόν).

Ένας άλλος σκοπός είναι να αποτινάξει από πάνω σας (όσο αυτό είναι εφικτό :-)) το φόβο ενός “μαθηματικοειδούς” μαθήματος. Η εμπειρία αρκετών χρόνων των διδασκόντων καταδεικνύει ότι οι φοιτητές “φοβούνται” και δυσκολεύονται αρκετά στο μάθημα αυτό, πράγμα που οφείλεται περισσότερο στα αρκετά - αλλά σχετικά “αθώα” - μαθηματικά που περιέχει, και λιγότερο στην αντικειμενική δυσκολία του. Φυσικά ο φόβος αυτός δε θα εξαλειφθεί από ένα μικρό εισαγωγικό κείμενο, αλλά σίγουρα μπορεί να σας προκαλέσει να δείτε κάποια πράγματα από διαφορετική οπτική γωνία. Πολλές φορές το ενδιαφέρον ενός φοιτητή για ένα επιστημονικό αντικείμενο αυξάνεται όταν του αποκαλυφθεί η “μεγαλύτερη εικόνα”, κομμάτι της οποίας αποτελεί ένα εισαγωγικό μάθημα όπως το *HY215*. Δεν είναι λίγες οι φορές που έχουμε ακούσει από φοιτητές τη φράση “τι τα χρειαζόμαστε αυτά; Εμείς Πληροφορική ήρθαμε να σπουδάσουμε, όχι Μαθηματικά!”. Σίγουρα η χρησιμότητα ενός τέτοιου μαθήματος δεν είναι προφανής, όπως για παράδειγμα του *HY120-Ψηφιακή Σχεδίαση*, ή του *HY150-Προγραμματισμός*. Ιδέα της δημιουργίας αυτού που διαβάζετε τώρα είναι να σας δείξει τι κρύβεται πίσω, στο background, στα παρασκήνια, ενός τέτοιου μαθήματος, και να σας δείξει ότι αποτελεί τη βάση για πολύ όμορφα, διαφορετικά, και ενδιαφέροντα πράγματα (ναι, σε ένα τμήμα Η/Υ υπάρχουν κι άλλα πράγματα να δει κανείς εκτός από software και hardware :-)), που ίσως νομίζετε ότι δεν έχουν καμία σχέση με Μαθηματικά. Αν θα πετύχουμε αυτό το σκοπό, θα φανεί στο τέλος του εξαμήνου ή στη συνέχεια των σπουδών σας. Προς το παρόν, θέλουμε απλά να κεντρίσουμε το ενδιαφέρον σας. :-)

## 2 Μπαίνοντας στο θέμα...

Ο τίτλος, λοιπόν, του μαθήματος είναι *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς*. Στα πανεπιστήμια του εξωτερικού, το αντίστοιχο μάθημα συνηθίζεται να λέγεται *Σήματα και συστήματα* (Signals and Systems), και η αντίστοιχη βιβλιογραφία τιλοφορείται παρόμοια. Ακόμα ένας άλλος τίτλος θα μπορούσε να είναι *Επεξεργασία Σήματος Συνεχούς Χρόνου* (Continuous Time Signal Processing). Παίρνοντας αφορμή απ'τους εναλλακτικούς αυτούς τίτλους, ας δούμε πρώτα τι είναι ένα *σήμα*.

Ο όρος *σήμα* ορίζει γενικά κάτι που μεταφέρει πληροφορία. Σήματα, για παράδειγμα, μπορούν να φέρουν πληροφορία για την κατάσταση ή τη συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος. Σήματα χρησιμοποιούνται για την μεταφορά πληροφορίας μεταξύ ανθρώπων ή μεταξύ ανθρώπου και μηχανής. Ναι, σωστά φανταστήκατε, η φωνή είναι ένα σήμα. Όπως και ο ήχος, το βίντεο, η εικόνα (αυτά θα μας απασχολήσουν κατά κύριο λόγο), τα σήματα καπνού, οι χειρονομίες, και το άρωμα των λουλουδιών. Το ανθρώπινο σώμα καθοδηγείται από χημικά σήματα. Οι μέλισσες επικοινωνούν μέσω ενός “προτύπου χορού”, στέλνοντας με αυτό τον τρόπο σήματα η μια στην άλλη. Η μεταβολή της έντασης του φωτός σε μια οπτική ίνα είναι επίσης ένα σήμα. Σκεφτείτε το λίγο. Όλοι μας “επιπλεύουμε” σε μια θάλασσα από σήματα. Από τον πιο μικρό ζωντανό οργανισμό, μέχρι τον πιο περίπλοκο, όλοι μας δεχόμαστε και επεξεργαζόμαστε σήματα. Αν και, όπως βλέπετε, τα σήματα μπορούν να πάρουν διάφορες “μορφές”, σε όλες τις περιπτώσεις η πληροφορία περιέχεται σε ένα σχήμα από μεταβολές (μεταβολή του ήχου, της εικόνας, της έντασης, κλπ). Τα σήματα εκφράζονται με μαθηματική μορφή ως συναρτήσεις μιας (μονοδιάστατα σήματα: ήχος, φωνή) μεταβλητής ή περισσότερων (πολυδιάστατα σήματα: εικόνα, βίντεο). Για παράδειγμα, ένα σήμα φωνής αναπαρίσταται μαθηματικά ως μια συνάρτηση του χρόνου, και μια φωτογραφική εικόνα αναπαρίσταται ως μια συνάρτηση φωτεινότητας σε ένα χώρο δυο διαστάσεων - μήκος και πλάτος.

Περισσότερα για τα σήματα θα δείτε στα σχετικά μαθήματα - την πρώτη όμως “κρουάδα” θα την πάρετε στο HY215. :) Αυτό το μάθημα αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία θα “χτίσετε” για να μάθετε -όσοι επιθυμείτε- περισσότερα σχετικά με την Επεξεργασία Σήματος, τα Δίκτυα, τις Τηλεπικοινωνίες, και πολλά άλλα. Καταλαβαίνετε λοιπόν το πόσο σημαντικό είναι ένα τέτοιο μάθημα, καθώς αποτελεί το σκελετό επιστημών που σχετίζονται με πράγματα που τα βλέπουμε στην καθημερινότητά μας! Ας πούμε όμως μερικά ακόμα πράγματα σχετικά, για να μπαίνετε περισσότερο στο πνεύμα. :-)

Το μάθημα λοιπόν περιλαμβάνει επιγραμματικά τα εξής:

1. **Μιγαδικοί αριθμοί:** Θα ξεκινήσουμε με μια γρήγορη επανάληψη και επέκταση εννοιών που σχετίζονται με τους μιγαδικούς αριθμούς. Οι μιγαδικοί αριθμοί θα είναι το βασικό μας εργαλείο στη μελέτη μας, γιατί οι πράξεις μαζί τους είναι πολύ πιο εύκολες από τις αντίστοιχες χωρίς μιγαδικούς αριθμούς. Άλλωστε αυτή είναι όλη η χρησιμότητα των μιγαδικών αριθμών - να μας διευκολύνουν!
2. **Σήματα - Συστήματα:** Στη συνέχεια, θα εξηγήσουμε αναλυτικά τον όρο “σήμα”, θα εισάγουμε μερικά πολύ βασικά σήματα, και θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές πράξεις μεταξύ σημάτων. Θα ορίσουμε τις έννοιες των συστημάτων ως σχέσεις εισόδου-εξόδου, κυρίως μέσα από διαφορικές εξισώσεις. Θα μάθουμε να υπολογίζουμε την έξοδο οποιουδήποτε συστήματος (που πληρεί κάποιες προϋποθέσεις) στο πεδίο του χρόνου, χρησιμοποιώντας την πράξη της *συνέλιξης*.
3. **Σειρές Fourier - Ιδιότητες:** Μετά από λίγες εισαγωγικές έννοιες, που θα σας θυμίσουν τους όρους “συχνότητα”, “πλάτος”, “φάση”, τις οποίες πρωτακούσατε στη Φυσική του Λυκείου, μαθαίνετε πως να γράφετε μια περιοδική συνάρτηση/σήμα ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων. Περιοδική λέγεται μια άπειρης διάρκειας συνάρτηση του χρόνου η οποία επαναλαμβάνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα. Αν μια οποιαδήποτε (ή μάλλον, σχεδόν οποιαδήποτε - για να μη λέμε και ψέμματα :-)) περιοδική συνάρτηση  $x(t)$  μπορεί να γραφεί ως άθροισμα κάποιων ημιτόνων ή συνημιτόνων με συγκεκριμένα πλάτη και συχνότητες, τότε μπορεί κανείς να πει ότι το σήμα  $x(t)$  **αποτελείται από** ή **περιέχει** αυτά τα ημίτονα ή συνημίτονα, άρα ουσιαστικά **περιέχει** αυτές τις συχνότητες! Το εργαλείο που θα σας δώσει

την αναπαράσταση αυτή λέγεται **Ανάπτυγμα σε Σειρά Fourier**. Αν το σκεφτείτε λίγο, ίσως αντιληφθείτε ότι η χρησιμότητα μιας τέτοιας διαδικασίας έγκειται στο ότι περιγράφει ένα περιοδικό σήμα με λίγους μόνο αριθμούς (συχνότητες, πλάτη, και φάσεις των ημιτόνων). Δεν είναι λάθος μια τέτοια σκέψη, αλλά το σημαντικότερο είναι ότι η αναπαράσταση σε σειρά Fourier μας δίνει πληροφορία για μια άλλη αναπαράσταση του σήματος, την αναπαράσταση στο χώρο της συχνότητας! Γνωρίζετε ασφαλώς όλοι/ες σας για την αναπαράσταση ενός σήματος (δηλ. συνάρτησης) στο χώρο του χρόνου. Γνωρίζετε, για παράδειγμα, τον κυματισμό που κάνει η γραφική παράσταση ενός ημιτόνου  $\sin(t)$ , όταν το αναπαριστούμε ως προς  $t$ . Στα πλαίσια του μαθήματος, θα μάθετε μια νέα αναπαράσταση, στην οποία ο οριζόντιος άξονας θα είναι οι συχνότητες και ο κατακόρυφος τα πλάτη (ή η φάσεις) των ημιτόνων που αποτελούν το σήμα. Η αναπαράσταση αυτή λέγεται “φάσμα” και θα σας φανεί πολύ χρήσιμη! Ας σημειωθεί ότι αυτές οι συχνότητες των ημιτόνων που συζητάμε, δεν είναι τυχαίες: είναι όλες ακέραιες πολλαπλάσιες μιας συγκεκριμένης, η οποία λέγεται και “θεμελιώδης” συχνότητα και σχετίζεται άμεσα με την περίοδο του περιοδικού σήματος.

4. **Μετασχηματισμός Fourier - Ιδιότητες:** Στην πράξη όμως, περιοδικά σήματα με την αυστηρή έννοια του όρου δεν υπάρχουν. Μάλιστα, τα περισσότερα σήματα που υπάρχουν στη φύση είναι μη περιοδικά. Κάπως πρέπει να μπορούμε να βρούμε το συχνοτικό περιεχόμενο και τέτοιων σημάτων. Μέσα από μια πολύ όμορφη επέκταση των σειρών Fourier, μαθαίνετε το **Μετασχηματισμό Fourier**, που αφορά μη περιοδικά σήματα (αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για περιοδικά σήματα, όπως θα δείτε). Ανάλογα, ο μετασχηματισμός Fourier δίνει την ίδια πληροφορία που δίνει η σειρά Fourier για τα περιοδικά σήματα: αποκαλύπτει ποιές συχνότητες περιέχονται στα μη περιοδικά σήματα. Η χρησιμότητα του μετασχηματισμού Fourier βρίσκεται πραγματικά ΠΑΝΤΟΥ, από την Αστροφυσική, την Οικονομία, και τη Χημεία, μέχρι τις Βάσεις Δεδομένων, τα Ραντάρ, και τη Σχεδίαση Κεραιών! :-)
5. **Μετασχηματισμός Laplace - Ιδιότητες:** Στην πορεία του μαθήματος, θα δείτε ότι υπάρχουν σήματα για τα οποία ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει. Αυτό το κενό έρχεται να συμπληρώσει ο **μετασχηματισμός Laplace**, ο οποίος έχει σημαντικές εφαρμογές στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου και στη Σχεδίαση Ψηφιακών-από-Αναλογικά Φίλτρων (μεταξύ πολλών άλλων). Ο μετασχηματισμός Laplace δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια επέκταση του μετασχηματισμού Fourier, ή αλλιώς, ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια υποπερίπτωση του μετασχηματισμού Laplace - αν και δεν είναι πάντα έτσι τα πράγματα... :-)
6. **Συσχετίσεις και Φασματικές Πυκνότητες:** Έχοντας το πολύ σημαντικό εργαλείο των μετασχηματισμών, μπορούμε να αρχίσουμε να μελετάμε συναρτήσεις *ομοιότητας* μεταξύ σημάτων. Πολλά συστήματα (μεταξύ των οποίων ο ανθρώπινος εγκέφαλος) εκτελούν την πράξη της συσχέτισης για να βρουν ομοιότητες μεταξύ φαινομενικά άσχετων σημάτων. Το κεφάλαιο αυτό εισάγει το φοιτητή στις έννοιες της **Συσχέτισης**, καθώς και του μετασχ. Fourier τους, ο οποίος ονομάζεται **Φασματική Πυκνότητα**.
7. **Τυχαία Σήματα:** Μια μικρή εισαγωγή στα **τυχαία σήματα**, που ουσιαστικά είναι σήματα που δεν έχουν πραγματοποιηθεί ακόμα. Ίσως σας ξενίζει το γεγονός ότι ασχολούμαστε με κάτι που δεν έχει πραγματοποιηθεί ακόμα, με κάτι που ουσιαστικά δεν υπάρχει! Όμως και οι μιγαδικοί αριθμοί δεν υπάρχουν - αν έχει κανείς 1000 + i500 ευρώ στην τράπεζα, να μας το πει! :-) - αλλά τόσα βιβλία έχουν γραφτεί, ενώ και οι εφαρμογές τους είναι αμέτρητες. Έτσι και με τα τυχαία σήματα, μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα μελετώντας τα, χρησιμοποιώντας φυσικά τις *στατιστικές ιδιότητές* τους. Για παράδειγμα, η τηλεπικοινωνιακή διαδικασία είναι μια καθαρά στατιστική διαδικασία. Το γιατί, είναι προφανές όταν σκεφτείτε ότι ΔΕΝ μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ΟΛΑ τα σήματα που θα μεταδοθούν μέσω ενός καναλιού. Μπορούμε όμως, κάνοντας εύλογες υποθέσεις, να βγάλουμε συμπεράσματα μέσω των στατιστικών ιδιοτήτων τους (μέση τιμή, διασπορά, τυπική απόκλιση, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κλπ). Ουσιαστικά, το κεφάλαιο αυτό είναι μια πολύ μικρή εισαγωγή στα Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα και στον τρόπο που δουλεύουν - κι ας μην του φαίνεται! :-)

8. **Δειγματοληψία:** Κλείνετε μελετώντας τη μετατροπή του αναλογικού σήματος σε σήμα διακριτού χρόνου (ΟΧΙ ψηφιακό!). Για να μπορεί να επεξεργαστεί ένας Η/Υ ένα σήμα, πρέπει να μπορεί να μετατραπεί από σήμα αναλογικού χρόνου σε διακριτού χρόνου. Η μετατροπή αυτή γίνεται με τη διαδικασία της **Δειγματοληψίας** και αποτελεί την εισαγωγή στην *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*. Κεντρικό ρόλο στο θέμα της Δειγματοληψίας παίζει το γνωστό (όχι ακόμα σε σας :-)) *Θεώρημα του Shannon*. Σε αδρές γραμμές, το θεώρημα αυτό μας πληροφορεί για το πόσο συχνά πρέπει να παίρνουμε δείγματα (τιμές) από μια συνεχή συνάρτηση-σήμα, ώστε να την κάνουμε διακριτή, αλλά να μπορούμε μετά να την ανακατασκευάσουμε από τα δείγματά της. Με άλλα λόγια, μας περιγράφει το γιατί μπορούμε να ακούμε μουσική από ένα CD Player! :-)<sup>1</sup>

Όλα αυτά λοιπόν συνιστούν το “εναρκτήριο λάκτισμα” για έναν τομέα ιδιαίτερα ενδιαφέρον, που όπως προείπαμε, λέγεται *Επεξεργασία Σήματος - Signal Processing*. Η πλούσια ιστορία και οι μελλοντικές υποσχέσεις του τομέα της Επεξεργασίας Σήματος προέρχονται από μια δυνατή συνεργασία μεταξύ αυξανόμενα περίπλοκων εφαρμογών, νέων θεωρητικών εξελίξεων, και συνεχώς αναδυόμενων νέων αρχιτεκτονικών στον τομέα του υλικού (hardware). Εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος περιλαμβάνουν έναν αχανή χώρο ο οποίος περιλαμβάνει τους τομείς της **διασκέδασης** (entertainment), των **επικοινωνιών** (communications), της **εξερεύνησης του διαστήματος** (space exploration), της **ιατρικής** (medicine), της **αρχαιολογίας** (archaeology), της **γεωφυσικής** (geophysics), απλά για να αναφέρουμε μερικούς. Αλγόριθμοι και υλικό επεξεργασίας σήματος κυριαρχούν σε ένα ευρύ πεδίο συστημάτων, από υψηλής εξειδίκευσης στρατιωτικά συστήματα και βιομηχανικές εφαρμογές, μέχρι χαμηλού κόστους, υψηλής κατανάλωσης ηλεκτρονικά συστήματα του εμπορίου.

Αν και συνήθως παίρνουμε ως δεδομένη την εκπληκτική επίδοση των συστημάτων πολυμέσων, όπως το βίντεο υψηλής ποιότητας (high definition video), ο ήχος υψηλής πιστότητας (high fidelity audio), και τα διαδραστικά παιχνίδια (interactive games), αυτά τα συστήματα πάντα βασίζονταν σε μεγάλο βαθμό σε τελευταίας τεχνολογίας επεξεργασία σήματος. Εξελιγμένοι επεξεργαστές ψηφιακού σήματος βρίσκονται στον πυρήνα όλων των μοντέρνων κινητών τηλεφώνων. Το πρότυπο εικόνας και ήχου MPEG, καθώς και το πρότυπο συμπίεσης εικόνας JPEG βασίζονται πολύ σε γνωστές αρχές και τεχνικές επεξεργασίας σήματος. Οι συσκευές αποθήκευσης υψηλής πυκνότητας και οι νέες μνήμες στερεάς κατάστασης (solid state memories) δουλεύουν επειδή ακριβώς υπάρχουν τεχνικές επεξεργασίας σήματος που επιτρέπουν την παροχή συνέπειας και ευρωστίας σε, κατά τα άλλα, εύθραυστες τεχνολογίες. Καθώς κοιτάζουμε προς το μέλλον, είναι εμφανές ότι ο ρόλος της Επεξεργασίας Σήματος επεκτείνεται, οδηγούμενος εν μέρει από τη σύγκλιση των Τηλεπικοινωνιών, των Υπολογιστών, και της Επεξεργασίας Σήματος, τόσο στην καταναλωτική αρένα όσο και στις προχωρημένες βιομηχανικές και κυβερνητικές εφαρμογές.

### 3 Εφαρμογές - Μια γρήγορη ματιά

Ο αυξανόμενος αριθμός των εφαρμογών και η απαίτηση για εξελιγμένους αλγορίθμους πάνε χέρι-χέρι με την ταχύτερη ανάπτυξη τεχνολογικών συσκευών για υλοποίηση συστημάτων επεξεργασίας σήματος. Σύμφωνα με εκτιμήσεις, η ικανότητα επεξεργασίας τόσο των εξειδικευμένων μικροεπεξεργαστών σήματος όσο και τον προσωπικών υπολογιστών πιθανότατα θα αυξηθεί κατά πολλές τάξεις μεγέθους στα επόμενα 10 χρόνια. Ξεκάθαρα, ο ρόλος και η σημασία της Επεξεργασίας Σήματος θα συνεχίσει να επεκτείνεται σε αυξανόμενους ρυθμούς στο μέλλον.

Η Επεξεργασία Σήματος έχει να κάνει με την αναπαράσταση, το μετασχηματισμό, και τη χειραγώγηση σημάτων και της πληροφορίας που αυτά περιέχουν. Εδώ θα δούμε μερικά παραδείγματα, για να καταλάβετε καλύτερα περί τίνος πρόκειται - φυσικά δε θα επεκταθούμε σε βάθος...

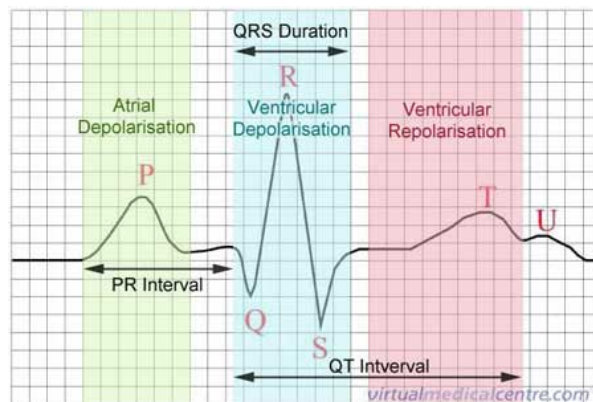
<sup>1</sup>Για όσους αναρωτήθηκαν, η Δειγματοληψία σε συνδυασμό με τις διαδικασίες του Κβαντισμού (Quantization) και της Κατανομής Bit (Bit Allocation), μετατρέπουν ένα σήμα από αναλογικό σε πλήρως ψηφιακό.

### 3.1 Ηλεκτροκαρδιογραφήματα

Ας ξεκινήσουμε από τα λεγόμενα *βιολογικά* σήματα. Η ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς αναπαρίσται από το *Ηλεκτροκαρδιογράφημα* (Electrocardiography (ECG) Signal). Ένα τυπικό ηλεκτροκαρδιογράφημα φαίνεται στο Σχήμα 1α'. Το ηλεκτροκαρδιογράφημα είναι (προσεγγιστικά) ένα περιοδικό σήμα - θυμηθείτε την



(α) Ηλεκτροκαρδιογράφημα



(β) Μια περίοδος του ηλεκτροκαρδιογραφήματος

Σχήμα 1: Στοιχεία Ηλεκτροκαρδιογραφήματος

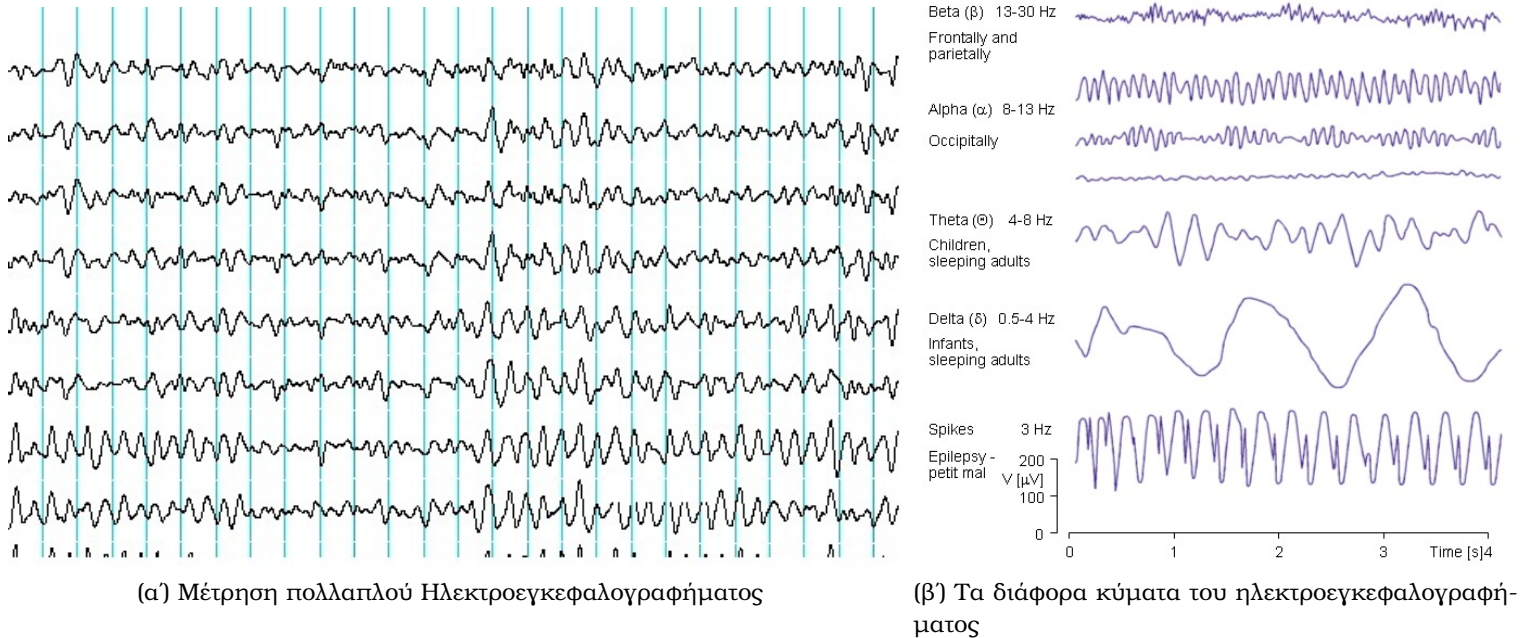
έννοια της περιοδικότητας: περιοδικό λέγεται ένα σήμα που επαναλαμβάνεται ανά τακτά διαστήματα. Μια τέτοια περίοδος του ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 1β', και αναπαριστά έναν κύκλο μεταφοράς του αίματος από την καρδιά στις αρτηρίες. Αυτό το τμήμα του σήματος παράγεται από μια ηλεκτρική διέγερση που προέρχεται από το φλεβόκομβο, στο δεξιό κόλπο της καρδιάς (ναι, χρειάζεται και λίγο Καρδιολογία για να τα μελετήσετε αυτά :-)). Η διέγερση αυτή προκαλεί συστολή των κόλπων, που ωθεί το αίμα σε κάθε κόλπο στις κοιλίες. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα ως το κύμα-P (P-wave). Ο κολποκοιλιακός κόμβος καθυστερεί τη διέγερση μέχρι να ολοκληρωθεί η μεταφορά του αίματος από τους κόλπους στις κοιλίες, με αποτέλεσμα το διάστημα P-R στο ηλεκτροκαρδιογράφημα. Η διέγερση μετά προκαλεί συστολή των κοιλιών, που προωθούν το αίμα στις αρτηρίες. Αυτή η διαδικασία παράγει το τμήμα QRS στο ηλεκτροκαρδιογράφημα. Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, οι κόλποι χαλαρώνουν και γεμίζουν με αίμα. Το κύμα-T (T-wave) της κυματομορφής αναπαριστά τη χαλάρωση των κοιλιών. Όλη αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται περιοδικά, ξανά και ξανά. Κάθε τμήμα του ηλεκτροκαρδιογραφήματος φέρει διάφορες πληροφορίες για τον ιατρό που αναλύει την κατάσταση της καρδιάς του ασθενούς. Για παράδειγμα, το πλάτος και ο χρόνος που συμβαίνει το κύμα-P και το τμήμα QRS δείχνουν την κατάσταση της καρδιακής μυϊκής μάζας.

Απώλεια πλάτους δείχνει μυϊκή ζημιά, ενώ αυξημένο πλάτος είναι ένδειξη μη ομαλών καρδιακών ρυθμών. Μεγάλη καθυστέρηση του κολποκοιλιακού κόμβου καταδεικνύεται από ένα μακρύ διάστημα P-R. Παρόμοια, μερική ή ολική διακοπή των διεγέρσεων συστολής αντανακλάται από διακοπτόμενο συγχρονισμό μεταξύ των κυμάτων R και QRS. Οι περισσότερες από αυτές τις ανωμαλίες μπορούν να θεραπευτούν με διάφορα φάρμακα, και η αποτελεσματικότητα αυτών μπορεί να εμποτευθεί με την παρακολούθηση του νέου ηλεκτροκαρδιογραφήματος, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

Στην πράξη, υπάρχουν διαφόρων ειδών εξωτερικές παρεμβολές που αλλοιώνουν το ηλεκτροκαρδιογραφικό σήμα. Αν αυτές οι παρεμβολές δεν αφαιρεθούν, είναι δύσκολο για έναν ιατρό να κάνει σωστή διάγνωση. Μια κοινή πηγή θορύβου είναι οι γραμμές ρεύματος των 60 Hz που χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση του καρδιογραφήματος. Άλλες πηγές παρεμβολών είναι τα ηλεκτρομυογραφικά σήματα, που είναι διαφορές δυναμικού που αναπτύσσονται με τη συστολή των μυών. Αυτές όλες οι παρεμβολές μπορούν να αφαιρεθούν με διάφορες τεχνικές επεξεργασίες σήματος. Μπορείτε να τις διδαχθείτε στο σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα *HY528-Εισαγωγή στη Βιοϊατρική Τεχνολογία και στην Ανάλυση Ιατρικών Σημάτων*.

### 3.2 Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα

Το σύνολο της ηλεκτρικής δραστηριότητας, που προκαλείται από την τυχαία εκपुरσοκρότηση δισεκατομμυρίων ανεξάρτητων νευρώνων στον εγκέφαλο, αναπαρίσταται από το *ηλεκτροεγκεφαλογράφημα* - Electroencephalographic Signal - EEG. Σε πολλαπλές εγγραφές ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων, ηλεκτρόδια τοποθετούνται σε διάφορες θέσεις στο κρανίο, με δυο κοινά ηλεκτρόδια να βρίσκονται στους λοβούς των αυτιών, και οι διαφορές δυναμικού ανάμεσα στα διάφορα ηλεκτρόδια καταγράφονται. Ένα τυπικό εύρος ζώνης (θα μάθετε τι είναι αυτό :-) ) τέτοιων εγκεφαλογραφημάτων κυμαίνεται από 0.5 ως 100Hz, και τα πλάτη κυμαίνονται από 2 ως 100mV. Ένα παράδειγμα πολλαπλής μέτρησης εγκεφαλογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 2α'. Τεχνικές



Σχήμα 2: Στοιχεία Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

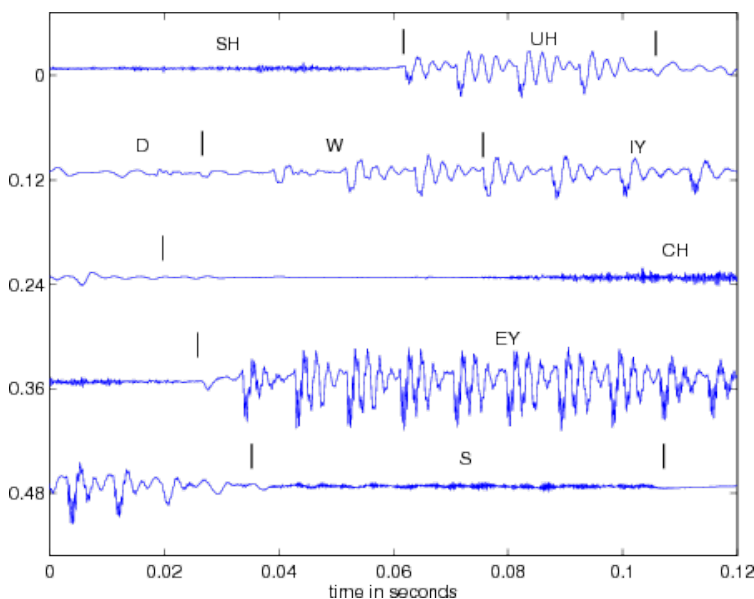
ανάλυσης τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και στο χώρο της συχνότητας έχουν αναπτυχθεί για τη διάγνωση της επιληψίας, διαταραχές του ύπνου, ψυχιατρικές διαταραχές, κλπ. Γι' αυτό το σκοπό, το φάσμα (κι αυτό θα μάθετε τι είναι :-) ) του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος χωρίζεται στις ακόλουθες πέντε περιοχές: (1) την περιοχή Δέλτα, που καλύπτει το εύρος από 0.5 ως 4Hz, (2) την περιοχή Θήτα, που καλύπτει το εύρος από 4 ως 8Hz, (3) την περιοχή Άλφα, που καλύπτει το εύρος από 8 ως 13Hz, (4) την περιοχή Βήτα, που καλύπτει το εύρος από 13 ως 22Hz, και (5) την περιοχή Γάμμα, που καλύπτει το εύρος από 22 ως 30Hz. Τα σήματα στο χρόνο που αντιστοιχούν σε αυτές τις περιοχές φαίνονται στο Σχήμα 2β'.

Το σήμα Δέλτα εμφανίζεται κανονικά σε παιδιά και ενήλικες κατά τη διάρκεια του ύπνου. Αν εμφανιστεί σε ενήλικα σε άγρυπνη κατάσταση, είναι ένδειξη συγκεκριμένων εγκεφαλικών ασθενειών. Το σήμα Θήτα συνήθως απαντάται σε παιδιά, αν και έχει εμφανιστεί και σε άγρυπνους ενήλικες. Το σήμα Άλφα είναι κοινό σε όλους τους φυσιολογικούς ανθρώπους και είναι περισσότερο εμφανές σε χαλαρούς, άγρυπνους ενήλικες με κλειστά μάτια. Παρόμοια, το σήμα Βήτα είναι παρατηρήσιμο σε φυσιολογικούς ενήλικες. Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα παρουσιάζει ταχεία, χαμηλής έντασης κύματα, που λέγονται κύματα REM - Rapid Eye Movement, σε ένα άτομο που ονειρεύεται όταν κοιμάται. Το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα ενός επιληπτικού ασθενούς παρουσιάζει διαφόρων ειδών ανωμαλίες, ανάλογα με τον τύπο της επιληψίας που προκαλείται από μη ελεγχόμενες νευρικές διαταραχές. Όπως καταλαβαίνετε, κάποιος που έχει την ικανότητα να εξάγει τα διάφορα σήματα με ακρίβεια, παρουσία θορύβου ή άλλων παρεμβολών, μέσα από την επεξεργασία τους, είναι ιδιαίτερα χρήσιμος! :-) Όπως προαναφέρθηκε, υπάρχει σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα που ασχολείται με τα βιολογικά σήματα (HY528).

### 3.3 Σήματα Φωνής

Η γραμμική ακουστική θεωρία της παραγωγής φωνής έχει οδηγήσει σε μαθηματικά μοντέλα για την αναπαράσταση των σημάτων φωνής. Ένα σήμα φωνής σχηματίζεται από τη διέγερση της φωνητικής οδού μέσω των φωνητικών χορδών και συνίσταται από δυο είδη ήχων: έμφωνους και άφωνους. Οι έμφωνοι ήχοι, που περιλαμβάνουν τα φωνήεντα και έναν αριθμό από σύμφωνα, όπως τα B,D,L,M,N,R, διεγείρονται από ένα κύμα αέρα που παράγεται από τους πνεύμονες και διαμορφώνεται από τις ανοιγοκλειόμενες φωνητικές χορδές. Από την άλλη, οι άφωνοι ήχοι παράγονται από την ελεύθερη διέλευση του αέρα μέσα από τις χαλαρές φωνητικές χορδές, διαμορφώνονται κυρίως από τη στοματική κοιλότητα, και περιλαμβάνουν ήχους όπως οι F, S, SH.

Ένα σήμα φωνής φαίνεται στο Σχήμα 3, το οποίο εικονίζει τη φράση *Should we chase*, σε διαδοχικές γραφικές παραστάσεις. Η συνολική διάρκεια του σήματος είναι 0.6 δευτερόλεπτα. Μπορείτε να παρατηρήσετε το φώνημα SH, στην αρχή της πρότασης, το οποίο έχει ακανόνιστη, “θορυβώδη” μορφή, και είναι σήμα υψηλής συχνότητας (αλλάζει πολύ γρήγορα στη μονάδα του χρόνου). Επίσης, δείτε το φώνημα I, το οποίο είναι χαμηλής συχνότητας σήμα (αλλάζει αργά στη μονάδα του χρόνου), με κάποια περιοδικότητα και ομοιομορφία. Το ίδιο ισχύει και για το φώνημα EY, όπως και όμοιο με το αρχικό φώνημα SH φαίνεται και το φώνημα CH και το φώνημα S. Η χρονική δομή τους είναι τέτοια που μας επιτρέπει να χωρίζουμε τα φωνήματα σε (σχεδόν) περιοδικά (quasi-periodic) και απεριοδικά (aperiodic). Έχει δειχθεί ότι τα σχεδόν περιοδικά σήματα μπορούν να αναπαρασταθούν από ένα άθροισμα πεπερασμένου αριθμού συνημιτόνων - ναι, τα γνωστά συνημίτονα που γνωρίζετε από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και ξαναείδατε στον Απειροστικό Λογισμό 1! Η χαμηλότερη συχνότητα ταλάντωσης αυτών των σημάτων λέγεται *θεμελιώδης συχνότητα* και η εύρεσή της με ακρίβεια αποτελεί ακόμα hot θέμα στην Επεξεργασία Φωνής. :-) Τα απεριοδικά σήματα δεν έχουν σταθερή χρονική δομή και μοιάζουν περισσότερο με θόρυβο, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Σχήμα 3: Το σήμα φωνής *Should we chase*

Εν γένει, μπορούμε να πούμε ότι στην Επεξεργασία Φωνής υπάρχουν δυο τάσεις, δυο “στρατόπεδα”: το πρώτο εξετάζει το σήμα φωνής με βάση το ανθρώπινο σύστημα παραγωγής φωνής: μια διέγερση που περνάει απ’τις φωνητικές χορδές, διατρέχει τη φωνητική οδό, φτάνει στη στοματική κοιλότητα, και διαμορφώνεται τελικά από τα χείλη. Βάση αυτής της διαδικασίας είναι το γνωστό μοντέλο Πηγής - Φίλτρου (source-filter model). Η χρήση αυτού του μοντέλου είναι άκρως χρήσιμη στην Ανάλυση Φωνής, στην Ανίχνευση Παθολογιών, στη μελέτη του ανθρώπινου συστήματος παραγωγής φωνής, και αλλού. Το άλλο “στρατόπεδο” βλέπει το σήμα της

φωνής ως μια απλή χρονοσειρά, χωρίς να πολυενδιαφέρεται για τον τρόπο παραγωγής της. Έτσι, το σήμα φωνής συνήθως μοντελοποιείται από ένα άθροισμα ημιτόνων με πλάτη και συχνότητες που μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου. Τέτοια μοντέλα περιλαμβάνουν το Ημιτονοειδές μοντέλο (Sinusoidal Model, SM), το Αρμονικό+Θόρυβος Μοντέλο (Harmonic Plus Noise Model, HNM - έχει αναπτυχθεί το 1995 από τον καθηγητή του τμήματος, Γιάννη Στυλιανού), το Προσαρμοσμένο Σχεδόν-Αρμονικό Μοντέλο (adaptive Quasi-Harmonic Model, aQHM - έχει αναπτυχθεί από τον πρώην διδακτορικό φοιτητή του τμήματος και μεταδιδακτορικό ερευνητή, Δρ. Γιάννη Πανταζή), το Εκτεταμένο Προσαρμοσμένο Σχεδόν-Αρμονικό Μοντέλο (extended adaptive Quasi-Harmonic Model, eaQHM - έχει αναπτυχθεί από τον υπογράφο), καθώς και το Προσαρμοσμένο Αρμονικό Μοντέλο (adaptive Harmonic Model, aHM - έχει αναπτυχθεί από το μεταδιδακτορικό ερευνητή Gilles Degottex κατά την παραμονή του εδώ πριν 2 χρόνια - τώρα βρίσκεται στο Πανεπιστήμιο του Cambridge). Τα προσαρμοσμένα Ημιτονοειδή Μοντέλα (adaptive Sinusoidal Models, aSMs) που προαναφέρθησαν είναι από τα καλύτερα που κυκλοφορούν παγκοσμίως σε ανάλυση σημάτων πολλαπλών συνιστωσών (multi-component signals), όπως είναι η φωνή.

Όπως καταλάβατε, μια από τις σπουδαιότερες εφαρμογές στην Επεξεργασία Σήματος είναι στη γενική περιοχή της Επεξεργασίας Φωνής (και είστε τυχεροί, έχουμε τέτοιο μάθημα στο πρόγραμμα σπουδών μας - HY578). Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην περιοχή αυτή χωρίζονται εν γένει σε τρεις κατηγορίες:

1. **Ανάλυση Φωνής.**
2. **Σύνθεση Φωνής,** και
3. **Ανάλυση και Σύνθεση Φωνής.**

Μέθοδοι Ανάλυσης Φωνής χρησιμοποιούνται στην **Αυτόματη Αναγνώριση Ομιλίας** (Automatic Speech Recognition), στην **Ταυτοποίηση Ομιλητή** (Speaker Verification), και στην **Αναγνώριση Ομιλητή** (Speaker Identification). Επίσης σχετικά πρόσφατα υπάρχουν εφαρμογές στην Ιατρική και στη ανίχνευση παθήσεων του συστήματος παραγωγής φωνής.

Εφαρμογές της Σύνθεσης Φωνής παρουσιάζονται στη **Μετατροπή Κειμένου σε Ομιλία** (Text-to-Speech Synthesis), και στην **Εξόρυξη Δεδομένων από Υπολογιστές σε μορφή ομιλίας** (Data Retrieval), μεταξύ άλλων.

Ένα παράδειγμα Ανάλυσης και Σύνθεσης Φωνής (3η κατηγορία) είναι η **Κρυπτογράφηση Φωνής** για ασφαλείς επικοινωνίες (Voice Scrambling for Secure Transmission). Ένα ακόμα παράδειγμα είναι η **Συμπίεση Φωνής** (Speech Compression), που χρειάζεται για τη γρήγορη και αποτελεσματική μετάδοση μέσω ενός μέσου. Ένα τρίτο παράδειγμα είναι η **Βελτίωση Φωνής** (Speech Enhancement), που αποσκοπεί στη βελτίωση της ποιότητας του σήματος της φωνής, με την έννοια του ότι γίνεται πιο καθαρά αντιληπτό στο αυτί μας. Ένα διασκεδαστικό παράδειγμα μπορείτε να βρείτε εδώ, όπου χρησιμοποιείται η πολύ απλή τεχνική της Φασματικής Αφαίρεσης (Spectral Subtraction) για την αφαίρεση του ενοχλητικότερου ήχου από τις βουβουζέλες στις μεταδόσεις του Παγκοσμίου Κυπέλλου Ποδοσφαίρου, που έγινε στη Νότια Αφρική, το 2010! :-) Ακούστε τη διαφορά! Να σημειωθεί ότι ο κώδικας που υλοποιεί τον αλγόριθμο δεν ξεπερνά τις 200 – 250 γραμμές. Αυτό δε σημαίνει βέβαια πως είναι εύκολο... :-)

Ένα τέταρτο, πολύ δημοφιλές παράδειγμα, είναι η **Τροποποίηση Φωνής** (Speech Modification), και η **Μετατροπή Φωνής** (Voice Conversion). Τροποποίηση φωνής ορίζεται ως η αλλαγή των διάφορων χαρακτηριστικών της φωνής ενός ατόμου, όπως η τονικότητα, ο ρυθμός άρθρωσης, η ένταση, και άλλα. Μετατροπή φωνής ορίζεται ως η αλλαγή των χαρακτηριστικών της φωνής ενός ομιλητή (source speaker) ώστε να φαίνεται ότι η φωνή προέρχεται από κάποιον άλλο, συγκεκριμένο, ομιλητή (target speaker). Μπορείτε εδώ να βρείτε και να ακούσετε παραδείγματα τροποποίησης φωνής (στην παράγραφο VTLN-Based Voice Conversion), που έχουν δημιουργηθεί με μια πολύ απλή τεχνική, που λέγεται Κανονικοποίηση του Μήκους της Φωνητικής Οδού (Vocal Tract Length Normalization). Μερικά από αυτά είναι αρκετά αστεία. :-) Φυσικά, τέτοιες τεχνικές, που βασίζονται σε αλλαγή ενός μόνο χαρακτηριστικού, δεν έχουν ιδιαίτερη ευελιξία, ούτε ιδιαίτερα καλή απόδοση. Το Ημιτονοειδές Μοντέλο, που ήδη αναφέραμε, έχει χρησιμοποιηθεί για τροποποίηση φωνής, με



αρκετά καλά αποτελέσματα. Ακόμα καλύτερα αποτελέσματα στο πεδίο της τροποποίησης φωνής έχει το Αρμονικό+Θόρυβος Μοντέλο, ενώ έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχώς και για μετατροπή φωνής (από έναν ομιλητή σε έναν άλλο). Πρόσφατα, τα προσαρμοσμένα Ημιτονοειδή Μοντέλα έδειξαν την ποιότητά τους σε τομείς όπως η **Ανίχνευση Συναισθήματος από Ομιλία** (Speech Emotion Detection), η ανίχνευση παθολογιών φωνής, και ο μετασχηματισμός φωνής.

Το Εργαστήριο Πολυμέσων που διαθέτει το τμήμα, σε συνεργασία με το Εργαστήριο Επεξεργασίας Σήματος του Ι.Τ.Ε, ασχολούνται ερευνητικά με θέματα όπως τα παραπάνω. Έχουμε την τύχη να διαθέτουμε στο τμήμα καθηγητές με σπουδαίο και διεθνώς αναγνωρισμένο ερευνητικό έργο στους τομείς αυτούς, και ειδικότερα στον τομέα της Ανάλυσης Φωνής, έχουμε κατασκευάσει state-of-the-art αλγορίθμους με εξαιρετικά αποτελέσματα.

### 3.4 Σήματα Ήχου/Μουσικής

Το ηλεκτρονικό συνθεσάιζερ είναι ένα παράδειγμα της χρήσης σύγχρονων τεχνικών επεξεργασίας σήματος στη μουσική. Ο φυσικός ήχος που παράγεται από τα περισσότερα μουσικά όργανα παράγεται, εν γένει, από μηχανικές δονήσεις που προκαλούνται από κάποιου είδους ταλαντωτή. Όλες αυτές οι δονήσεις μαζί σε ένα μουσικό όργανο παράγουν τη μουσική. Για παράδειγμα, σε ένα βιολί, ο κύριος ταλαντωτής είναι οι χορδές. Όταν κινούνται, κάνουν το ξύλινο σώμα του βιολιού να δονείται, το οποίο μετέπειτα προκαλεί δονήσεις στα μόρια του αέρα μέσα και έξω από το βιολί. Ο ήχος των οργάνων μπορεί να χωριστεί σε δυο κατηγορίες: σχεδόν περιοδικοί και απεριοδικοί ήχοι. Οι σχεδόν περιοδικοί ήχοι μπορούν να αναπαρασταθούν ως ένα άθροισμα από πεπερασμένου πλήθους συνημίτονα με μεταβαλλόμενα πλάτη και συχνότητες. Οι απεριοδικοί ήχοι συνηθίζεται να μοντελοποιούνται με κατάλληλη επεξεργασία λευκού θορύβου. Αρκετά μοντέλα ανάλυσης ήχου που χρησιμοποιούν παρόμοιο διαχωρισμό έχουν αναπτυχθεί στο παρελθόν, με αρκετή επιτυχία. Γνωστότερο όλων είναι το Ημιτονοειδές Μοντέλο (SM), που αναφέραμε και στην παράγραφο σχετικά με τη φωνή.

Ένας άλλος τομέας με αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον είναι η **Συμπίεση Ήχου** (Audio Compression). Ένα παράδειγμα που είναι γνωστό σε όλους σας είναι το πρότυπο ήχου MPEG-Layer III, το γνωστό MP3. Η συμπίεση ήχου στο MP3 επιτυγχάνεται με τη μείωση ή εξάλειψη συγκεκριμένων τμημάτων του ήχου, που θεωρείται ότι είναι εκτός της ακουστικής εμβέλειας των περισσότερων ανθρώπων. Αυτή η μέθοδος λέγεται **Αντιληπτική Κωδικοποίηση** (Perceptual Coding), και χρησιμοποιεί ψυχοακουστικά μοντέλα για να απορρίψει ή να μειώσει την ακρίβεια κομματιών ήχου που είναι λιγότερο αντιληπτά από την ανθρώπινη ακοή, και τα τμήματα που απομένουν καταγράφονται και κωδικοποιούνται με αποτελεσματικό τρόπο, επιτυγχάνοντας συμπίεση που φτάνει μέχρι και 11 φορές το μέγεθος του αρχικού σήματος (ένα CD ήχου περιέχει μουσική που έχει 44100 δείγματα ανά δευτερόλεπτο, με 16 bit ακρίβεια, σε 2 κανάλια, άρα απαιτούνται 1411200 bit/sec. Το ίδιο αρχείο μουσικής, κωδικοποιημένο με MP3 στα 128 kb/sec, απαιτεί 128000 bit/sec. Ο λόγος των δυο είναι  $1411200/128000 = 11.025$ , άρα το MP3 αρχείο είναι 11 φορές μικρότερο σε μέγεθος).

Επίσης, μια πολύ πρόσφατη, ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, και ραγδαίως αναπτυσσόμενη ερευνητική περιοχή είναι αυτή της **Συμπιεστικής Δειγματοληψίας** (Compressive Sampling - C.S.). Αξίζει να αναφέρουμε λίγα πράγματα, πολύ συνοπτικά. Πρόκειται λοιπόν για μια θεωρία που αναφέρει ότι ένα σήμα (ήχος, φωνή, εικόνα, οποιοδήποτε σήμα) μπορεί να ανακατασκευαστεί από πολύ λιγότερα δείγματα απ'όσα χρησιμοποιούν οι παραδοσιακές τεχνικές που βασίζονται στο θεώρημα του Shannon - το οποίο και θα μάθετε στο μάθημα! Το θεώρημα του Shannon θέτει ένα κάτω όριο στο πόσα δείγματα (τιμές) πρέπει να πάρουμε από μια συνεχή συνάρτηση (αναλογικό σήμα) για να μπορούμε να το ανακατασκευάσουμε τέλεια από αυτά τα δείγματα. Φυσικά η θεωρία της Συμπιεστικής Δειγματοληψίας δεν παραβιάζει αυτό το όριο για την τέλεια ανακατασκευή του σήματος, απλά χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές “αναπλήρωσης” των δειγμάτων που λείπουν, και φυσικά η ανακατασκευή του σήματος δεν είναι τέλεια, όπως αυτή που υπακούει στο θεώρημα του Shannon. Όμως, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4, η διαφορά μεταξύ του αυθεντικού και του ανακατασκευασμένου σήματος-εικόνας είναι πολύ δύσκολα διακριτή. Κύρια προϋπόθεση για την “καλή” ανακατασκευή του σήματος είναι αυτό να είναι *αραιό* (sparse) σε κάποιο χώρο. Το τι σημαίνει αυτό, αν και μπορείτε να κάνετε εύλογες υποθέσεις, θα το μάθετε όταν έρθει η ώρα. :-)

**1 Undersample**

A camera or other device captures only a small, randomly chosen fraction of the pixels that normally comprise a particular image. This saves time and space.

**2 Fill in the dots**

An algorithm called  $l_1$  minimization starts by arbitrarily picking one of the effectively infinite number of ways to fill in all the missing pixels.

**3 Add shapes**

The algorithm then begins to modify the picture in stages by laying colored shapes over the randomly selected image. The goal is to seek what's called **sparsity**, a measure of image simplicity.

**4 Add smaller shapes**

The algorithm inserts the smallest number of shapes, of the simplest kind, that match the original pixels. If it sees four adjacent green pixels, it may add a green rectangle there.

**5 Achieve clarity**

Iteration after iteration, the algorithm adds smaller and smaller shapes, always seeking sparsity. Eventually it creates an image that will almost certainly be a near-perfect facsimile of a hi-res one.

*Photos: Obama: Corbis; Image Simulation: Jarvis Haupt/Robert Nowak*

Σχήμα 4: Παράδειγμα Συμπιεστικής Δειγματοληψίας.

Άλλες εφαρμογές περιλαμβάνουν τον **Τρισδιάστατο Ήχο** (3D Audio), τον **Εικονικό Ήχο** (Virtual Audio), τα **Πολυκαναλικά Συστήματα Ήχου** (Multichannel Audio Systems), το **Τυφλό Διαχωρισμό Πηγών Ήχου** (Blind Source Separation), την **Αποθορυβοποίηση Ήχου** (Audio Denoising), και πολλά άλλα.

Η Επεξεργασία Ήχου είναι αρκετά ενεργή ερευνητικά στο τμήμα μας, με αρκετά δυνατό group από ερευνητές, σε μεταπτυχιακό και διδακτορικό επίπεδο, ενώ δίνεται και ως σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα (HY572-Ψηφιακή Επεξεργασία Ήχου), όπου και θα έχετε την ευκαιρία -πιθανότητα- να σχεδιάσετε τη δική σας εκδοχή του MP3, σε σχετική εργασία (project) του μαθήματος! :-)

### 3.5 Σήματα Εικόνας

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η εικόνα είναι ένα δισδιάστατο σήμα, του οποίου η ένταση σε κάθε σημείο είναι μια συνάρτηση δυο χωρικών μεταβλητών. Παραδείγματα αποτελούν η φωτογραφία, η ακίνητη εικόνα βίντεο, εικόνες από ραντάρ και σόναρ, καθώς και ακτινογραφίες στήθους ή οδοντοστοιχείας. Μια ακολουθία εικόνων, όπως αυτές που βλέπετε στην τηλεόραση, είναι ουσιαστικά ένα τρισδιάστατο σήμα για το οποίο η ένταση της εικόνας σε κάθε σημείο είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών: δυο χωρικών μεταβλητών, και μια τρίτης - του χρόνου. Τα βασικά προβλήματα στην Επεξεργασία Εικόνας είναι η **Αναπαράσταση και Μοντελοποίηση Σήματος Εικόνας** (Image Signal Representation and Modeling), η **Βελτίωση Εικόνας** (Image Enhancement), η **Ανακατασκευή Εικόνας από προβολές** (Image Reconstruction from projections), η **Αποκατάσταση Εικόνας** (Image Restoration), η **Ανάλυση Εικόνας** (Image Analysis), και η **Κωδικοποίηση Εικόνας** (Image



(α) Εικόνα 1



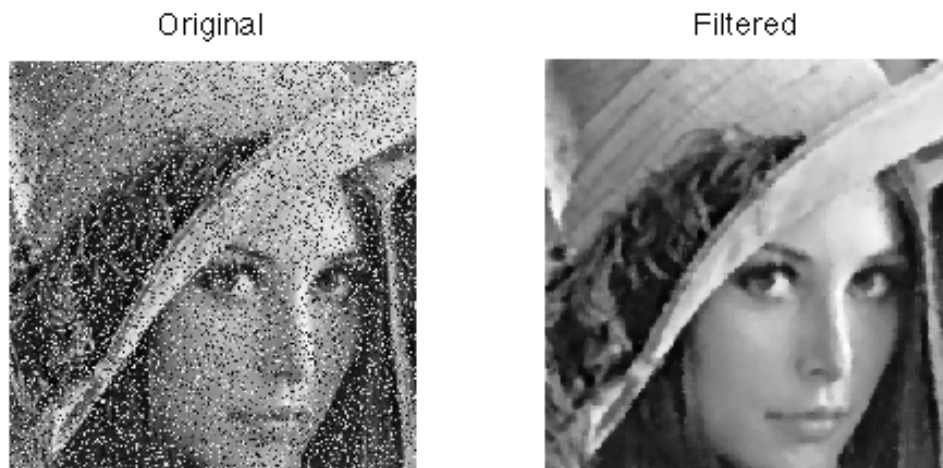
(β) Εικόνα 2

Σχήμα 5: Φωτογραφίες από τον Άρη

Coding).

Κάθε στοιχείο μιας εικόνας αναπαριστά μια φυσική ποσότητα - ο χαρακτηρισμός του στοιχείου λέγεται *αναπαράσταση εικόνας*. Για παράδειγμα, μια φωτογραφία αναπαριστά τη φωτεινότητα ενός αντικειμένου όπως αυτό φαίνεται στην κάμερα. Μια εικόνα υπερύθρων παρμένη από δορυφόρο ή αεροπλάνο αναπαριστά τη θερμοκρασία μιας τοποθεσίας. Ανάλογα του είδους της εικόνας και των εφαρμογών της, διάφορα μοντέλα εικόνας ορίζονται. Τέτοια μοντέλα βασίζονται επίσης στην αντίληψη, και σε τοπικά ή καθολικά χαρακτηριστικά. Η φύση και η απόδοση των αλγορίθμων επεξεργασίας εικόνας εξαρτώνται από το μοντέλο εικόνας που χρησιμοποιείται. Ένα παράδειγμα επεξεργασίας εικόνας φαίνεται στο Σχήμα 5, όπου στα αριστερά και δεξιά φαίνεται μια εικόνα που στάλθηκε από τον πλανήτη Άρη, στην προσεδάφιση του οχήματος Viking, στις 20 Ιουλίου 1976, στα πλαίσια του προγράμματος του κέντρου ερευνών JPL - Jet Propulsion Laboratory της NASA. Η αριστερή φωτογραφία δείχνει τον Άρη όπως έχουμε συνηθίσει να τον βλέπουμε σε φωτογραφίες που έχουν δημοσιευθεί. Η φωτογραφία στα δεξιά δείχνει έναν πλανήτη που μοιάζει περισσότερο με τη Γη - έχει μπλε ουρανό και γκριζοκόκκινο πέτρωμα. Μάλιστα θυρυλείται ότι αυτή η φωτογραφία ήταν η αυθεντική, η πρώτη που στάλθηκε από τον πλανήτη Άρη, ενώ η φωτογραφία στα αριστερά εμφανίστηκε λίγα λεπτά αργότερα - και φυσικά αυτή δόθηκε στη δημοσιότητα - μετά από επεξεργασία της πρώτης, επεξεργασία που αποδόθηκε στη “διόρθωση των αρχικών μηχανικών προβλημάτων απόδοσης χρώματος”. :-)

Αλγόριθμοι *Βελτίωσης Εικόνας* χρησιμοποιούνται για να τονίσουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της εικόνας, για να βελτιώσουν την ποιότητα της εικόνας, ή για βοηθήσουν στην ανάλυση της εικόνας για περαιτέρω εξαγωγή χαρακτηριστικών. Αυτοί περιλαμβάνουν μεθόδους για βελτίωση αντίθεσης, ανίχνευση ακμών, “ακόνισμα”, γραμμικό και μη γραμμικό φιλτράρισμα, μεγέθυνση, και αφαίρεση θορύβου. Ένας πολύ απλός αλγόριθμος, που στηρίζεται στο median filter, και μπορεί να αφαιρέσει θόρυβο τύπου “αλατιού και πιπεριού” (salt and pepper noise) φαίνεται στο Σχήμα 6. Μπορείτε να κρίνετε οι ίδιοι/ες την απόδοσή του. :-) Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για εξουδετέρωση ή μείωση υποβάθμισης της εικόνας, όπως το θόλωμα (blurring) ή η διαταραχή λόγω του περιβάλλοντος ή του συστήματος καταγραφής, είναι γνωστοί ως *Αποκατάσταση Εικόνας*. Η *Ανακατασκευή Εικόνας από προβολές* αφορά την κατασκευή μιας διδιάστατης εικόνας - “φέτας” από ένα τρισδιάστατο αντικείμενο, λαμβάνοντας υπόψη έναν αριθμό από προβολές που προέρχονται από διαφορετικές γωνίες. Κατασκευάζοντας έναν αριθμό από συνεχόμενες “φέτες”, μπορεί να δημιουργηθεί μια τρισδιάστατη εικόνα που δείχνει το περιεχόμενο του αντικειμένου. Η *Ανάσπωση Εικόνας* αναλαμβάνει να αναπτύξει μια ποσοτική περιγραφή και ταξινόμηση ενός ή περισσότερων αντικειμένων σε μια εικόνα. Η *Κωδικοποίηση Εικόνας*



Σχήμα 6: Αφαίρεση θορύβου (πριν και μετά)

αναλαμβάνει να μειώσει τον συνολικό αριθμό από bits σε μια εικόνα, χωρίς καμιά υποβάθμιση στην ποιότητά της. Ο τομέας Επεξεργασίας Εικόνας είναι αρκετά ανεπτυγμένος και στο τμήμα μας, με αρκετά μαθήματα σε προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο (HY471, HY571, HY576), σε συνδυασμό με μαθήματα Υπολογιστικής Όρασης (Computer Vision).<sup>2</sup>

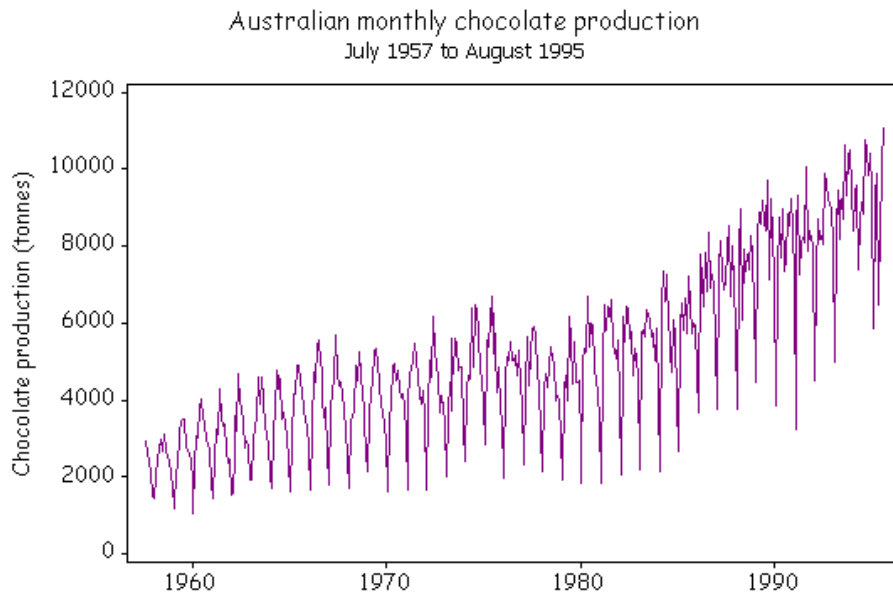
### 3.6 Χρονοσειρές

Τα σήματα που έχουμε περιγράψει ως τώρα είναι συνεχή στο χρόνο, δηλ. ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή. Σε πολλές περιπτώσεις, τα σήματα που μας ενδιαφέρουν είναι διακριτού χρόνου, δηλ. ορίζονται μόνο σε ακέραιες χρονικές στιγμές (φυσικά, και τα σήματα ήχου, φωνής, εγκεφάλου, και καρδιάς είναι και αυτά διακριτού χρόνου όταν τα επεξεργαζόμαστε στον Η/Υ. Από τη φύση τους όμως είναι συνεχή στο χρόνο - πρακτικά, κάθε σήμα επεξεργάσιμο σε Η/Υ αποτελεί μια χρονοσειρά). Συχνά αυτά τα σήματα είναι πεπερασμένης διάρκειας. Για παράδειγμα, τέτοια σήματα είναι οι ημερήσιες κινήσεις των μετοχών, ο ετήσιος πληθυσμός ανά πενήκονταετία, οι επιβάτες αεροπορικών εταιριών ανά έτος, και άλλα. Αυτού του είδους τα σήματα, που συνήθως αποκαλούνται *χρονοσειρές*, εμφανίζονται συχνά στις επιχειρήσεις, στα οικονομικά, σε φυσικές επιστήμες, κοινωνικές επιστήμες, στη μηχανική, στην ιατρική, και σε πολλά άλλα πεδία. Ένα παράδειγμα χρονοσειράς φαίνεται στο Σχήμα 7. Υπάρχουν πολλοί λόγοι που η ανάλυση χρονοσειρών είναι σημαντική. Σε μερικές εφαρμογές, προκύπτει η ανάγκη ανάπτυξης ενός μοντέλου για τον προσδιορισμό της φύσης της εξάρτησης των δεδομένων από μια ανεξάρτητη μεταβλητή, και η χρήση αυτού του μοντέλου για μελλοντικές προβλέψεις. Παράδειγμα, στον επιχειρηματικό σχεδιασμό, οι προβλέψεις πωλήσεων είναι απαραίτητες. Κάποιου είδους σειρές έχουν περιοδικές συνιστώσες, και είναι σημαντικό να μπορούμε να εξάγουμε αυτές τις συνιστώσες. Η μελέτη των ηλιακών κηλίδων είναι, για παράδειγμα, σημαντική για την πρόβλεψη των κλιματικών αλλαγών. Ένα σημαντικό στοιχείο είναι ότι τα δεδομένα χρονοσειρών είναι θορυβώδη, και η αναπαράστασή τους απαιτεί μοντέλα που είναι βασισμένα σε στατιστικές ιδιότητες. Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων θα δείτε -όσοι επιθυμείτε- στο μάθημα HY570-Στατιστική Επεξεργασία Σημάτων.

### 3.7 Σεισμικά σήματα

Τα σεισμικά σήματα προκαλούνται από την κίνηση των πετρωμάτων ως αποτέλεσμα κάποιου σεισμού, μιας ηφαιστειακής έκρηξης, ή μιας υπόγειας έκρηξης.

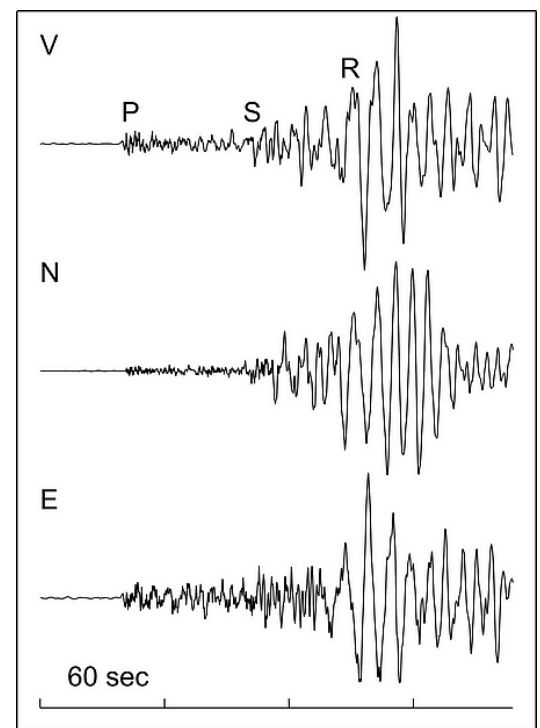
<sup>2</sup>Ένα μικρό, ενδιαφέρον, παρασκήνιο σχετικά με την εικόνα στο Σχήμα 6, είναι το εξής: η φωτογραφία αυτή λήφθηκε το Νοέμβριο του 1972, και έκτοτε δημοσιεύεται τακτικά σε επιστημονικά papers, ως εικόνα πάνω στην οποία εφαρμόζονται διάφοροι αλγόριθμοι, ενώ υπάρχει σε όλα τα κλασικά βιβλία Επεξεργασίας Εικόνας, για τον ίδιο λόγο. Το όνομά της κυρίας είναι Lenna. Μια αναζήτηση στο Google σχετικά με *Lenna Story* θα σας εκπλήξει, όσον αφορά την προέλευσή της.



Σχήμα 7: Παράδειγμα χρονοσειράς: μηνιαία παραγωγή σοκολάτας (σε τόνους) στην Αυστραλία.

Η κίνηση του εδάφους προκαλεί ελαστικά κύματα που διαδίδονται μέσα από το σώμα της Γης σε όλες τις κατευθύνσεις ξεκινώντας από την πηγή της κίνησης. Τρεις βασικοί τύποι ελαστικών κυμάτων παράγονται από την κίνηση του εδάφους. Δυο από αυτά διαδίδονται στο σώμα της Γης, με το ένα να είναι ταχύτερο από το άλλο. Το ταχύτερο αυτό σήμα λέγεται *πρωτεύου κύμα* (P-wave), ενώ το πιο αργό λέγεται *δευτερεύου κύμα* (S-wave). Το τρίτο κύμα είναι γνωστό ως *κύμα επιφάνειας*, που κινείται κατά μήκος της επιφάνειας του εδάφους (σχήμα 8). Αυτά τα σεισμικά κύματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά σήματα από ένα σειсмоγράφο και καταγράφονται σε ένα χαρτί ή σε μαγνητική ταινία.

Λόγω της τρισδιάστατης κίνησης του εδάφους, ο σειсмоγράφος συνήθως αποτελείται από τρεις ξεχωριστές συσκευές καταγραφής που παρέχουν πληροφορίες για την κίνηση στις δυο οριζόντιες κατευθύνσεις και στη μια κάθετη. Κάθε μια τέτοια εγγραφή είναι ένα μονοδιάστατο σήμα. Από τις εγγραφές αυτές, είναι δυνατόν να καθορίσει κανείς την ένταση του σεισμού ή μιας πυρηνικής έκρηξης, καθώς και το επίκεντρο του σεισμού. Τα σεισμικά σήματα επίσης παίζουν σημαντικό ρόλο στη γεωφυσική εξερεύνηση για πετρέλαιο και αέρια. Σε αυτές τις εφαρμογές, γραμμικές διατάξεις από σεισμικές πηγές, όπως εκρηκτικά υψηλής ενέργειας, τοποθετούνται ανά τακτά διαστήματα στην επιφάνεια του εδάφους. Τα εκρηκτικά παράγουν σεισμικά κύματα που διαδίδονται μέσω των υποεπιφανειακών γεωλογικών δομών, και αντανακλώνται πίσω στην επιφάνεια. Τα ανακλώμενα κύματα μετατρέπονται σε ηλεκτρικά με μια διάταξη γεωφώνων τοποθετημένα σε συγκεκριμένους σχηματισμούς και απεικονίζονται ως διδιάστατα σήματα σε συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Πριν αναλυθούν αυτά τα σήματα, γίνονται κάποιες διορθώσεις στα πλάτη και στους χρονισμούς. Χωρίς να θέλουμε να σας στεναχωρήσουμε, το τμήμα μας δεν ασχολείται ερευνητικά με θέματα όπως αυτό. Ποτέ δεν είναι αργά όμως... :-)



Σχήμα 8: Οι τρεις τύποι ελαστικών κυμάτων

### 3.8 Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα

Από τις σημαντικότερες εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος. Η βάση των τηλεπικοινωνιών, στο χαμηλότερο επίπεδο (το περίφημο physical layer - φυσικό επίπεδο, που θα δείτε στο μάθημα των Δικτύων), στηρίζεται πραγματικά σε όσα μαθαίνετε στο HY215, ειδικότερα οι αναλογικές (που πλέον δεν είναι πολύ δημοφιλείς :-)) επικοινωνίες. Σίγουρα όλοι/ες έχετε ακούσει για τη ραδιοφωνία AM και FM (κυρίως). Δείτε πόσο απλή είναι η θεωρία πίσω από αυτούς τους τρόπους μετάδοσης.

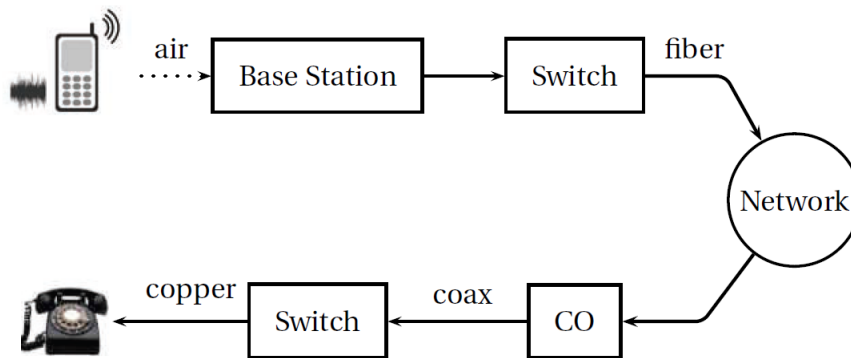
Κατ' αρχάς να πούμε ότι τα αρχικά AM και FM προέρχονται από τις λέξεις Amplitude Modulation-Διαμόρφωση Πλάτους, και Frequency Modulation-Διαμόρφωση Συχνότητας. Έστω  $m(t)$  το σήμα πληροφορίας που θέλουμε να στείλουμε (μπορεί να είναι οτιδήποτε, όχι απαραίτητα τηλεφωνική κλήση). Η μαθηματική αναπαράσταση - δεν ήθελα να γράψω μαθηματικά σε αυτό το εισαγωγικό κείμενο, αλλά ο πειρασμός είναι μεγάλος :-D - των δυο αυτών τρόπων μετάδοσης, δηλ. το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης (το ραδιόφωνό σας, εν προκειμένω), δίνεται ως:

$$y_{AM} = (1 + k_{AM}m(t)) \cos(2\pi f_c t)$$

$$y_{FM} = A_c \cos(2\pi f_c t + k_{PM} \int m(u) du)$$

Οι σταθερές  $k_{AM}$ ,  $k_{PM}$ , και η συχνότητα  $f_c$  ως μη σας απασχολούν εν προκειμένω. Αυτό που αξίζει να δείτε είναι ότι το μήνυμα  $m(t)$  στην πρώτη περίπτωση (AM) “αποθηκεύεται” στο πλάτος του συνημιτόνου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (FM) “αποθηκεύεται” στη φάση του συνημιτόνου. Όταν λοιπόν ρυθμίζετε το κουμπί στο ραδιόφωνό σας, ουσιαστικά προσπαθείτε να το συντονίσετε στη συχνότητα  $f_c$  που βλέπετε παραπάνω. :-)

Η όλη τηλεπικοινωνιακή διαδικασία είναι αρκετά περίπλοκη στην πράξη. Ας δούμε ένα απλό, αναλογικό (όχι ψηφιακό) παράδειγμα εδώ, για να αποκαλυφθεί πού ακριβώς βοηθά η Επεξεργασία Σήματος στην όλη διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι κάνουμε μια κλήση από το κινητό μας τηλέφωνο σε ένα σταθερό τηλέφωνο, όπως φαίνεται στο σχήμα 9. Η ανθρώπινη φωνή είναι αναλογικό σήμα, οπότε πρέπει πρώτα να μετατραπεί σε



Σχήμα 9: Μια απλή τηλεφωνική κλήση: η επεξεργασία στα blocks γίνεται ψηφιακά ενώ η μεταφορά μεταξύ των blocks γίνεται αναλογικά

ψηφιακή μορφή απ' το κινητό τηλέφωνο, να γίνει μια επεξεργασία (κωδικοποίηση), και μετά θα σταλεί από τον πομπό ένα *αναλογικό*, ηλεκτρομαγνητικό σήμα στην την κεραία εκπομπής του.<sup>3</sup> Το ραδιοκύμα θα ταξιδέψει μέσω του αέρα στο σταθμό βάσης, όπου και αποδιαμορφώνεται για να ανακτηθεί το σήμα φωνής (ή οποιοδήποτε σήμα στέλνουμε, εικόνα, βίντεο, κλπ - τα μοντέρνα κινητά έχουν αυτή τη δυνατότητα). Η κλήση, ως ψηφιακό σήμα, συνεχίζει να ταξιδεύει μέσα από ένα διακόπτη ηλεκτρικών σημάτων και μπαίνει ως είσοδος σε μια οπτική ίνα ως *αναλογικό σήμα φωτός*. Το κύμα ταξιδεύει τώρα μέσα στο δίκτυο και η διαδικασία αντιστρέφεται μέχρι να παραχθεί ο αναλογικός ήχος στο ακουστικό του δέκτη.

<sup>3</sup>Ναι, καλά (ίσως) το μαντέψατε. :-) Ένα αναλογικό ή ψηφιακό σήμα μπορεί να μεταδοθεί με αναλογικά ή ψηφιακά μέσα. Δεν υπάρχει κάποια δέσμευση του ενός απέναντι στο άλλο.

Τα συστήματα επικοινωνιών είναι αρκετά πιο περίπλοκα στην πράξη, όπως είπαμε. Παράγοντες όπως η εξασθένιση του σήματος, ο θόρυβος του καναλιού μετάδοσης/επικοινωνίας, το είδος του καναλιού, και άλλοι, παίζουν σημαντικό ρόλο στην ευρωστία της επικοινωνίας. Όλα αυτά έχουν μελετηθεί και μοντελοποιηθεί κατάλληλα, έτσι ώστε κάθε επικοινωνία να μπορεί να προσομοιωθεί σε Η/Υ προτού εφαρμοστεί. Μελέτη αλλά και σχεδιασμός τέτοιων συστημάτων μπορείτε να δείτε στα μαθήματα HY330, HY430, HY431, HY530, όπου και ίσως έχετε την ευκαιρία να σχεδιάσετε το δικό σας σύστημα κυψελοειδούς (κινητής) τηλεφωνίας. :-)

## 4 I.T.E - Ινστιτούτο Πληροφορικής - Συνεργασίες

Όλοι οι παραπάνω θεματικοί τομείς δεν είναι ανεξάρτητοι. Τελούν υπό την αιγίδα του - ήδη αναφερθέντος σε κάποιες παραγράφους - Εργαστηρίου Πολυμέσων (Multimedia Informatics Lab) του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών. Το εργαστήριο αυτό είναι σε στενή συνεργασία με το Εργαστήριο Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων (Telecommunications and Networks Lab - T.N.L), το οποίο πρόσφατα διασπάστηκε σε δυο - μέσα από το TNL προέκυψε το **Εργαστήριο Επεξεργασίας Σήματος** (Signal Processing Laboratory, για το οποίο μπορείτε να διαβάσετε εδώ), του Ινστιτούτου Πληροφορικής (Institute of Computer Science - I.C.S), του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας (I.T.E - Foundation for Research and Technology Hellas - FO.R.T.H). Το I.T.E αποτελεί το κορυφαίο ερευνητικό ίδρυμα στην Ελλάδα και ένα από τα πιο αναγνωρισμένα στην Ευρώπη. Μέσω των T.N.L/S.P.L, μπορείτε (σε προχωρημένο προπτυχιακό και μεταπτυχιακό επίπεδο) να δουλέψετε σε πραγματικά σπουδαία ερευνητικά projects, Ελληνικής και Ευρωπαϊκής χρηματοδότησης. Επίσης, το I.C.S συνεργάζεται συχνά μέσω των μελών του με εταιρίες του ιδιωτικού τομέα (France Telecom, Toshiba, SAGEM, British Telecom, FORTHnet, GRnet, Google κ.α.), πράγμα ιδιαίτερα ενθαρρυντικό για γνωριμίες και μετέπειτα επαγγελματική σταδιοδρομία. Αλλά προς το παρόν, δεν πρέπει να σας απασχολούν αυτά - πρέπει πρώτα να περάσετε το HY215 (και να πάρετε και πτυχίο)... :-)

## 5 Κλείνοντας...

Η Επεξεργασία Σήματος και οι τεχνικές της έχουν ήδη προκαλέσει επαναστατικές προόδους σε κάποια πεδία εφαρμογών. Ένα εξέχον παράδειγμα είναι στην περιοχή των Τηλεπικοινωνιών, όπου η Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος (που θα τη δείτε στο μάθημα HY370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων ;-), σε συνδυασμό με τη Μικροηλεκτρονική, και την μετάδοση δεδομένων μέσω Οπτικών Ινών, άλλαξαν τη φύση των επικοινωνιών. Μια παρόμοια επίδραση μπορεί κανείς να αναμένει και σε άλλους τομείς. Πράγματι, η Επεξεργασία Σήματος ήταν, είναι, και θα είναι ένας τομέας που ευδοκιμεί σε νέες εφαρμογές. Οι ανάγκες ενός νέου πεδίου εφαρμογών μπορούν να καλυφθούν από γνώσεις που προέρχονται από άλλα πεδία, αλλά συχνά οι νέες εφαρμογές χρειάζονται νέους αλγόριθμους και νέα συστήματα υλικού που θα τους υλοποιούν. Για παράδειγμα, παλαιότερα, εφαρμογές της Σεισμολογίας, των Ραντάρ, και των Επικοινωνιών, έδωσαν τη βάση για την ανάπτυξη νέων τεχνικών σε διαφορετικούς τομείς. Σίγουρα, η Επεξεργασία Σήματος θα παραμείνει στην καρδιά των εφαρμογών στην Εθνική Άμυνα, στη διασκέδαση, στις επικοινωνίες, στην ιατρική φροντίδα και διάγνωση. Πρόσφατα, είδαμε εφαρμογές επεξεργασίας σήματος σε τομείς τόσο διαφορετικούς μεταξύ τους όπως τα Οικονομικά και η Ανάλυση Ακολουθιών DNA.

Αν και είναι δύσκολο να προβλέπει κανείς που θα αναπτυχθεί έδαφος για νέες εφαρμογές, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι θα είναι εμφανείς σε αυτούς που θα είναι κατάλληλα προετοιμασμένοι να τις αναγνωρίσουν. Το κλειδί για την ετοιμότητα κάποιου να λύσει νέα προβλήματα επεξεργασίας σήματος είναι - και πάντα ήταν - η σε βάθος κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών των Σημάτων και Συστημάτων.

## 6 Επίλογος

Αυτός είναι και ο σκοπός αυτού του μαθήματος. Να σας δώσει τους θεμέλιους αυτούς λίθους για να σταδιοδρομήσετε στο σχετικό τομέα του ενδιαφέροντός σας! Είναι σίγουρο ότι όλα όσα διαβάσατε σας κάνουν ανυπόμονους να τα δείτε όλα αυτά στην πράξη – εδώ υπάρχει ένα μάλλον όχι τόσο ευχάριστο νέο για σας, που κρατήσαμε επίτηδες για το τέλος: δε θα δείτε σχεδόν τίποτα από όλα τα παραπάνω στο μάθημα αυτό. :( Τουλάχιστον όχι σε όσο βάθος και λεπτομέρεια θα θέλατε, παρά μόνο κάποια από αυτά, επιδερμικά, ως μικρές εφαρμογές. Το μάθημα αυτό είναι το πρώτο σκαλοπάτι. Κοιτάζοντάς το, δεν προμηνύει κάτι τρομερά ενδιαφέρον αλλά χωρίς αυτό δε θα μπορέσετε ποτέ να φτάσετε στους “ορόφους”, που διαβάσατε παραπάνω. Κι αυτοί υπάρχουν στο τμήμα, σε μαθήματα επιλογής E3 και E7 κυρίως. Στο HY215 κάνετε το πρώτο βήμα, και κάθε ταξίδι ξεκινά με ένα και μόνο βήμα...