Τυπολόγιο για HY215 - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς

22 Αυγούστου 2018

1 Μιγαδικοί - Σχεσεις Euler

- $a + jb = \rho e^{j\theta},\ \ \rho = \sqrt{a^2+b^2},\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$
- $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$
- $|e^{j\theta}| = 1,\ \ \forall\theta$
- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2},\ \ \sin(\theta) = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$
- $e^{\pm j\pi} = -1,\ \ e^{\pm j\pi/2} = \pm j = \mp\dfrac{1}{j}$
- $e^{\pm j2\pi k} = 1,\ \ e^{\pm j\pi k} = (-1)^k$

2 Σήματα

Ενέργεια: $E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

Ισχύς: $P_x = \displaystyle\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2 dt$

Ισχύς περιοδικού σήματος: $P_x = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{T_0}|x(t)|^2 dt$

2.1 Συνάρτηση Δέλτα

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t\pm t_0)dt = x(\mp t_0)$
- $\delta(t-t_0) * x(t-t_1) = x(t-t_0-t_1)$
- $x(t)\delta(t\pm t_0) = x(\mp t_0)\delta(t\pm t_0)$

2.2 Βηματική Συνάρτηση

- $u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$
- $\dfrac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$

2.3 Παλμοί

- $A\mathrm{rect}(t/T) = \begin{cases} A, & -T/2<t<T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- $A\mathrm{tri}(t/T) = \begin{cases} A(1-|t|/T), & -T<t<T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

3 Ημίτονα

- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\Re\{e^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\}$
  - Περίοδος: $T_0 = \frac{1}{f_0}$
  - Συχνότητα: $f_0 = \frac{1}{T_0}$
- Για πραγματικά σήματα:
  - Φάσμα πλάτους : άρτια συνάρτηση
  - Φάσμα φάσης : περιττη συνάρτηση
- $x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} A_k\cos(2\pi f_k t + \phi_k)$
  - Περιοδικό αν $\frac{f_i}{f_j},\ i \neq j$ είναι λόγος ακεραίων
  - Περίοδος (αν υπάρχει): $T_0 = \text{ΕΚΠ}\{T_k\}$ ή $f_0 = \text{ΜΚΔ}\{f_k\}$
  - Ισχύς: $P_x = A_0^2 + \sum_{k=1}^{N}\frac{A_k^2}{2}$

4 Σειρές Fourier

- Εκθετική σειρά Fourier:
  - $x(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$
  - $X_k = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt$
  - $X_k = |X_k|e^{j\angle X_k}$
  - $X_0 = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} x(t)dt \in \Re$, όταν $x(t)\in\Re$.
- Τριγωνομετρική σειρά Fourier:
  - $x(t) = A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(2\pi k f_0 t + \phi_k)$
  - $A_0 = X_0$
  - $A_k = 2|X_k|$
  - $\phi_k = \angle X_k$
- $\displaystyle\int_0^{T_0} e^{j2\pi k/T_0 t}dt = \begin{cases} 0, & k\neq 0 \\ T_0, & k=0 \end{cases}$

5 Μετασχηματισμός Fourier

- $X(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$
- $x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi f t}df$
- $X(f) = |X(f)|e^{j\angle X(f)}$

Ιδιότητες σειρών Fourier	
Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t)$ με T_0	X_k
$y(t)$ με T_0	Y_k
$Ax(t)+By(t)$	AX_k+BY_k
$x(t-t_0)$	$X_k e^{-jk2\pi f_0 t_0}$
$e^{j2\pi M f_0 t}x(t)$	X_{k-M}
$x^*(t)$	X^*_{-k}
$x(-t)$	X_{-k}
$x(at),\ a>0$	X_k, με περίοδο T_0/a
$\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$T_0 X_k Y_k$
$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} X_l Y_{k-l}$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk2\pi f_0 X_k$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X_k}{jk2\pi f_0}$
$x(t)\in\Re$	$\begin{cases} X_k = X^*_{-k}, \\ \Re\{X_k\}=\Re\{X_{-k}\}, \\ \Im\{X_k\}=-\Im\{X_{-k}\}, \\ \lvert X_k\rvert=\lvert X_{-k}\rvert, \\ \angle X_k=-\angle X_{-k} \end{cases}$
$x_e(t)=Ev\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$\Re\{X_k\}$
$x_o(t)=Od\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$j\Im\{X_k\}$
$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert X_k\rvert^2$

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$x(t)$	$X(f)$
$y(t)$	$Y(f)$
$Ax(t)+By(t)$	$AX(f)+BY(f)$
$x(t\pm t_0)$	$X(f)e^{\pm j2\pi f t_0}$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}x(t)$	$X(f\mp f_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-f)$
$x(-t)$	$X(-f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(t)*y(t)$	$X(f)Y(f)$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(t)y(t)$	$X(f)*Y(f)$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f}+\frac{X(0)\delta(f)}{2}$
$x(t)\in\Re$	$\begin{cases} X(f)=X^*(-f), \\ \Re\{X(f)\}=\Re\{X(-f)\}, \\ \Im\{X(f)\}=-\Im\{X(-f)\}, \\ \lvert X(f)\rvert=\lvert X(-f)\rvert, \\ \angle X(f)=-\angle X(-f) \end{cases}$
$x_e(t)=Ev\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$\Re\{X(f)\}$
$x_o(t)=Od\{x(t)\},\ x(t)\in\Re$	$j\Im\{X(f)\}$
$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert X(f)\rvert^2 df$

Πίνακας Σειρών Fourier	
Περιοδικό σήμα	Συντελεστές Fourier
$x(t)=\begin{cases} A, & 0<t<\frac{T_0}{2} \\ -A, & \frac{T_0}{2}<t<T_0 \end{cases}$	$X_k=\frac{2A}{\pi k}e^{-j\pi/2},\ k$ περιττά
$x(t)=\begin{cases} A, & 0<t<\frac{T_0}{2} \\ 0, & \frac{T_0}{2}<t<T_0 \end{cases}$	$X_k=\frac{A}{\pi k}e^{-j\pi/2},\ k$ περιττά
$x(t)=\frac{2A}{T_0}t,\ -\frac{T_0}{2}<t<\frac{T_0}{2}$	$X_k=\frac{A}{\pi k}(-1)^k e^{j\pi/2}$
$x(t)=A\mathrm{tri}\left(\frac{t}{\frac{T_0}{2}}\right),\ -\frac{T_0}{2}<t<\frac{T_0}{2}$	$X_k=\frac{2A}{\pi^2 k^2},\ k$ περιττά
$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_0)$	$X_k=\frac{1}{T_0}$

- $\lvert X(f)\rvert=\sqrt{\Re^2(f)+\Im^2(f)},\ \angle X(f)=\tan^{-1}\frac{\Im(f)}{\Re(f)}$
- $X_k=\frac{1}{T_0}X(f)\big|_{f=kf_0}$

6 Συστήματα

- Συνέλιξη: $c_{xy}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$
- Έξοδος συστήματος I:

$$y(t)=x(t)*h(t)\longleftrightarrow Y(f)=X(f)H(f)$$

- Έξοδος συστήματος II: Αν η είσοδος αναπτύσσεται σε άθροισμα ημιτόνων,

$$y(t)=X_0H(0)+\sum_{k=1}^{+\infty}2|X_k||H(f_k)|\cos(2\pi f_k t+\phi_k+\theta(f_k))$$

με $H(f)=|H(f)|e^{j\theta(f)}$

- Κρουστική απόκριση $h(t)$: Η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται η συνάρτηση $\delta(t)$.

7 Συσχέτιση

7.1 Σήματα Ενέργειας

- Ετεροσυσχέτιση:
$\phi_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)y(\tau+t)dt$
- Αυτοσυσχέτιση:
$\phi_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x^*(t)x(\tau+t)dt$

7.2 Σήματα Ισχύος

- Ετεροσυσχέτιση:
$\phi_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^*(t)y(\tau+t)dt$
- Αυτοσυσχέτιση:
$\phi_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^*(t)x(\tau+t)dt$

Ζεύγη μετασχηματισμού Fourier	
Σήμα	Μετασχηματισμός Fourier
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - kf_0)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$
1	$\delta(f)$
$A\text{rect}\Big(\frac{t}{T}\Big)$	$AT\text{sinc}(fT)$
$A\text{tri}\Big(\frac{t}{T}\Big)$	$AT\text{sinc}^2(fT)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\Big(f - k\frac{1}{T}\Big)$
$\delta(t)$	1
$sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$e^{-a\|t\|},\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{2a}{4\pi^2 f^2 + a^2}$
$e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a - j2\pi f}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(-t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a - j2\pi f)^n}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{a + j2\pi f}{(2\pi f_0)^2 + (a + j2\pi f)^2}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t),\ \Re\{a\} > 0$	$\frac{2\pi f_0}{(2\pi f_0)^2 + (a + j2\pi f)^2}$

7.3 Περιοδικά Σήματα

- Ετεροσυσχέτιση:
  $\phi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^*(t)y(\tau + t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^* Y_k e^{j2\pi k f_0 \tau}$
- Αυτοσυσχέτιση:
  $\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x^*(t)x(\tau + t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 e^{j2\pi k f_0 \tau}$
- $\phi_x(\tau) = \frac{1}{T_0}\phi_x(\tau, T_0) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - kT_0)$
- $\phi_x(0) = E_{\text{σε μια περίοδο}} = P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$

7.4 Φασματικές Πυκνότητες

- $\Phi_{xy}(f) = X^*(f)Y(f)$
- $\Phi_x(f) = |X(f)|^2$
- $\phi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = E_{\text{σήματος ενέργειας}}$
- $\Phi_x(f) = \frac{1}{T_0^2}\Phi_x(f, T_0)\Big]_{f=kf_0}\delta(f - kf_0)$

8 Μετασχηματισμός Laplace

- $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$
- $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$
- Θεώρημα της αρχικής τιμής: $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
- Θεώρημα της τελικής τιμής: $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$
- $X(s)\Big|_{\sigma=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(0+j2\pi f)t}dt = X(f),\ \sigma = 0 \in ROC$
- Για ένα ΓΧΑ σύστημα

$$Y(s) = X(s)H(s),\ \ R_y \supseteq R_X \cap R_H$$

- Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα (απλές ριζες)

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0},\ \ m < n \\ &= \frac{P(x)}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_n)} \\ &= \frac{k_1}{x - \rho_1} + \frac{k_2}{x - \rho_2} + \cdots + \frac{k_n}{x - \rho_n} \end{aligned}$$

με $k_i = (x - \rho_i)F(x)\Big|_{x=\rho_i},\ \ i = 1, 2, \cdots, n$

9 Ιδανικά Φίλτρα

- Χαμηλοπερατό με συχνότητα αποκοπής f_c:

$$H(f) = \text{rect}\Big(\frac{f}{2f_c}\Big)$$

- Υψιπερατό με συχνότητα αποκοπής f_c:

$$H(f) = 1 - \text{rect}\Big(\frac{f}{2f_c}\Big)$$

- Ζωνοπερατό με συχνότητες αποκοπής f_{c_1}, f_{c_2}:

$$H(f) = \text{rect}\Big(\frac{f - \frac{f_{c_1} + f_{c_2}}{2}}{f_{c_2} - f_{c_1}}\Big) + \text{rect}\Big(\frac{f + \frac{f_{c_1} + f_{c_2}}{2}}{f_{c_2} - f_{c_1}}\Big)$$

- Ζωνοφρακτικό με συχνότητες αποκοπής f_{c_1}, f_{c_2}:

$$H(f) = 1 - \left(\text{rect}\Big(\frac{f - \frac{f_{c_1} + f_{c_2}}{2}}{f_{c_2} - f_{c_1}}\Big) + \text{rect}\Big(\frac{f + \frac{f_{c_1} + f_{c_2}}{2}}{f_{c_2} - f_{c_1}}\Big)\right)$$

10 Δειγματοληψία

$$f_s > 2f_{max}\ \ (\text{ ή } T_s < \frac{1}{2f_{max}})$$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχηματισμός Laplace	ROC
$\delta(t)$	1	Όλο το s-επίπεδο
$\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{s^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{A}{s}(e^{sT/2} - e^{-sT/2})$	όλο το s-επίπεδο
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\Re\{s\} < -\Re\{a\}$
$e^{-at}\cos(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$
$e^{-at}\sin(2\pi f_0 t)u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(s+a)^2+(2\pi f_0)^2}$	$\Re\{s\} > -\Re\{a\}$

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης		
$x(t)$	$y(t)$	$x(t) * y(t)$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{1-e^{at}}{-a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t), \ \ a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2 e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^{n}\frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$ $a \neq b$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^{m}\frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)!^{n+j+1}}u(t)$ $+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t)$
$e^{at}\cos(bt+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t} - e^{-at}\cos(bt+\theta-\phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2+b^2}}u(t)$ $\phi = \tan^{-1}\frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)}{b-a}, \ \ \Re\{b\} > \Re\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a}u(-t)$

Ιδιότητες δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace		
Σήμα	Μετασχημ. Laplace	ROC
$x(t)$	$X(s)$	R_x
$y(t)$	$Y(s)$	R_y
$Ax(t)+By(t)$	$AX(s)+BY(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
$x(t-t_0)$	$X(s)e^{-st_0}$	R_x
$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s-s_0)$	Μετατόπιση του R_x
$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
$x(-t)$	$X(-s)$,	$-R_x$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	Σταθμισμένο R_x
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R \supseteq R_x$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s)$	$R \supseteq R_x$
$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	R_x
$t^n x(t)$	$(-1)^n\frac{d^n X(s)}{ds^n}$	R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$	$R \supseteq \Big(R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\}\Big)$

Ιδιότητες μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace		
$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$	$R \supseteq R_x$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i}\frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}}x(t)\Big\rvert_{t=0}$	R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(t)dt$	$R \supseteq \Big(R_x \cap \{\Re\{s\} > 0\}\Big)$

11 Γενικό τυπολόγιο

- $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \ \ \mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sinc}(-x), \ \ \mathrm{sinc}(0) = 1$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta), \ \ \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$
- $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$
- $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta)$
- $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$
- $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{64}{\pi^2(2k-1)^2} = 16$
- $(x^2+5x+4)/(x^2-4) = 1 + (5x+8)/(x^2-4)$