

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2024-25
Διδάσκων: Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ασκηση 1 - Σήματα

(α') Έχουμε

$$x(-t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T < -t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T < t < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = x(t) \quad (1)$$

αφού το συνημίτονο είναι άρτια συνάρτηση.

(β') i. Για το σήμα $x(t) = \text{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right)$ θα έχουμε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) = \frac{1}{2}\left(\text{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right) + \text{rect}\left(\frac{-t-1}{4}\right)\right) \quad (2)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{2}, & -3 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ \frac{1}{2}, & -3 < t < -1, 1 < t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3)$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = \frac{1}{2}\left(\text{rect}\left(\frac{t-1}{4}\right) - \text{rect}\left(\frac{-t-1}{4}\right)\right) \quad (4)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} - \begin{cases} \frac{1}{2}, & -3 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & -3 < t < -1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < t < 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (5)$$

ii. Για το σήμα $x(t) = u(t)$ έχουμε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) = \frac{1}{2}(u(t) + u(-t)) = \frac{1}{2} \quad (6)$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) = \frac{1}{2}(u(t) - u(-t)) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0 \\ -\frac{1}{2}, & t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Ασκηση 2 - Ενέργεια και Ισχύς

(α') Το σήμα $x(t) = tu(-t)$ δεν είναι φραγμένο και δεν πληροί κανένα από τα κριτήρια κατηγοριοποίησης. Άρα δεν είναι ούτε σήμα ενέργειας ούτε σήμα ισχύος. Ας το δείξουμε:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u^2(-t) dt = \int_{-\infty}^0 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-\infty}^0 = +\infty \quad (8)$$

και

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^0 t^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-T}^0 \quad (9)$$

$$= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \frac{T^3}{3} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{T^2}{3} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T^2}{6} = +\infty \quad (10)$$

(β') Το σήμα $x(t) = 3 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ είναι περιοδικό, οπότε είναι σήμα ισχύος. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$P_x = \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{2} = \frac{25}{2} \quad (11)$$

(γ') Για το σήμα $x(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$ βλέπουμε ότι φθίνει το μηδέν όσο $t \rightarrow +\infty$, οπότε πιθανόν να είναι σήμα ενέργειας. Άρα

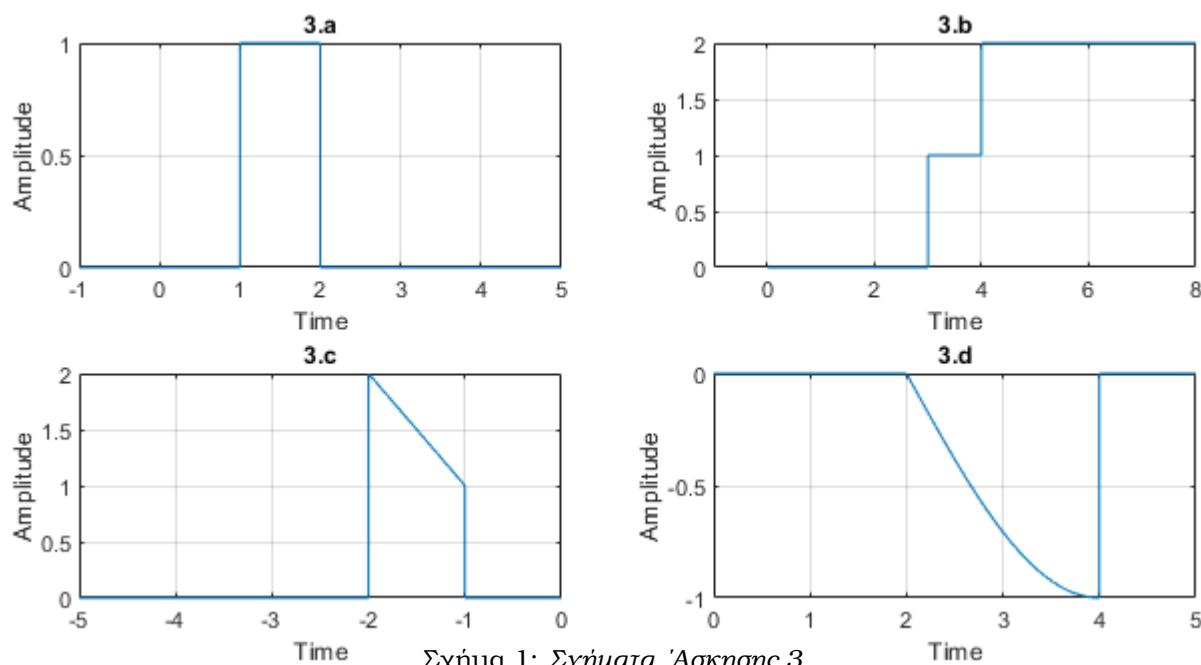
$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} \Big|_{t=1}^{+\infty} = -(0-1) = 1 \quad (12)$$

(δ') Για το σήμα $x(t) = e^{-4|t|}$ παρατηρούμε ότι είναι άπειρης διάρκειας αλλά όσο $|t| \rightarrow \infty$, το πλάτος του φθίνει στο μηδέν. Οπότε πιθανόν είναι σήμα ενέργειας. Έτσι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-8|t|}dt = \int_{-\infty}^0 e^{8t}dt + \int_0^{+\infty} e^{-8t}dt = \frac{1}{8}e^{8t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{8}e^{-8t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4} \quad (13)$$

Ασκηση 3 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

Τα σήματα φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήματα Άσκησης 3.

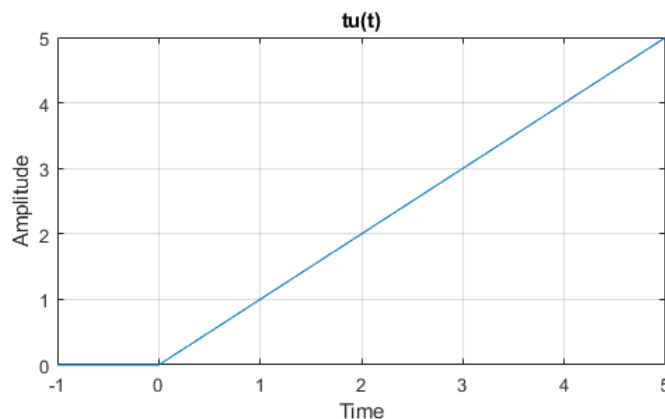
Ασκηση 4 - Συναρτήσεις Δέλτα

Από τις γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{(α')} \quad (t^2 + 3t - 2)\delta(t-8) &= 86\delta(t-8) & \text{(ε)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2}\delta(t-1)dt &= e^{-2t^2} \Big|_{t=1} = e^{-2} & \text{(ζ)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi t)\delta(t-1)dt &= \sin(\pi) = 0 \\ \text{(β')} \quad \cos(2\pi 100t)\delta(t-1) &= \delta(t-1) \\ \text{(γ')} \quad (t-x)\delta(t-1) &= (1-x)\delta(t-1) \\ \text{(δ')} \quad \left(\frac{d}{dt}t^2\right)\delta(t+1) &= -2\delta(t+1) & \text{(ς')} \quad \int_{10}^{+\infty} e^{-2t^2}\delta(t-1)dt &= 0 & \text{(η)} \quad \int_{-\infty}^0 (t-1)^2\delta(t-2)dt &= 0 \end{aligned}$$

Ασκηση 5 - Συναρτήσεις Δέλτα και Βηματικές

(α') Το σήμα $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: Σχήματα Άσκησης 5.

(β') Η έξοδος δίνεται ως

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}tu(u) = t'u(t) + tu'(t) = u(t) + t\delta(t) = u(t) + 0\delta(t) = u(t) \quad (14)$$

(γ') Για $x_1(t) = u(t)$, η νέα έξοδος θα είναι

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \delta(t) \quad (15)$$

εξ' ορισμού.

(δ') Έστω το σήμα

$$x(t) = \cos(2\pi t) \left[u(t) - u(t-1) \right] \quad (16)$$

Η παράγωγος του θα είναι

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \cos(2\pi t)u(t) - \frac{d}{dt} \cos(2\pi t)u(t-1) \quad (17)$$

$$= -2\pi \sin(2\pi t)u(t) + \cos(2\pi t)\delta(t) - (-2\pi \sin(2\pi t)u(t-1) + \cos(2\pi t)\delta(t-1)) \quad (18)$$

$$= -2\pi \sin(2\pi t)u(t) + \delta(t) + 2\pi \sin(2\pi t)u(t-1) - \delta(t-1) \quad (19)$$

$$= -2\pi \sin(2\pi t) \left[u(t) - u(t-1) \right] + \delta(t) - \delta(t-1) \quad (20)$$

Ασκηση 6 - Συστήματα

(α') $y(t) = |x(t)|$:

- Γραμμικό: για είσοδο $ax_1(t)$, το σύστημα αποκρίνεται $y_1(t) = |ax_1(t)| = |a||x_1(t)| \neq ay(t)$, άρα δεν ικανοποιείται η ιδιότητα της ομογένειας. Οπότε το σύστημα δεν είναι γραμμικό.
- Χ.Α: αν βάλουμε ως είσοδο το σήμα $x_1(t) = x(t - t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t) = |x(t - t_0)|$. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 τότε $y(t - t_0) = |x(t - t_0)| = y_1(t)$, οπότε το σύστημα είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: αν $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}_+$, τότε προφανώς $|y(t)| = ||x(t)|| = |x(t)| < B_x$, και έτσι το σύστημα είναι ευσταθές.

- Αιτιατό: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί δεν απαιτούνται μελλοντικές τιμές τη εισόδου για τον υπολογισμό μιας εξόδου.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για τη λειτουργία του.

(β') $y(t) = e^{x(t)}$:

- Γραμμικό: για είσοδο $ax_1(t)$ η έξοδος θα είναι $y_1(t) = e^{ax_1(t)} \neq ay(t)$, άρα το σύστημα δεν είναι γραμμικό αφού δεν είναι ομογενές.
- Χ.Α: αν βάλουμε ως είσοδο το σήμα $x_1(t) = x(t - t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t) = e^{x(t-t_0)}$. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 τότε $y(t - t_0) = e^{x(t-t_0)} = y_1(t)$, οπότε το σύστημα είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: αν $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}_+$, τότε προφανώς $|y(t)| = e^{x(t)} < e^{B_x}$, και έτσι το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατό: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου.
- Δυναμικό: το σύστημα δεν είναι δυναμικό γιατί δεν απαιτείται μνήμη για τη λειτουργία του.

(γ') $y(t) = t \sin(|x(t+1)|)$:

- Γραμμικό: αν $ax_1(t)$ η είσοδος, τότε το σύστημα αποκρίνεται $y_1(t) = t \sin(|ax(t+1)|) \neq ay(t)$, οπότε το σύστημα δεν είναι γραμμικό αφού δεν είναι ομογενές.
- Χ.Α: αν βάλουμε ως είσοδο το σήμα $x_1(t) = x(t - t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι $y_1(t) = t \sin(|x(t+1-t_0)|)$. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0 τότε $y(t - t_0) = (t - t_0) \sin(|x(t+1-t_0)|) \neq y_1(t)$, οπότε το σύστημα δεν είναι Χ.Α.
- Ευσταθές: αν $|x(t)| < B_x \in \mathbb{R}_+$, τότε προφανώς $|y(t)| = |t \sin(|x(t+1)|)| \leq |t|$, το οποίο δεν έχει άνω φράγμα, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.
- Αιτιατό: το σύστημα δεν είναι αιτιατό γιατί απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου (π.χ. για το $y(1)$ θέλουμε το $x(2)$).
- Δυναμικό: το σύστημα είναι δυναμικό γιατί απαιτείται μνήμη για τη λειτουργία του (η $t+1$ κάθε φορά τιμή της εισόδου).

Ασκηση 7 - Γραμμικότητα

(α') Η είσοδος $x_1(t)$ είναι το άθροισμα

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} \quad (21)$$

και λόγω γραμμικότητας, η έξοδος θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους εισόδων. Από την εκφώνηση

$$e^{j2t} \longrightarrow e^{j3t} \quad (22)$$

και

$$e^{-j2t} \longrightarrow e^{-j3t} \quad (23)$$

οπότε

$$\cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t} \longrightarrow \frac{1}{2}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^{-j3t} = \cos(3t) \quad (24)$$

με τους συντελεστές $1/2$ να εμφανίζονται στην έξοδο λόγω ομογένειας.

(β') Η είσοδος $x_2(t)$ είναι το άθροισμα

$$\cos(2t - 1) = \frac{1}{2}e^{j(2t-1)} + \frac{1}{2}e^{-j(2t-1)} = \frac{1}{2}e^{j2t}e^{-j} + \frac{1}{2}e^{-j2t}e^j \quad (25)$$

και λόγω γραμμικότητας, η έξοδος θα ισούται με το άθροισμα των επιμέρους εισόδων. Από την εκφώνηση

$$e^{j2t} \longrightarrow e^{j3t} \quad (26)$$

και άρα

$$e^{-j}e^{j2t} \longrightarrow e^{-j}e^{j3t} \quad (27)$$

από την ιδιότητα της ομογένειας. Όμοια,

$$e^je^{-j2t} \longrightarrow e^je^{-j3t} \quad (28)$$

οπότε

$$\cos(2t - 1) = \frac{1}{2}e^{-j}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^je^{-j2t} \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-j}e^{j3t} + \frac{1}{2}e^je^{-j3t} = \cos(3t - 1) \quad (29)$$

με τους συντελεστές $1/2$ να εμφανίζονται στην έξοδο ξανά λόγω ομογένειας.