ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 11/4/2024 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/4/2024, 16:00

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $70/50$ σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Συνέλιξη στο χρόνο και στη συχνότητα
Υπολογίστε αναλυτικά (χωρίς πίνακες συνέλιξης) τη συνέλιξη των σημάτων

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \tag{1}$$
$$y(t) = e^{2t}u(-t) \tag{2}$$

στο πεδίο του χρόνου, και επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα με χρήση του μετασχ. Fourier. Για το τελευταίο, χρησιμοποιήστε πίνακες.

Απ: $c_{xy}(t) = \frac{1}{5}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{5}e^{-3t}u(t)$

Άσκηση 2 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier I
Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος

$$X(f) = A\mathrm{tri}\Big(\frac{f-f_0}{B}\Big) + A\mathrm{tri}\Big(\frac{f+f_0}{B}\Big) \tag{3}$$

Απ: $x(t) = 2AB\mathrm{sinc}^2(Bt)\cos(2\pi f_0 t)$

Άσκηση 3 - Αντίστροφος Μετασχ. Fourier II
Έστω ο μετασχ. Fourier

$$X(f) = \frac{4}{-(2\pi f)^2 + j8\pi f + 3} \tag{4}$$

Δείξτε ότι το σήμα στο χρόνο στο οποίο αυτός αντιστοιχεί είναι το σήμα $x(t) = (2e^{-t} - 2e^{-3t})u(t)$.

Άσκηση 4 - Έξοδος ΓΧΑ συστήματος για περιοδική είσοδο
Η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος δίνεται ως

$$H(f) = \frac{4}{4 + j2\pi f} \tag{5}$$

Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος για είσοδο

(α') $x_1(t) = 2\cos(t)$

(β') $x_2(t) = \cos(4t + \frac{\pi}{4})$

(γ') $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Απ.: (α) $y_1(t) = 1.94\cos(t - 14^o)$, (β) $y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(4t)$

Άσκηση 5 - ΓΧΑ Συστήματα και Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t) - 8x(t) \tag{6}$$

(α΄) Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$, μέσω της απόκρισης σε συχνότητα $H(f)$. Προσέξτε να διαιρέσετε τα πολυώνυμα του $j2\pi f$ της $H(f)$ πριν εφαρμόσετε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.[1]

Απ.: $h(t) = \delta(t) - 8e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$

(β΄) Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-4t}u(t)$.

Απ.: $y(t) = (5e^{-3t} - 4e^{-2t})u(t)$

[⋆] Ασκηση 6 - Θεώρημα Parseval

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \tag{7}$$

<u>Hint:</u> Δείτε τους πίνακες ζευγών μετασχ. Fourier σας.

Απ: $\frac{\pi}{4}$

[⋆] Άσκηση 7 - Περιοδικά Σήματα και Μετασχ. Fourier

Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ που σε μια περίοδό του, $T_0 = 2$, γράφεται ως

$$x_{T_0}(t) = \begin{cases} -t, & -1 < t < 0 \\ t, & 0 < t < 1 \end{cases} \tag{8}$$

που αποτελεί το 4ο Θέμα της προόδου σας. Στο 5ο Θέμα της προόδου σας, σας ζητήθηκε να δείξετε ότι μια περίοδος του περιοδικού αυτού σήματος έχει μετασχ. Fourier

$$X(f) = 2\mathrm{sinc}(2f) - \mathrm{sinc}^2(f) \tag{9}$$

Δείξτε ότι οι συντελεστές Fourier μπορούν να υπολογιστούν μέσω του παραπάνω μετασχ. Fourier μιας περιόδου του περιοδικού σήματος ως

$$X_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2}, \ k \text{ περιττά}, k \neq 0 \tag{10}$$

<u>Hint:</u> Σε κάποιο σημείο θα χρειαστεί να ελέγξετε τις τιμές των $\sin(\pi k)$ και $\sin^2(\pi k/2)$, για k άρτια και περιττά.

[1] Δείτε το παράδειγμα 0.2.14 των σημειώσεων υποβάθρου σας.