ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς**
**Εαρινό Εξάμηνο 2023-24**
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής**

**Τρίτη Σειρά Ασκήσεων**

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/3/2024 Ημερομηνία Παράδοσης: 29/3/2024

Οι ασκήσεις με [$\star$] είναι **bonus**, $+10$ μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι $80/70$ σε αυτή τη σειρά.)

**Άσκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις**
Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{5}{2}\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 3\frac{d}{dt}x(t) + 3x(t) \tag{1}$$

ως ένα σύστημα. Αν $y'(0^-) = 1$, $y(0^-) = 0$, βρείτε

(α') το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης και τις χαρακτηριστικές ρίζες του.

(β') την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος, $y_{zi}(t)$.

(γ') την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

(δ') την απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος, $y_{zs}(t)$, για είσοδο $x(t) = u(t)$.

(ε') αν το σύστημα είναι ευσταθές και δικαιολογήστε.

Απ: (β) $y_{zi}(t) = \left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right)u(t)$, (γ) $h(t) = \left(2e^{-2t} + e^{-t/2}\right)u(t)$, (δ) $y_{zs}(t) = \left(3 - e^{-2t} - 2e^{-t/2}\right)u(t)$

**[$\star$] Άσκηση 2 - Σειρά Fourier I**
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t) = |\cos(\pi t)|$.

(α') Σχεδιάστε το σήμα (π.χ. στο διάστημα $t \in (-4, 4)$) και βρείτε την περίοδο $T_0$.

(β') Υπολογίστε αναλυτικά την εκθετική Σειρά Fourier μέσω του ορισμού των $X_k$.

(γ') Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης χρησιμοποιώντας μόνο τα $k = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

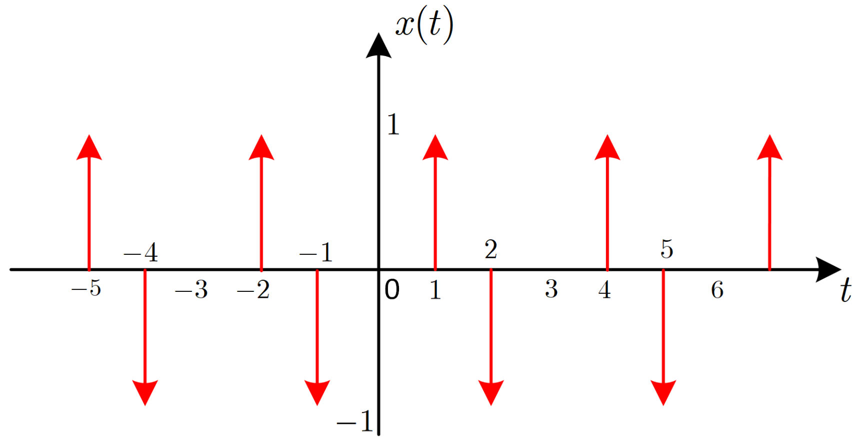
Απ: (β) $X_k = \frac{\sin\left(\pi\frac{1-2k}{2}\right)}{\pi(1-2k)} + \frac{\sin\left(\pi\frac{1+2k}{2}\right)}{\pi(1+2k)}$

**Άσκηση 3 - Σειρά Fourier II**
Έστω το περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο $T_0$, που φαίνεται στο Σχήμα 1. Βρείτε

(α') την περίοδό του, $T_0$

(β') τους συντελεστές Fourier του, $X_k$

Απ: (β) $X_k = \frac{2}{3}e^{-j\pi/2}\sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$




Σχήμα 1: *Περιοδικό Σήμα Άσκησης 3.*

**Άσκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες I**

Έστω ότι για ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ μας δίνονται οι παρακάτω πληροφορίες:

- είναι πραγματικό και άρτιο
- έχει περιόδο $T_0 = 1$ και συντελεστές Fourier $X_k$
- ισχύει $X_k = 0$ για $|k| \geq 2$
- ισχύει $\int_0^1 |x(t)|^2 dt = 1$
- ισχύει $\int_0^1 x(t) dt = \frac{1}{2}$

Βρείτε δυο σήματα που ικανοποιούν τις παραπάνω προδιαγραφές.

Απ: $x(t) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(2\pi t)$

**Άσκηση 5 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες II**

Έστω $x(t)$ ένα περιοδικό σήμα με θεμελιώδη συχνότητα $f_0$ και συντελεστές Fourier $X_k$. Πώς σχετίζεται η θεμελιώδης συχνότητα $\hat{f}_0$ του σήματος

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1) \tag{2}$$

με τη συχνότητα $f_0$ του $x(t)$; Βρείτε επίσης μια σχέση μεταξύ των συντελεστών Fourier $X_k$ του σήματος $x(t)$ και των $Y_k$ του $y(t)$.

Απ: $Y_k = e^{-j2\pi k f_0}(X_{-k} + X_k)$

**Άσκηση 6 - Συντελεστές Fourier**

Βρείτε την περίοδο και τους συντελεστές Fourier του σήματος

$$x(t) = \cos^4(t) \tag{3}$$

Απ.: $T_0 = \pi$, $X_0 = \frac{3}{8}$, $X_1 = X_{-1} = \frac{1}{4}$, $X_2 = X_{-2} = \frac{1}{16}$

**Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier I**

Χρησιμοποιείστε τον ορισμό για να βρείτε το μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων

(α') $x_1(t) = 2\delta\big(t - \frac{1}{2}\big)$, χρησιμοποιώντας ιδιότητες και σχέσεις της συνάρτησης Δέλτα.

(β') $x_2(t) = \mathrm{rect}(t-6)$

(γ') $x_3(t) = e^{-4t}u(t-1)$

(δ') $x_4(t) = 3(u(t) - u(t-2))$. Η σχεδίαση του σήματος θα σας βοηθήσει.

(ε') $x_5(t) = \begin{cases} At, & |t| < T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b te^{ct}dt = e^{ct}\left(\frac{ct-1}{c^2}\right)\Big|_a^b$.

Απ.: (α) $X_1(f) = 2e^{-j\pi f}$, (β) $X_2(f) = \mathrm{sinc}(f)e^{-j2\pi 6f}$, (γ) $X_3(f) = \frac{e^{-(j2\pi f+4)}}{4+j2\pi f}$,
(δ) $X_4(f) = 6e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f)$, (ε) $X_5(f) = jA\Big(\frac{T}{\pi f}\cos(2\pi fT) - \sin(2\pi fT)\frac{1}{2(\pi f)^2}\Big)$

**Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier - II**

Αν ένα σήμα $x(t)$ έχει μετασχ. Fourier $X(f)$, γράψτε κάθε μετασχηματισμό $Y(f)$ των παρακάτω σημάτων συναρτήσει του $X(f)$.

(α') $y(t) = x(at - b)$, $a \neq 0, b \in \Re$

(β') $y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau$

(γ') $y(t) = tx(2t-1)$

(δ') $y(t) = e^{j2t}x(t-1)$

(ε') $y(t) = tx(t)\sin(3t)$

(ϛ') $y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) * (e^{-jt}x(t))$

Απ.: (α) $\frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{-j2\pi fb/a}$, (β) $\frac{1}{2}\left(X(0)\delta(f) + \frac{X(f/2)}{j\pi f}\right)$, (γ) $\frac{1}{4}\frac{j}{2\pi}X'\left(\frac{f}{2}\right)e^{-j\pi f} + \frac{1}{4}X\left(\frac{f}{2}\right)e^{-j\pi f}$
(δ) $X\left(f - \frac{1}{\pi}\right)e^{-j2\pi(f-(1/\pi))}$, (ε) $\frac{j}{2\pi}\left(\frac{1}{2j}X'\left(f - \frac{3}{2\pi}\right) - \frac{1}{2j}X'\left(f + \frac{3}{2\pi}\right)\right)$, (στ) $j2\pi fX(f)X\left(f + \frac{1}{2\pi}\right)$.