ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Διαφορικές Εξισώσεις
Έστω η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{5}{2}\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = 3\frac{d}{dt}x(t) + 3x(t) \tag{1}$$

ως ένα σύστημα. Αν $y'(0^-) = 1$, $y(0^-) = 0$, βρείτε

(α΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 \tag{2}$$

και οι χαρακτηριστικές ρίζες του είναι

$$\lambda^2 + \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda+2)(\lambda+\frac{1}{2}) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \tag{3}$$

(β΄) Η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t/2},\ \ t > 0 \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες

$$y_{zi}(0^-) = 0 \Longleftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \tag{5}$$

$$y'_{zi}(0^-) = 1 \Longleftrightarrow -2c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 0 \tag{6}$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $c_1 = -\frac{2}{3}$ και $c_2 = \frac{2}{3}$, οπότε

$$y_{zi}(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2},\ \ t > 0 \tag{7}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right)u(t) \tag{8}$$

(γ΄) Έστω το σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{5}{2}\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \tag{9}$$

Η κρουστική του απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_o(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{-t/2},\ \ t > 0 \tag{10}$$

Χρησιμοποιώντας τις ψευδο-αρχικές συνθήκες

$$h_o(0^+) = 0 \Longleftrightarrow a_1 + a_2 = 0 \tag{11}$$

$$h'_o(0^+) = 1 \Longleftrightarrow -2a_1 - \frac{1}{2}a_2 = 0 \tag{12}$$

και λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $a_1 = -\frac{2}{3}$ και $a_2 = \frac{2}{3}$, οπότε

$$h_o(t) = -\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2},\ \ t > 0 \tag{13}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) u(t) \tag{14}$$

Για το σύστημα της εκφώνησης, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$\begin{aligned}
h(t) = 3h_o'(t) + 3h_o(t) &= 3\left(\left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) u(t)\right)' + 3\left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) u(t) &(15)\\
&= 3\left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right)' u(t) + 3\left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) u'(t) + 3\left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) u(t) &(16)\\
&= 3\left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t/2}\right) u(t) + 3\left(-\frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-t/2}\right) \delta(t) + \left(-2e^{-2t} + 2e^{-t/2}\right) u(t) &(17)\\
&= 3\left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t/2}\right) u(t) + 3\left(-\frac{2}{3}e^{0} + \frac{2}{3}e^{0}\right) \delta(t) + \left(-2e^{-2t} + 2e^{-t/2}\right) u(t) &(18)\\
&= 3\left(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t/2}\right) u(t) + \left(-2e^{-2t} + 2e^{-t/2}\right) u(t) &(19)\\
&= \left(4e^{-2t} - e^{-t/2}\right) u(t) + \left(-2e^{-2t} + 2e^{-t/2}\right) u(t) &(20)\\
&= \left(2e^{-2t} + e^{-t/2}\right) u(t) &(21)
\end{aligned}$$

(δ΄) Η απόκριση μηδενικής κατάστασης του συστήματος, $y_{zs}(t)$, για είσοδο $x(t) = u(t)$ δινεται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου, οπότε

$$\begin{aligned}
y_z s(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau &(22)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(2e^{-2\tau} + e^{-\tau/2}\right) u(\tau)\right) u(t-\tau)d\tau &(23)\\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau/2}u(\tau)u(t-\tau)d\tau &(24)\\
&= 2\int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau/2}d\tau &(25)
\end{aligned}$$

γιατί $u(\tau)u(t-\tau) = 1$ για $0 < \tau < t$. Οπότε

$$\begin{aligned}
y_{zs}(t) &= 2\int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau + \int_{0}^{t} e^{-\tau/2}d\tau &(26)\\
&= -\frac{1}{2}2e^{-2\tau}\Big|_0^t - 2e^{-\tau/2}\Big|_0^t &(27)\\
&= -e^{-2\tau}\Big|_0^t - 2e^{-\tau/2}\Big|_0^t &(28)\\
&= -e^{-2t} + 1 - 2(e^{-t/2} - 1) &(29)\\
&= 3 - e^{-2t} - 2e^{-t/2} &(30)
\end{aligned}$$

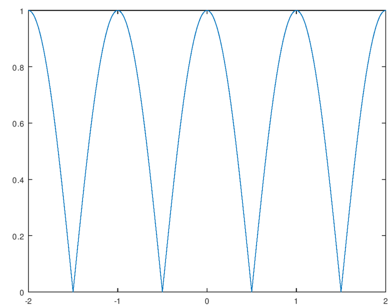
για $t > 0$, οπότε

$$y_{zs}(t) = \left(3 - e^{-2t} - 2e^{-t/2}\right) u(t) \tag{31}$$

(ε΄) το σύστημα είναι ευσταθές γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι όλες αρνητικές. Εναλλακτικά, η κρουστική του απόκριση είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (που όμως θέλει πράξεις ή κάποια περαιτέρω εξήγηση για να δειχθεί).

[$\star$] Άσκηση 2 - Σειρά Fourier I

(α΄) Η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 1$, δείτε το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 2α.*

.

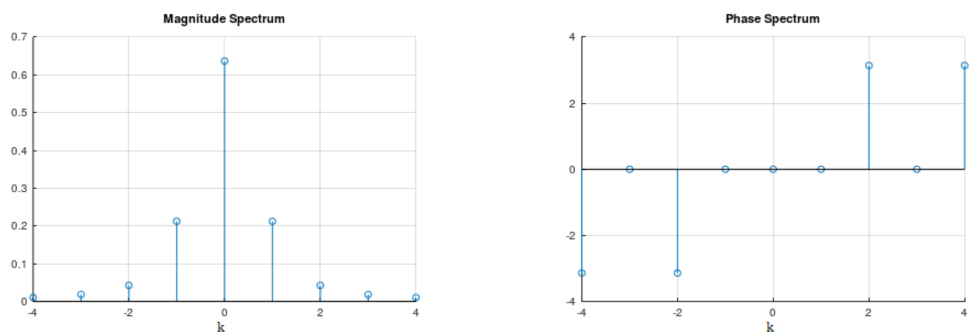
(β΄) Έχουμε

$$X_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)dt = \int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi t)dt = \frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\Big]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{\pi}(1-(-1)) = \frac{2}{\pi} \tag{32}$$

και

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-1/2}^{1/2} x(t)e^{-j2\pi k/T_0 t}dt = \int_{-1/2}^{1/2}\cos(\pi t)e^{-j2\pi k t}dt && (33)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{j\pi t}e^{-j2\pi k t}dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi t}e^{-j2\pi k t}dt && (34)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi(2k-1)t}dt + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\pi(2k+1)t}dt && (35)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{-j\pi(2k-1)}e^{-j\pi(2k-1)t}\Big]_{-1/2}^{1/2} + \frac{1}{2}\frac{1}{-j\pi(2k+1)}e^{-j\pi(2k+1)t}\Big]_{-1/2}^{1/2} && (36)\\
&= -\frac{1}{j2\pi(2k-1)}(e^{-j\pi(2k-1)/2} - e^{j\pi(2k-1)/2}) - \frac{1}{j2\pi(2k+1)}(e^{-j\pi(2k+1)/2} - e^{j\pi(2k+1)2}) && (37)\\
&= -\frac{1}{j2\pi(2k-1)}(-2j\sin(\pi(2k-1)/2)) - \frac{1}{j2\pi(2k+1)}(-2j\sin(\pi(2k+1)/2)) && (38)\\
&= \frac{\sin(\pi(2k-1)/2)}{\pi(2k-1)} + \frac{\sin(\pi(2k+1)/2)}{\pi(2k+1)} && (39)
\end{aligned}$$

(γ΄) Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 2γ.*

.

Άσκηση 3 - Σειρά Fourier II

(α΄) Προφανώς η περίοδος του σήματος είναι $T_0 = 3$.

(β΄) Το σήμα μπορεί να χωριστεί σε άθροισμα δυο υπο-σημάτων, του

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k - 1) \tag{40}$$

και του

$$x_2(t) = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 3k + 1) \tag{41}$$

τα οποία είναι χρονικές μετατοπίσεις του γνωστού σήματος

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) \longleftrightarrow X_k = \frac{1}{T_0} \tag{42}$$

και αναπτύσσονται σε σειρά Fourier σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης ως

$$X_{1k} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi k/3} \tag{43}$$

$$X_{2k} = -\frac{1}{3} e^{j2\pi k/3} \tag{44}$$

Οπότε το συνολικό σήμα θα έχει συντελεστές Fourier

$$X_k = X_{1k} + X_{2k} = \frac{1}{3} e^{-j2\pi k/3} - \frac{1}{3} e^{j2\pi k/3} = -\frac{2j}{3} \sin(2\pi k/3) = \frac{2}{3} e^{-j\pi/2} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) \tag{45}$$

Άσκηση 4 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες II

Αφού το σήμα είναι άρτιο και πραγματικό, οι συντελεστές Fourier του θα είναι πραγματικοί αριθμοί, και μάλιστα θα ισχύει

$$X_k = X_{-k} \tag{46}$$

Το πλήθος των συντελεστών είναι 3, αφού $X_k = 0$ για $|k| \geq 2$: οι X_{-1}, X_0, X_1, και λόγω της συμμετρίας θα είναι $X_0, X_{-1} = X_1, X_1$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x(t)dt = \frac{1}{2} \tag{47}$$

ισούται με το συντελεστή X_0, οπότε $X_0 = 1/2$. Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt = 1 \tag{48}$$

αποτελεί την ισχύ του περιοδικού σήματος, η οποία μπορεί να υπολογιστεί στο πεδίο της συχνότητας ως

$$\sum_{k=-1}^{1} |X_k|^2 = |X_0|^2 + 2|X_1|^2 = \frac{1}{4} + 2|X_1|^2 = 1 \Longrightarrow |X_1|^2 = \frac{3}{8} \Longrightarrow |X_1| = \sqrt{\frac{3}{8}} \tag{49}$$

Οπότε το σήμα θα είναι το

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}} e^{-j2\pi t} + \sqrt{\frac{3}{8}} e^{j2\pi t} = \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{3}{8}} \cos(2\pi t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \cos(2\pi t) \tag{50}$$

Άσκηση 5 - Σειρές Fourier - Ιδιότητες III

Το σήμα $y(t)$ είναι απλά το άθροισμα δυο σημάτων: το ένα έχει μετατοπιστεί κατά $t_0 = 1$ δεξιά, άρα διατηρεί την ίδια περίοδο και άρα την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, ενω το άλλο έχει μετατοπιστεί κατά την ίδια ποσότητα $t_0 = 1$ αριστερά και αντιστραφεί χρονικά, άρα κι αυτό διατηρεί την ίδια περίοδο και την ίδια θεμελιώδη συχνότητα. Το άθροισμα των δυο σημάτων θα είναι κι αυτό περιοδικό με την ίδια θεμελιώδη συχνότητα, f_0.

Το άθροισμα

$$y(t) = x(1-t) + x(t-1) \tag{51}$$

έχει συντελεστές Fourier

$$Y_k = X_{-k}e^{j2\pi(-k)f_0} + X_k e^{-j2\pi k f_0} = e^{-j2\pi k f_0}(X_k + X_{-k}) \tag{52}$$

Άσκηση 6 - Συντελεστές Fourier II

Το σήμα γράφεται διαδοχικά ως

$$\begin{aligned}
x(t) = \cos^4(t) = \big(\cos^2(t)\big)^2 &= \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\Big)^2 && (53)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos^2(2t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos^2(2t) && (54)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4t)\Big) && (55)\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cos(4t) && (56)\\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t) && (57)\\
&= \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{j2t} + \frac{1}{4}e^{-j2t} + \frac{1}{16}e^{j4t} + \frac{1}{16}e^{-j4t} && (58)
\end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγετε και εφαρμόζοντας διαδοχικά τις σχέσεις του Euler από την αρχή. Προφανώς η θεμελιώδης συχνότητα του σήματος είναι $\omega_0 = 2\pi f_0 = \text{ΜΚΔ}\{2,4\} = 2$, οπότε η περίοδος δίνεται ως $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$, ενώ οι συντελεστες Fourier φαίνονται από την τελευταια έκφραση παραπάνω, ως

$$X_0 = \frac{3}{8}, X_1 = X_{-1} = \frac{1}{4}, X_2 = X_{-2} = \frac{1}{16} \tag{59}$$

Άσκηση 7 - Μετασχηματισμός Fourier I

(α')

$$\begin{aligned}
X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\delta\big(t - \frac{1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt && (60)\\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\big(t-\frac{1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt = 2e^{-j2\pi ft}\Big]_{t=1/2} = 2e^{-j\pi f} && (61)
\end{aligned}$$

(β')

$$\begin{aligned}
X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t-6)e^{-j2\pi ft}dt && (62)\\
&= \int_{11/2}^{13/2} e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j2\pi f13/2} - e^{-j2\pi f11/2}) && (63)\\
&= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi 6f}(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}) = \frac{1}{-j2\pi f}(-2j\sin(\pi f))e^{-j2\pi 6f} && (64)\\
&= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi f)e^{-j2\pi 6f} = \text{sinc}(f)e^{-j2\pi 6f} && (65)
\end{aligned}$$

(γ')

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4t}u(t-1)e^{-j2\pi ft}dt \tag{66}$$
$$= \int_{1}^{+\infty} e^{-4t}e^{-j2\pi ft}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-(j2\pi f+4)t}dt \tag{67}$$
$$= \frac{1}{-(j2\pi f+4)}e^{-(j2\pi f+4)t}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{-(j2\pi f+4)}(0-e^{-(j2\pi f+4)}) \tag{68}$$
$$= \frac{1}{-(j2\pi f+4)}(0-e^{-(j2\pi f+4)}) = \frac{e^{-(j2\pi f+4)}}{4+j2\pi f} \tag{69}$$

(δ')

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 3(u(t)-u(t-2))e^{-j2\pi ft}dt \tag{70}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 3\mathrm{rect}\big(\frac{t-1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\big(\frac{t-1}{2}\big)e^{-j2\pi ft}dt \tag{71}$$
$$= 3\int_{0}^{2} e^{-j2\pi ft}dt = 3\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_0^2 \tag{72}$$
$$= 3\frac{1}{-j2\pi f}(e^{-j4\pi f}-1) = 3\frac{1}{-j2\pi f}e^{-2j\pi f}(-2j\sin(2\pi f)) \tag{73}$$
$$= 3e^{-2j\pi f}\frac{1}{\pi f}\sin(2\pi f) = 6e^{-j2\pi f}\mathrm{sinc}(2f) \tag{74}$$

(ε')

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T}^{T} Ate^{-j2\pi ft}dt \tag{75}$$
$$= A\int_{-T}^{T} te^{-j2\pi ft}dt = A\int_{-T}^{T} te^{-j2\pi ft}dt \tag{76}$$
$$= Ae^{-j2\pi ft}\Big(\frac{-j2\pi ft-1}{(-j2\pi f)^2}\Big)\Big]_{-T}^{T} \tag{77}$$
$$= Ae^{-j2\pi fT}\Big(\frac{-j2\pi fT-1}{(-j2\pi f)^2}\Big) - Ae^{j2\pi fT}\Big(\frac{j2\pi fT-1}{(-j2\pi f)^2}\Big) \tag{78}$$
$$= A\frac{j2\pi fT}{(2\pi f)^2}e^{-j2\pi fT} + Ae^{-j2\pi fT}\frac{1}{(2\pi f)^2} + A\frac{j2\pi fT}{(2\pi f)^2}e^{j2\pi fT} - Ae^{j2\pi fT}\frac{1}{(2\pi f)^2} \tag{79}$$
$$= jAT\frac{1}{2\pi f}2\cos(2\pi fT) - A2j\sin(2\pi fT)\frac{1}{(2\pi f)^2} \tag{80}$$
$$= jAT\frac{1}{\pi f}\cos(2\pi fT) - j2A\sin(2\pi fT)\frac{1}{(2\pi f)^2} \tag{81}$$
$$= jA\Big(\frac{T}{\pi f}\cos(2\pi fT) - \sin(2\pi fT)\frac{1}{2(\pi f)^2}\Big) \tag{82}$$

Άσκηση 8 - Μετασχηματισμός Fourier - II

(α') Είναι

$$y(t) = x(at-b) = z(at), a \neq 0, b \in \Re \tag{83}$$

με $z(t) = x(t-b)$, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{|a|}Z\Big(\frac{f}{a}\Big) = \frac{1}{|a|}\Big[X(f)e^{-j2\pi fb}\Big]_{f=f/a} = \frac{1}{|a|}X\Big(\frac{f}{a}\Big)e^{-j2\pi fb/a} \tag{84}$$

(β΄) Είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau = z(2t) \tag{85}$$

με $z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$, οπότε

$$Y(f) = \frac{1}{2}Z\Big(\frac{f}{2}\Big) = \frac{1}{2}\Big[\frac{X(0)}{2}\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}\Big]_{f=f/2} = \frac{1}{2}\Big(X(0)\delta(f) + \frac{X(f/2)}{j\pi f}\Big) \tag{86}$$

αφού $\delta(f/2) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\delta(f) = 2\delta(f)$.

(γ΄) Είναι

$$\begin{aligned} y(t) = tx(2t-1) &= \frac{1}{2}(2t-1+1)x(2t-1) && (87)\\ &= \frac{1}{2}(2t-1)x(2t-1) + \frac{1}{2}x(2t-1) && (88)\\ &= \frac{1}{2}z(2t-1) + \frac{1}{2}x(2t-1) && (89)\\ &= \frac{1}{2}w(t) + \frac{1}{2}x(2t-1) && (90) \end{aligned}$$

και άρα

$$Y(f) = \frac{1}{2}W(f) + \frac{1}{2}\frac{1}{2}X\left(\frac{f}{2}\right)e^{-j\pi f} \tag{91}$$

με

$$w(t) = z(2t-1) \longleftrightarrow W(f) = \frac{1}{2}Z\left(\frac{f}{2}\right)e^{-j\pi f}$$

και

$$z(t) = tx(t) \longleftrightarrow Z(f) = \frac{j}{2\pi}X'(f)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} Y(f) &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}Z\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}X\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} && (92)\\ &= \frac{1}{4}\frac{j}{2\pi}X'\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} + \frac{1}{4}X\Big(\frac{f}{2}\Big)e^{-j\pi f} && (93) \end{aligned}$$

(δ΄) Είναι

$$y(t) = e^{j2t}x(t-1) \longleftrightarrow Y(f) = \Big[X(f)e^{-j2\pi f}\Big]_{f=f-\frac{1}{\pi}} = X\Big(f - \frac{1}{\pi}\Big)e^{-j2\pi(f-(1/\pi))} \tag{94}$$

(ε΄) Είναι

$$y(t) = tx(t)\sin(3t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}X(f) * \Big(\frac{1}{2j}\delta(f-f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f+f_0)\Big) = \frac{j}{2\pi}\Big(\frac{1}{2j}X'(f-f_0) - \frac{1}{2j}X'(f+f_0)\Big) \tag{95}$$

με $f_0 = \frac{3}{2\pi}$

(ϛ΄) Είναι

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) * (e^{-jt}x(t)) \longleftrightarrow Y(f) = j2\pi f X(f) X\Big(f + \frac{1}{2\pi}\Big) \tag{96}$$