

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 23/2/2024

Ημερομηνία Παράδοσης: 5/3/2024

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 σε αυτή τη σειρά.)

Άσκηση 1 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler II

(α) Γράψτε σε πολική μορφή $z = |z|e^{j\phi}$ το μιγαδικό

$$z = -1 - j \quad (1)$$

Η φάση του πρέπει να ανήκει στο $(-\pi, \pi]$.

(β) Λύστε την εξίσωση

$$\operatorname{Re}\{(-1 - j)e^{j2\theta}\} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

$$\text{Απ.: (β) } \theta = \begin{cases} k\pi + \frac{11\pi}{24} \\ k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler II

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του Euler, υπολογίστε το

$$\int_0^\pi \sin(4\theta) \cos(5\theta) d\theta \quad (3)$$

$$\text{Απ.: } -\frac{8}{9}$$

Άσκηση 3 - Σήματα

(α) Ένα σήμα λέγεται *άρτιο* αν ισχύει ότι

$$x(t) = x(-t) \quad (4)$$

ενώ λέγεται *περιττό* αν

$$x(t) = -x(-t) \quad (5)$$

Είναι το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6)$$

άρτιο ή περιττό;

(β) Οποιοδήποτε σήμα όμως μπορεί να διασπασθεί σε ένα άρτιο μέρος και ένα περιττό μέρος, ως

$$x_{\text{άρτιο}}(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \quad (7)$$

$$x_{\text{περιττό}}(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \quad (8)$$

Βρείτε το άρτιο και το περιττό μέρος των σημάτων:

i. $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t) \cos(t)$

ii. $x(t) = (1 + t^3) \cos^3(10t)$

Απ.: (α) περιττό,
 (β) άρτιο: $\cos(t)$, περιττό: $\sin(t)(1 + \cos(t))$
 άρτιο: $\cos^3(10t)$, περιττό: $t^3 \cos^3(10t)$

Άσκηση 4 - Ενέργεια και Ισχύς

Ελέγξτε τα παρακάτω σήματα ως προς το αν είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος (ή τίποτε από τα δυο), υπολογίζοντας την πιο πιθανή από τις δυο μετρικές, σύμφωνα με όσα γνωρίζετε από τις διαλέξεις.

(α) $x(t) = 2 \cos(\pi t) + \sin(10\pi t)$, $-\infty < t < +\infty$

(β) $x(t) = tu(t)$

(γ) $x(t) = t$, $-\infty < t < +\infty$

(δ) $x(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T}\right)$

Απ.: (α) $\frac{5}{2}$, (β) $-$, (γ) $-$, (δ) A^2T

[*] Άσκηση 5 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

I. Σχεδιάστε τα σήματα

(α) $u(t - 5) - u(t - 7)$

(β) $u(t - 5) + u(t - 7)$

(γ) $t^2(u(t - 1) - u(t - 2))$

(δ) $(t - 4)(u(t - 2) - u(t - 4))$

II. Στο Σχήμα 1, ισχύει ότι $x(-t) = x_1(t)$. Εκφράστε τα σήματα $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ με χρονικά μετατοπισμένους/κλιμακωμένους/αντιστραμμένους όρους των $x(t)$, $x_1(t)$. Για παράδειγμα, έχουμε $x_2(t) = x(t - 1) + x_1(t - 1)$

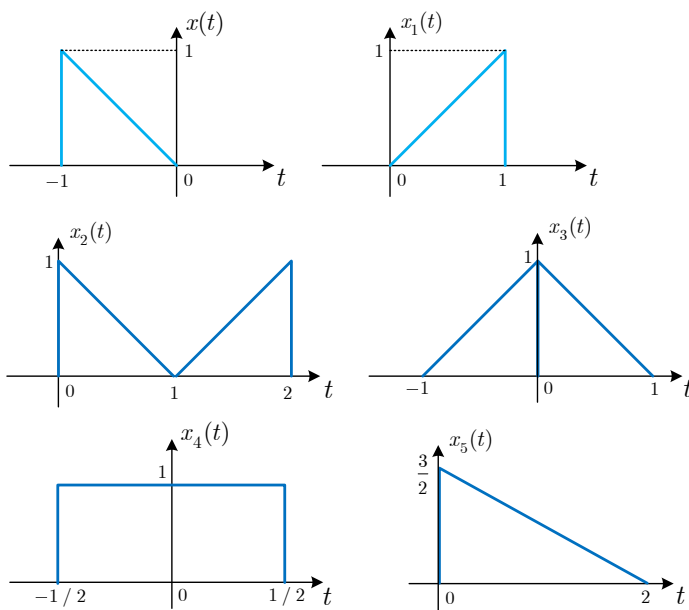
Άσκηση 6 - Συναρτήσεις Δέλτα

Θεωρήστε το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{\Delta}, & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 1, & t > \Delta/2 \\ 0, & t < -\Delta/2 \end{cases} \quad (9)$$

Το σήμα αυτό περνά από ένα σύστημα διαφοριστή, δηλ. η έξοδος του συστήματος είναι απλά η παράγωγος του $x(t)$:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (10)$$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5.

(α) Σχεδιάστε το σήμα $x(t)$.

(β) Δείξτε ότι η είσοδος $x(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$x(t) = \frac{t}{\Delta} \left[u\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) - u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \right] + u\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) \quad (11)$$

(γ) Δείξτε ότι η έξοδος $y(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y(t) = \frac{1}{\Delta} \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\Delta}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t + \frac{\Delta}{2}\right) \quad (12)$$

(δ) Δείξτε ότι

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} y(t) = \delta(t) \quad (13)$$

Άσκηση 7 - Ραδιοφωνία AM και FM

Αποφασίστε να ανοίξετε ένα ραδιοφωνικό σταθμό ο οποίος θα παίζει rock μουσική.

I. Αρχικά, υποθέστε ότι θέλετε να μεταδώσετε μέσω κεραιάς (δηλ. ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα) ένα απλό ημίτονο συχνότητας $f_0 = 440$ Hz (νότα ΛΑ) ως δοκιμαστική μετάδοση. Για να κατασκευάσετε την κεραιά, ρωτάτε μια φίλη σας ηλεκτρολόγο μηχανικό που ξέρει Θεωρία Κεραιών. Αυτή σας πληροφορεί ότι η κεραιά πρέπει να έχει μέγεθος της τάξης του μήκους κύματος λ του σήματος που πρέπει να εκπέμψετε (δηλ. η κεραιά πρέπει να έχει μήκος $L \approx \lambda$). Προβληματίστες αρκετά, γιατί γνωρίζετε ότι η ταχύτητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι $c = 3 \times 10^8$ m/s και θυμάστε από τη Φυσική σας ότι $c = \lambda f$. Τι είναι αυτό που σας προβληματίζει;

II. Αποφασίζετε να αυξήσετε τη συχνότητα του σήματος, μια και οι rock ήχοι περιέχουν κυρίως υψηλότερες συχνότητες. Ένας φίλος σας που γνωρίζει ακουσική, σας λέει ότι η ροκ μουσική περιέχει συχνότητες (ημίτονα δηλαδή) από 100 έως 16000 Hz. Για $f_0 = 10000$ Hz, πόσο πρέπει να είναι το μήκος της κεραιάς που πρέπει να κατασκευάσετε για να μπορείτε να μεταδώσετε το σχετικό ημίτονο; Τι συμπέρασμα βγάξετε για το μήκος της κεραιάς σε σχέση με την αυξομείωση της συχνότητας μετάδοσης;

III. Έστω ένα σήμα $x(t)$ που πολλαπλασιάζεται με ένα ημιτονοειδές συχνότητας f_c , κατασκευάζοντας έτσι το σήμα

$$y(t) = Ax(t) \cos(2\pi f_c t + \phi), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi] \quad (14)$$

Αν θεωρήσετε ότι το $x(t)$ είναι ένα σήμα πληροφορίας (π.χ. μια ραδιοφωνική εκπομπή), τότε το $y(t)$ είναι το σήμα που εκπέμπεται στη ραδιοφωνία ΑΜ.

- (α) Δείξτε ότι το σύστημα είναι γραμμικό, δηλ. ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της ομογένειας και της αθροιστικότητας.
 (β) Δείξτε ότι το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

IV. Έστω ένα σήμα $x(t)$ που χρησιμοποιείται για να κατασκευαστεί το σήμα

$$y(t) = \cos\left(2\pi f_c t + k \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) \quad (15)$$

με k σταθερά. Αν θεωρήσετε ότι το $x(t)$ είναι ένα σήμα πληροφορίας (π.χ. μια ραδιοφωνική εκπομπή), τότε το $y(t)$ είναι το σήμα που εκπέμπεται στη ραδιοφωνία FM.

- (α) Δείξτε ότι το σύστημα είναι μη γραμμικό, δηλ. ότι δεν ικανοποιεί είτε την ιδιότητα της ομογένειας είτε αυτή της αθροιστικότητας.
 (β) Δείξτε ότι το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό, κατασκευάζοντας το ακόλουθο αντιπαράδειγμα: θέστε $x(t) = \delta(t)$, και εκτιμήστε το $y(t)$ για $t = 0^+$. Στη συνέχεια, θέστε $x(t) = \delta(t - t_0)$, $t_0 > 0$, και εκτιμήστε το $y(t_0^+)$. Το σύμβολο a^+ σημαίνει ουσιαστικά $a + \epsilon$, με $\epsilon > 0$ και απειροστά μικρό.