ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler I

(α΄) Θα έχουμε

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \tag{1}$$

και

$$\phi = \tan^{-1}\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \tag{2}$$

Οπότε

$$z = \sqrt{2}e^{-j3\pi/4} \tag{3}$$

(β΄) Είναι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big\{(-1-j)e^{j2\theta}\Big\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} && (4)\\
\mathrm{Re}\Big\{\sqrt{2}e^{-j3\pi/4}e^{j2\theta}\Big\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} && (5)\\
\mathrm{Re}\Big\{\sqrt{2}e^{j(2\theta-3\pi/4)}\Big\} &= \sqrt{\frac{3}{2}} && (6)\\
\sqrt{2}\cos(2\theta - 3\pi/4) &= \sqrt{\frac{3}{2}} && (7)\\
\cos(2\theta - 3\pi/4) &= \frac{\sqrt{3}}{2} && (8)\\
\cos(2\theta - 3\pi/4) &= \cos(\pi/6) && (9)\\
2\theta - \frac{3\pi}{4} &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} && (10)\\
2\theta &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} && (11)\\
\theta &= k\pi \pm \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{8} && (12)\\
&= \begin{cases} k\pi + \frac{11\pi}{24} \\ k\pi + \frac{7\pi}{24} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} && (13)
\end{aligned}$$

Άσκηση 2 - Μιγαδικοί Αριθμοί - Σχέσεις Euler II

Είναι

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(4\theta)\cos(5\theta)d\theta &= \frac{1}{2}\frac{1}{2j}\int_0^\pi (e^{j4\theta} - e^{-j4\theta})(e^{j5\theta} + e^{-j5\theta})d\theta && (14)\\
&= \frac{1}{4j}\int_0^\pi (e^{j9\theta} + e^{-j\theta} - e^{j\theta} - e^{-j9\theta})d\theta && (15)\\
&= \frac{1}{j4}\int_0^\pi (2j\sin(9\theta) - 2j\sin(\theta))d\theta && (16)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2j}{j4}\int_0^{\pi}(\sin(9\theta)-\sin(\theta))d\theta \tag{17}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}\cos(9\theta)+\cos(\theta)\Big)\Big]_0^{\pi} \tag{18}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}\cos(9\pi)+\cos(\pi)\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}\cos(0)+\cos(0)\Big) \tag{19}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{9}-1\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{9}+1\Big) = -\frac{8}{9} \tag{20}$$

Άσκηση 3 - Σήματα

(α΄) Για το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{21}$$

έχουμε ότι

$$x(-t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T \le -t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \neq x(t) \tag{22}$$

λόγω του ότι $\sin(-x) = -\sin(x)$, ενώ

$$-x(-t) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{-\pi t}{T}\right), & -T \le -t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = x(t) \tag{23}$$

άρα το σήμα είναι περιττό.

(β΄) Θα έχουμε

i. Το σήμα $x(-t) = \cos(-t)+\sin(-t)+\sin(-t)\cos(-t) = \cos(t)-\sin(t)-\sin(t)\cos(t)$, οπότε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) \tag{24}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(t)+\sin(t)+\sin(t)\cos(t)+\cos(t)-\sin(t)-\sin(t)\cos(t)) \tag{25}$$
$$= \cos(t) \tag{26}$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t)-x(-t)) \tag{27}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(t)+\sin(t)+\sin(t)\cos(t)-\cos(t)+\sin(t)+\sin(t)\cos(t)) \tag{28}$$
$$= \sin(t)+\sin(t)\cos(t) \tag{29}$$
$$= \sin(t)(1+\cos(t)) \tag{30}$$

ii. Το σήμα $x(-t) = (1+(-t)^3)\cos^3(-10t) = (1-t^3)\cos^3(10t)$, οπότε

$$x_{\text{άρτιο}} = \frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) \tag{31}$$
$$= \frac{1}{2}((1+t^3)\cos^3(10t)+(1-t^3)\cos^3(10t)) \tag{32}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos^3(10t)+t^3\cos^3(10t)+\cos^3(10t)-t^3\cos(10t)) \tag{33}$$

$$= \cos^3(10t) \tag{34}$$

και

$$x_{\text{περιττό}} = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \tag{35}$$
$$= \frac{1}{2}((1+t^3)\cos^3(10t) - (1-t^3)\cos^3(10t)) \tag{36}$$
$$= \frac{1}{2}(\cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t) - \cos^3(10t) + t^3\cos^3(10t)) \tag{37}$$
$$= t^3\cos^3(10t) \tag{38}$$

Άσκηση 4 - Ενέργεια και Ισχύς

Έχουμε

(α') Για το $x(t) = 2\cos(\pi t) + \sin(10\pi t), \quad -\infty < t < +\infty$ γνωρίζουμε από τις διαλέξεις ότι

$$\sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \longrightarrow P = \sum_i \frac{A_i^2}{2} \tag{39}$$

οπότε είναι σήμα ισχύος. Δηλ.

$$P_x = \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{5}{2} \tag{40}$$

(β') Το σήμα $x(t) = tu(t)$ απειρίζεται όταν το $t \to +\infty$, οπότε δεν είναι σίγουρα σήμα ενέργειας ούτε ισχύος. Ας το δείξουμε

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t) dt = \int_0^{+\infty} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big]_0^{+\infty} = +\infty \tag{41}$$

και

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2 u^2(t) dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2 u(t) dt \tag{42}$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_0^T t^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{t^3}{3}\Big]_0^T \tag{43}$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\Big(\frac{T^3}{3} - 0\Big) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{T^3}{3} \tag{44}$$
$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{T^3}{6T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{T^2}{6} \tag{45}$$
$$= +\infty \tag{46}$$

άρα πράγματι δεν είναι ούτε σήμα ισχύος ούτε σήμα ενέργειας.

(γ') Το σήμα $x(t) = t, \ -\infty < t < +\infty$ απειρίζεται όταν $|t| \to +\infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας ούτε ισχύος. Ας το δείξουμε.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = +\infty \tag{47}$$

και

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} t^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{t^3}{3}\Big]_{-T}^{T} \tag{48}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\left(\frac{T^3}{3} - \frac{(-T)^3}{3}\right) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\frac{2T^3}{3} \tag{49}$$

$$= \lim_{T\to+\infty} \frac{2T^3}{6T} = \lim_{T\to+\infty} \frac{T^2}{3} \tag{50}$$

$$= +\infty \tag{51}$$

(δ΄) Το σήμα $x(t) = A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και φραγμένου πλάτους, άρα είναι σίγουρα σήμα ενέργειας. Είναι

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2\text{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right)dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 t\Big]_{-T/2}^{T/2} = A^2\left(\frac{T}{2} - \frac{-T}{2}\right) = A^2 T \tag{52}$$

[$\star$] Άσκηση 5 - Μετασχηματισμοί Σημάτων

I. Τα σήματα

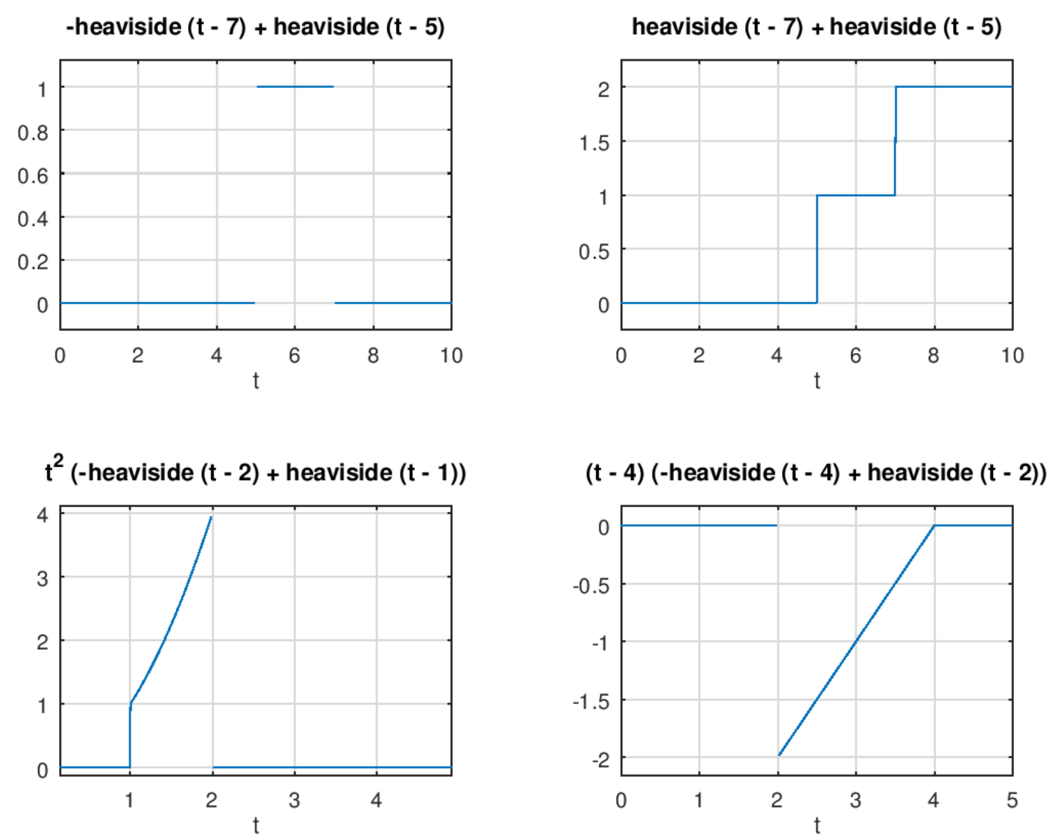
(α΄) $u(t-5) - u(t-7)$

(β΄) $u(t-5) + u(t-7)$

(γ΄) $t^2(u(t-1) - u(t-2))$

(δ΄) $(t-4)(u(t-2) - u(t-4))$

φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 5.*

II. Μπορούμε να γράψουμε

$$x_2(t) = x(t-1) + x_1(t-1) \tag{53}$$
$$x_3(t) = x(t-1) + x_1(t+1) \tag{54}$$
$$x_4(t) = x(t-0.5) + x_1(t+0.5) \tag{55}$$
$$x_5(t) = \frac{3}{2}x\Big(\frac{t}{2}-1\Big) \tag{56}$$

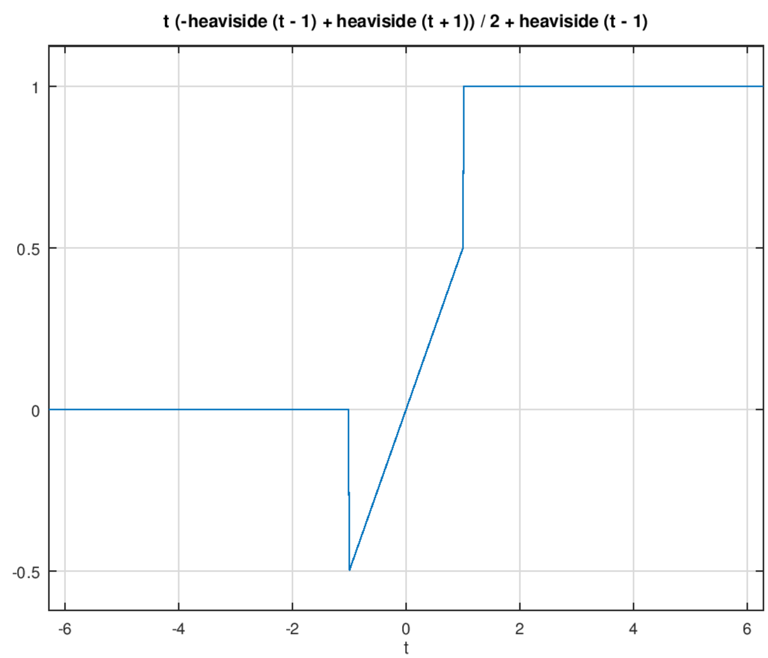
Οι παραπάνω απαντήσεις δεν είναι μοναδικές.

Άσκηση 6 - Συναρτήσεις Δέλτα

(α΄) Το σήμα

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\Delta}, & -\Delta/2 < t < \Delta/2 \\ 1, & t > \Delta/2 \\ 0, & t < -\Delta/2 \end{cases} \tag{57}$$

φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 6 για* $\Delta = 2$.

(β΄) Το σήμα στο διάστημα $-\Delta/2 < t < \Delta/2$ ουσιαστικά είναι μια πλάγια ευθεία πολλαπλασιασμένη με ένα τετραγωνικό παλμό με κέντρο το $t = 0$ και διάρκειας Δ. Άρα

$$x_1(t) = \frac{t}{\Delta}\text{rect}\Big(\frac{t}{\Delta}\Big) \tag{58}$$

Όμως ξέρουμε ότι ο τετραγωνικός παλμός μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο βηματικών. Οπότε

$$x_1(t) = \frac{t}{\Delta}(u(t+\Delta/2) - u(t-\Delta/2)) \tag{59}$$

Το σήμα είναι μηδενικό για $t < -\Delta/2$, οπότε το υπόλοιπο σήμα για $t > \Delta/2$ που είναι μοναδιαίο, μπορεί να γραφεί ως

$$x_2(t) = u(t - \Delta/2) \tag{60}$$

Συνολικά

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{t}{\Delta}\Big[u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big)\Big] + u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) \tag{61}$$

(γ΄) Παραγωγίζοντας το σήμα $x(t)$ όπως το βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}\Big[u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big)\Big] + \frac{d}{dt}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (62)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{d}{dt}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (63)\\
&= \Big(\frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}\Big)u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{t}{\Delta}\Big(\frac{d}{dt}u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big)\Big) - \Big(\frac{d}{dt}\frac{t}{\Delta}\Big)u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{t}{\Delta}\Big(\frac{d}{dt}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big)\Big) + \frac{d}{dt}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (64)\\
&= \frac{1}{\Delta}u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{t}{\Delta}\delta\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{t}{\Delta}\delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) + \delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (65)\\
&= \frac{1}{\Delta}u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}\frac{\Delta}{2}\delta\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}\frac{\Delta}{2}\delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) + \delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (66)\\
&= \frac{1}{\Delta}u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) + \delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (67)\\
&= \frac{1}{\Delta}u\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{\Delta}u\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) + \frac{1}{2}\delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) && (68)
\end{aligned}$$

Οι δυο πρώτοι όροι αποτελούν ένα τετραγωνικό παλμό διάρκειας Δ με κέντρο το $t = 0$ και πλάτος $1/\Delta$. Οπότε

$$y(t) = \frac{1}{\Delta}\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{\Delta}\Big) + \frac{1}{2}\delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big) \tag{69}$$

(δ΄) Όταν $\Delta \to 0$, ο τετραγωνικός παλμός γίνεται απειροστά στενός και αποκτά απείρως μεγάλο πλάτος, με επιφάνεια $\Delta \times 1/\Delta = 1$, άρα προσεγγίζει τη συνάρτηση Δέλτα. Οπότε

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{rect}\Big(\frac{t}{\Delta}\Big) = \delta(t) \tag{70}$$

Για τις υπόλοιπες συναρτήσεις Δέλτα της εξόδου $y(t)$, έχουμε ότι

$$\lim_{\Delta\to 0}\Big(\frac{1}{2}\delta\Big(t - \frac{\Delta}{2}\Big) - \frac{1}{2}\delta\Big(t + \frac{\Delta}{2}\Big)\Big) = 0 \tag{71}$$

γιατί οι δυο συναρτήσεις Δέλτα πλησιάζουν στη χρονική στιγμή $t = 0$, η μια από το 0^+ και η άλλη από το 0^-, κι επειδή οι επιφάνειές τους είναι $\pm\frac{1}{2}$, η μια ακυρώνει την άλλη. Άρα συνολικά

$$\lim_{\Delta\to 0} y(t) = \delta(t) \tag{72}$$

Άσκηση 7 - Ραδιοφωνία AM και FM

I. Αυτό που προβληματίζει είναι ότι αφού $L \approx \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{440} = 0.0068\times 10^8 = 68\times 10^4$ μέτρα, η κατασκευή της κεραίας είναι πρακτικά αδύνατη.

II. Το μήκος της κεραίας είναι αυτή τη φορά $L \approx \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{10^4} = 3\times 10^4$ μέτρα, που και πάλι καθιστά την κατασκευή της ιδιαίτερα μη πρακτική. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η συχνότητα που θέλουμε να μεταδώσουμε, τόσο μικραίνει το μήκος της κεραίας.

III. Για το σήμα

$$y(t) = Ax(t)\cos(2\pi f_c t + \phi), \;\; A > 0, \;\; \phi \in (-\pi, \pi] \tag{73}$$

έχουμε

(α΄) Ομογένεια: για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος θα είναι

$$y_{ax(t)}(t) = A(ax(t))\cos(2\pi f_c t + \phi) = a(Ax(t)\cos(2\pi f_c t + \phi)) = ay(t) \tag{74}$$

άρα είναι ομογενές. Αθροιστικότητα: για είσοδο $x_1(t) + x_2(t)$ η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned} y_{x_1+x_2}(t) &= A(x_1(t) + x_2(t))\cos(2\pi f_c t + \phi) && (75)\\ &= Ax_1(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) + Ax_2(t)\cos(2\pi f_c t + \phi) && (76)\\ &= y_1(t) + y_2(t) && (77) \end{aligned}$$

αρα είναι και αθροιστικό, οπότε είναι γραμμικό.

(β΄) Αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά t_0, η έξοδος γίνεται

$$y_{x(t-t_0)}(t) = Ax(t - t_0)\cos(2\pi f_c t + \phi) \tag{78}$$

ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά t_0, θα πάρουμε

$$y(t - t_0) = Ax(t - t_0)\cos(2\pi f_c(t - t_0) + \phi) = Ax(t - t_0)\cos(2\pi f_c t - 2\pi f_c t_0 + \phi) \neq y_{x(t-t_0)}(t) \tag{79}$$

άρα είναι χρονικά μεταβλητό.

IV. Για το σήμα $x(t)$

$$y(t) = \cos\left(2\pi f_c t + k\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right) \tag{80}$$

έχουμε

(α΄) Ομογένεια: για είσοδο $ax(t)$ η έξοδος θα είναι

$$y_{ax(t)}(t) = \cos\left(2\pi f_c t + k\int_{-\infty}^{t} ax(\tau)d\tau\right) = \cos\left(2\pi f_c t + ka\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right) \neq ay(t) \tag{81}$$

άρα δεν είναι ομογενές, ούτε και γραμμικό.

(β΄) Έχοντας υπόψη την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau\Big|_{t=c} = u(t)\Big|_{t=c} \tag{82}$$

θέτουμε $x(t) = \delta(t)$, και τότε

$$y(0^+) = \cos\left(2\pi f_c \cdot 0 + k\int_{-\infty}^{0^+} \delta(\tau)d\tau\right) = \cos(k) \tag{83}$$

Περιμένουμε ότι αν θέσουμε $x(t) = \delta(t - t_0)$, τότε αν το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, θα πρέπει $y(0^+) = y(t_0^+)$. Έχουμε

$$y(t_0^+) = \cos\left(2\pi f_c t_0 + k\int_{-\infty}^{t_0^+} \delta(\tau)d\tau\right) = \cos(2\pi f_c t_0 + k) \tag{84}$$

Οι τιμές $y(0^+)$ και $y(t_0^+)$ δεν ταυτίζονται, οπότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.