ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2023-24
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1 - Μιγαδικές Εξισώσεις Ι

(α΄) Θα έχουμε

$$z^* = j(z-1) = \begin{cases} z^* - j(z-1) = 0 \\ z = x + jy \end{cases} \tag{1}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε

$$x - jy - j(x + jy - 1) = 0 \tag{2}$$
$$x - jy - jx + y - j = 0 \tag{3}$$
$$x + y + j(-x - y - 1) = 0 \tag{4}$$

και εξισώνοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος με το μηδέν, παίρνουμε

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y - 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = -y \\ -x + x - 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = -y \\ -1 = 0, \quad \text{Αδύνατο} \end{cases} \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Άρα, η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

(β΄) Είναι

$$z^2 z^* = z \tag{7}$$
$$z^2 z^* - z = 0 \tag{8}$$
$$z(zz^* - 1) = 0 \tag{9}$$
$$z(|z|^2 - 1) = 0 \tag{10}$$
$$z = 0 \ \text{ ή } \ |z|^2 = 1 \tag{11}$$
$$z = 0 \ \text{ ή } \ \{z : |z| = 1\} \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

(γ΄) Είναι

$$|z + 3j| = 3|z| \tag{14}$$
$$|z + 3j|^2 = 9|z|^2 \tag{15}$$
$$x^2 + (y+3)^2 = 9(x^2 + y^2) \tag{16}$$
$$x^2 + y^2 + 6y + 9 = 9x^2 + 9y^2 \tag{17}$$
$$8x^2 + 8y^2 - 6y - 9 = 0 \tag{18}$$
$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y = \frac{9}{8} \tag{19}$$
$$x^2 + y^2 - \frac{3}{4}y + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{8} \tag{20}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{8} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \tag{21}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \tag{22}$$

$$\left|x + j\left(y - \frac{3}{8}\right)\right|^2 = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \tag{23}$$

$$\left|z - \frac{3}{8}j\right| = \frac{9}{8} \tag{24}$$

$$\tag{25}$$

αν $z = x + jy$.

Άσκηση 2 - Μιγαδικές Εξισώσεις ΙΙ

(α΄) Θέτοντας $z = x + jy$, έχουμε

$$\mathrm{Re}\Big\{z(1+j)\Big\} + zz^* = 0 \tag{26}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{(1+j)(x+jy)\Big\} + |z|^2 = 0 \tag{27}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{x + jy + jx - y\Big\} + x^2 + y^2 = 0 \tag{28}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{x - y + j(x+y)\Big\} + x^2 + y^2 = 0 \tag{29}$$

$$x - y + x^2 + y^2 = 0 \tag{30}$$

$$x^2 + x + y^2 - y = 0 \tag{31}$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{32}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

(β΄) Όμοια με το (α), θα είναι

$$\mathrm{Re}\Big\{z^2\Big\} + j\mathrm{Im}\Big\{z^*(1+2j)\Big\} = -3 \tag{35}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{(x+jy)^2\Big\} + j\mathrm{Im}\Big\{(x-jy)(1+2j)\Big\} = -3 \tag{36}$$

$$\mathrm{Re}\Big\{x^2 + j2xy - y^2\Big\} + j\mathrm{Im}\Big\{x + j2x - jy + 2y\Big\} = -3 \tag{37}$$

$$x^2 - y^2 + j(2x - y) = -3 \tag{38}$$

Εξισώνοντας πραγματικό μέρος με το -3 και φανταστικό μέρος με το μηδέν, παίρνουμε

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -3 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = -3 \\ y = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2 - (2x)^2 = -3 \\ y = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2 - 4x^2 = -3 \\ y = 2x \end{array}\right. \tag{39}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} -3x^2 = -3 \\ y = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y = 2x \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{array}\right. \tag{40}$$

Άρα

$$\begin{cases} z = 1 + j2 \\ z = -1 - j2 \end{cases} \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

(γ΄) Θέτοντας $z = x + jy$

$$\mathrm{Im}\Big\{(2-j)z\Big\} = 1 \tag{43}$$

$$\mathrm{Im}\Big\{(x+jy)(2-j)\Big\} = 1 \tag{44}$$

$$\mathrm{Im}\Big\{2x + j2y - jx + y\Big\} = 1 \tag{45}$$

$$2y - x = 1 \tag{46}$$

$$x - 2y + 1 = 0 \tag{47}$$

$$\tag{48}$$

Άσκηση 3 - Γεωμετρικοί Τόποι Ι

(α΄) Αν $z = x + jy$

$$\mathrm{Re}\Big\{z\Big\} < -1 \Longleftrightarrow x < -1 \tag{49}$$

(β΄) Αν $z = x + jy$

$$|z + j| = 2 \tag{50}$$

$$|z + j|^2 = 4 \tag{51}$$

$$|x + jy + j|^2 = 4 \tag{52}$$

$$|x + j(y+1)|^2 = 4 \tag{53}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 4 \tag{54}$$

(γ΄) Αν $z = x + jy$

$$\mathrm{Im}\Big\{z^2\Big\} < \mathrm{Re}\Big\{z\Big\} \tag{55}$$

$$\mathrm{Im}\Big\{x^2 + j2xy - y^2\Big\} < x \tag{56}$$

$$2xy < x \tag{57}$$

$$x - 2xy > 0 \tag{58}$$

$$x(1-2y) > 0 \tag{59}$$

$$\begin{cases} x > 0, \ \ 1 - 2y > 0 \Longrightarrow y < \frac{1}{2} \\ x < 0, \ \ 1 - 2y < 0 \Longrightarrow y > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{60}$$

Άσκηση 4 - Ρίζες πολυωνύμων Ι

(α΄) Για την εξίσωση

$$z^2 + z + 1 = 0 \tag{61}$$

έχουμε

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 \tag{62}$$

Άρα

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \tag{63}$$

(β΄) Αν $z = x + jy$

$$z^2 + 2z * +1 = 0 \tag{64}$$
$$(x + jy)^2 + 2(x - jy) + 1 = 0 \tag{65}$$
$$x^2 + 2xyj - y^2 + 2x - j2y + 1 = 0 \tag{66}$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 + j(2xy - 2y) = 0 \tag{67}$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \;\; \text{και} \;\; 2xy - 2y = 0 \tag{68}$$
$$x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0 \;\; \text{και} \;\; y(x - 1) = 0 \Longrightarrow y = 0 \;\; \text{ή} \;\; x = 1 \tag{69}$$
$$\tag{70}$$

Αν $y = 0$,

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Longrightarrow x = -1 \tag{71}$$

Αν $x = 1$,

$$1 - y^2 + 2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2 \tag{72}$$

Άρα, $z = -1$ και $z = 1 \pm j2$.

[⋆] Άσκηση 5 - Ρίζες πολυωνύμων II

Αφού το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, οι όποιες μιγαδικές ρίζες του θα είναι σε συζυγή ζεύγη. Άρα, αφού το $z = 1 + j$ είναι ρίζα, και το $z^* = 1 - j$ θα είναι ρίζα.
Επίσης,

$$\Big(z - (1 + j)\Big)\Big(z - (1 - j)\Big) = z^2 - (1 - j)z - (1 + j)z + |1 + j|^2 \tag{73}$$
$$= z^2 - z(1 + j + 1 - j) + 2 \tag{74}$$
$$= z^2 - 2z + 2 \tag{75}$$
$$\tag{76}$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι το $z = 1$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου γιατί το επαληθεύει στην εξίσωση $P(z) = 0$.
Οπότε,

$$(z - 1)(z^2 - 2z + 2) = z^3 - 2z^2 + 2z - z^2 + 2z - 2 \tag{77}$$
$$= z^3 - 3z^2 + 4z - 2 \tag{78}$$
$$\tag{79}$$

Απομένουν δύο ρίζες:

$$
\begin{array}{cccccc|cccc}
z^5 & -2z^4 & +2z^3 & -z^2 & +2z & -2 & z^3 & -3z^2 & +4z & -2 \\
\cline{7-10}
-(z^5 & -3z^4 & +4z^3 & -2z^2 & &) & z^2 & +z & +1 & \\
\cline{1-6}
 & z^4 & -2z^3 & +z^2 & +2z & -2 & & & & \\
 & -(z^4 & -3z^3 & +4z^2 & -2z &) & & & & \\
\cline{2-6}
 & & z^3 & -3z^2 & +4z & -2 & & & & \\
 & & -(z^3 & -3z^2 & +4z & -2) & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr|rrrrrrr}
 & z^5 & - & 2z^4 & + & 2z^3 & - & z^2 & + & 2z & - & 2 & & z^3 & - & 3z^2 & + & 4z & - & 2 \\
\cline{14-20}
- & (z^5 & - & 3z^4 & + & 4z^3 & - & 2z^2 & & & &) & & z^2 & + & z & + & 1 & & \\
\cline{2-12}
 & & & z^4 & - & 2z^3 & + & z^2 & + & 2z & - & 2 & & & & & & & & \\
 & & - & (z^4 & - & 3z^3 & + & 4z^2 & - & 2z & &) & & & & & & & & \\
\cline{4-12}
 & & & & & z^3 & - & 3z^2 & + & 4z & - & 2 & & & & & & & & \\
 & & & & - & (z^3 & - & 3z^2 & + & 4z & - & 2) & & & & & & & & \\
\cline{6-12}
 & & & & & & & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}
$$

Οπότε, το άγνωστο πολυώνυμο που περιέχει τις δύο άγνωστες ρίζες είναι το $z^2 + z + 1$ του οποίου τις ρίζες βρήκαμε στην Άσκηση 4.α, και είναι οι:

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} \tag{80}$$

Άσκηση 6 - Επίλυση εξισώσεων

(α΄) Έχουμε

$$z^8 = -1 \Longleftrightarrow z^8 = e^{j\pi} \Longleftrightarrow |z|^8 \cdot e^{j8\theta} = 1 \cdot e^{j(\pi+2\pi\kappa)} \tag{81}$$

Άρα,

$$\left\{ \begin{array}{l} |z|^8 = 1 \\ 8\theta = 2\pi\kappa + \pi, \quad \kappa = 0, 1, ..., 7 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} |z| = 1 \\ \theta = \frac{2\pi\kappa+\pi}{8}, \quad \kappa = 0, 1, ..., 7 \end{array} \right. \tag{82}$$

Άρα λύσεις είναι:

$$z = 1 \cdot e^{j\frac{2\pi\kappa+\pi}{8}} = e^{j\pi\frac{2\kappa+1}{8}}, \quad \kappa = 0, 1, ..., 7 \tag{83}$$

(β΄) Έχουμε

$$z^4 + 32 = 4 \Longleftrightarrow z^4 = -28 \Longleftrightarrow |z|^4 \cdot e^{j4\theta} = 28 \cdot e^{j(\pi+2\pi\kappa)} \tag{84}$$

Άρα,

$$\left\{ \begin{array}{l} |z|^4 = 28 \\ 4\theta = 2\pi\kappa + \pi \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} |z| = \sqrt[4]{28} \\ \theta = \frac{2\pi\kappa+\pi}{4} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} |z| = 28^{\frac{1}{4}} \\ \theta = \frac{2\pi\kappa+\pi}{4} \end{array} \right. \tag{85}$$

Άρα λύσεις είναι:

$$z = 28^{\frac{1}{4}} \cdot e^{j\pi\frac{2\kappa+1}{4}}, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3 \tag{86}$$

(γ΄) Έχουμε

$$z^3 - (1 + j) = 0 \Longleftrightarrow z^3 = 1 + j \Longleftrightarrow |z|^3 \cdot e^{j3\theta} = \sqrt{2} \cdot e^{j(\frac{\pi}{4}+2\pi\kappa)} \tag{87}$$

Άρα,

$$\left\{ \begin{array}{l} |z|^3 = \sqrt{2} \\ 3\theta = 2\pi\kappa + \frac{\pi}{4} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \theta = \frac{2\pi\kappa+\frac{\pi}{4}}{3} \end{array} \right. \tag{88}$$

Άρα λύσεις είναι:

$$z = 2^{\frac{1}{6}} \cdot e^{j\frac{2\pi\kappa+\frac{\pi}{4}}{3}}, \quad \kappa = 0, 1, 2 \tag{89}$$

Άσκηση 7 - Euler και De Moivre

(α΄) Είναι

$$\left(1 + j\sqrt{3}\right)^{107} = z^{107}, \quad \text{με } z = 1 + j\sqrt{3} \tag{90}$$

Σε πολική μορφή

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2 \text{ και } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \tag{91}$$

Άρα, $z = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$.

Οπότε,

$$\left(1 + j\sqrt{3}\right)^{107} = \left(2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^{107} = 2^{107} \cdot e^{j\frac{107\pi}{3}} = 2^{107} \cdot e^{j\left(\frac{108\pi - \pi}{3}\right)} = 2^{107} \cdot e^{j\left(36\pi - \frac{\pi}{3}\right)} \tag{92}$$

$$= 2^{107} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}} = 2^{107} \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^{107} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \tag{93}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2^{107} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2^{107} j = 2^{106} - j2^{106}\sqrt{3} \tag{94}$$

(β΄) Είναι

$$(1 - j)^{-76} = z^{-76}, \quad \text{με } z = 1 - j \tag{95}$$

Σε πολική μορφή

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ και } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4} \tag{96}$$

Άρα, $z = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$.

Οπότε,

$$(1 - j)^{-76} = \left(\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^{-76} = \left(\sqrt{2}\right)^{-76} \cdot e^{j\frac{76\pi}{4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{-76} \cdot e^{j\left(\frac{80\pi - 4\pi}{4}\right)} \tag{97}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{-76} \cdot e^{j(20\pi - \pi)} = \left(\sqrt{2}\right)^{-76} \cdot e^{-j\pi} = \left(\sqrt{2}\right)^{-76} \cdot (-1) \tag{98}$$

$$= -\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-76} = -2^{-38} \tag{99}$$