

HY-215: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς
Εαρινό Εξάμηνο 2022-23

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού, Γ. Καφεντζής

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 6/5/2023

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/5/2023, 16:00

Οι ασκήσεις με [*] είναι **bonus**, +10 μονάδες η καθεμία στο βαθμό αυτής της σειράς ασκήσεων (δηλ. μπορείτε να πάρετε μέχρι 70/60 στο θεωρητικό κομμάτι αυτής της σειράς.)

Άσκηση 1 - Μετασχηματισμός Laplace I - Ορισμός

Χρησιμοποιήστε τον ορισμό για να βρείτε το μετασχ. Laplace των παρακάτω σημάτων. Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!

(α) $x(t) = te^{-2|t|}$

Απ: $-\frac{8s}{(4-s^2)^2}, -2 < \sigma < 2$

(β) $x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Απ: $\frac{1-e^{-s}}{s}, \forall s$

Άσκηση 2 - Μετασχηματισμός Laplace II - Ιδιότητες

Σας δίνεται ο μετασχ. Laplace ενός σήματος $x(t)$ ως

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s+3}, R_x = \{\sigma > -3\} \quad (1)$$

Βρείτε το μετασχ. Laplace των παρακάτω σημάτων με αποκλειστική χρήση ιδιοτήτων.

(α) $x(-3t)$ (γ) $x(4t-1)$ (ε) $e^{2t}x(t)$ (ζ) $x(t) * x(t)$
(β) $x(t-2)$ (δ) $2tx(t)$ (η) $\frac{dx(t)}{dt}$ (η) $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$

Σε ποιά/ες από τις παραπάνω περιπτώσεις μπορείτε να υπολογίσετε το Μετασχ. Fourier από το Μετασχ. Laplace;

Απ:

(α) $\frac{e^{2s/3}}{9-s}, \sigma < 9$ (γ) $\frac{e^{-3s/4}}{s+12}, \sigma > -12$ (ε) $\frac{e^{-2s+4}}{s+1}, \sigma > -1$ (ζ) $\frac{e^{-4s}}{(s+3)^2}, R_x$
(β) $\frac{e^{-4s}}{s+3}, R_x$ (δ) $2\frac{e^{-2s}(2s+7)}{(s+3)^2}, R_x$ (η) $\frac{se^{-2s}}{s+3}, R_x$ (η) $\frac{e^{-2s}}{s(s+3)}, \sigma > 0$

Άσκηση 3 - Μετασχηματισμός Laplace III - Ιδιότητες

Έστω το σήμα $y(t)$ που σχετίζεται με δυο σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t)$ ως

$$y(t) = x_1(t-2) * x_2(3-t) \quad (2)$$

με

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad (3)$$

$$x_2(t) = e^{-3t}u(t) \quad (4)$$

Χρησιμοποιήστε γνωστά ζεύγη και ιδιότητες του μετασχ. Laplace για να βρείτε το μετασχ. Laplace $Y(s)$ του σήματος $y(t)$. Μην ξεχάσετε το πεδίο σύγκλισης!

$$\text{Απ: } Y(s) = \frac{e^{-5s}}{(s+2)(3-s)}, \quad 3 > \sigma > -2$$

Άσκηση 4 - Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace - I

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Laplace του

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2 + 7s + 12} \quad (5)$$

με $\sigma > -3$. Χρησιμοποιήστε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα.

$$\text{Απ: } x(t) = (4e^{-4t} - 2e^{-3t})u(t)$$

Άσκηση 5 - Διαφορικές Εξισώσεις και Μετασχ. Laplace

Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) - 2y(t) = x(t) \quad (6)$$

(α) Βρείτε την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς $H(s)$.

(β) Ποιά τα πιθανά πεδία σύγκλισης της $H(s)$;

(γ) Για την παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς, βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος για τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i. το σύστημα είναι αιτιατό

$$\text{Απ.: } h(t) = -\frac{1}{3}(e^{-2t} - e^t)u(t)$$

ii. το σύστημα είναι ευσταθές

$$\text{Απ.: } h(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$$

iii. το σύστημα δεν είναι ούτε ευσταθές, ούτε αιτιατό

$$\text{Απ.: } h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^t u(-t)$$

Άσκηση 6 - Μετασχ. Laplace και Συστήματα

Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+\frac{1}{3})} \quad (7)$$

(α) Σχεδιάστε όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.

(β) Βρείτε την κρουστική απόκριση, $h(t)$, του συστήματος, αν γνωρίζετε ότι το σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό.

$$\text{Απ.: } h(t) = \frac{6}{5}e^{-2t}u(t) + \frac{4}{5}e^{-t/3}u(t)$$

(γ) Μπορείτε να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας, $H(f)$, του συστήματος μέσω του μετασχ. Laplace; Αν ναι, εξηγήστε και βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

(δ) Αν στο σύστημα παρουσιαστεί η είσοδος $x(t) = 2e^{-3t}u(t)$, τότε βρείτε την έξοδο $y(t)$.

$$\text{Απ.: } y(t) = \frac{12}{5}e^{-2t}u(t) - 3e^{-3t}u(t) + \frac{3}{5}e^{-t/3}u(t)$$

(ε) Για ποιά είσοδο $x(t)$, το σύστημα δίνει έξοδο $y(t) = \delta(t)$;

$$\text{Απ.: } x(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\delta(t) + \frac{2}{3}\delta(t) - \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

(ς) Βρείτε μια διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το παραπάνω σύστημα $H(s)$.

$$\text{Απ.: } \frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{7}{3}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{2}{3}y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) + 2x(t)$$

[*] Άσκηση 7 - Διαφορικές Εξισώσεις και μετασχ. Laplace

Ένα *απαιτό* ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{3}{2}\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{2}y(t) = \frac{1}{4}x(t) + \frac{d}{dt}x(t) \quad (8)$$

(α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(s)$, και προσδιορίστε το πεδίο σύγκλισης.

$$\text{Απ.: } H(s) = \frac{s + \frac{1}{4}}{(s + 1)(s + \frac{1}{2})}, \quad \sigma > -\frac{1}{2}$$

(β) Σχεδιάστε (ή αναφέρετε) *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές;

(γ) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος, $h(t)$.

$$\text{Απ.: } h(t) = \left(\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-t/2} \right) u(t)$$

(δ) Αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδενικές, αλλά ίσες με $y(0^-) = 1, \left. \frac{d}{dt}y(t) \right|_{t=0^-} = 0$, τότε βρείτε την έξοδο του (όχι πλέον ΓΧΑ) συστήματος για είσοδο $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$.

$$\text{Απ.: } y(t) = \left(\frac{7}{6}e^{-2t} - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{-t/2} + \frac{3}{2}te^{-t} \right) u(t)$$